

Diseño de par calculado robusto no lineal basado en observación: una solución por medio de desigualdades matriciales lineales

Jesús Alonso Díaz^a, Víctor Estrada-Manzo^b, Miguel Bernal^{a,*}

^aDepartamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Instituto Tecnológico de Sonora, Antonio Caso s/n, 85140, Ciudad Obregón, México. ^bDepartamento de Mecatrónica, Universidad Politécnica de Pachuca, Ex-Hacienda de Santa Bárbara, 43830, Zempoala, México.

To cite this article: Díaz, J.A., Estrada-Manzo, V., Bernal, M. 2024. Robust observer-based nonlinear computed-torque design via linear matrix inequalities. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 21, 218-230. <https://doi.org/10.4995/riai.2024.20765>

Resumen

En este artículo, la robustez de la bien conocida técnica de par calculado es mejorada en dos aspectos: por un lado, la ley de control de bucle interno se hace depender exclusivamente de señales generadas por el usuario cuya precisión ya no se ve afectada por ruido o errores numéricos de medición ni amplificada por operaciones no lineales; por otro lado, la ley de control de bucle externo se hace depender de posiciones medibles y velocidades estimadas por un observador, lo que reduce el costo de implementación. Tanto el controlador como el observador son estructuras no lineales diseñadas por medio de desigualdades matriciales lineales que resultan de reescribir en forma convexa el sistema del error de seguimiento y el sistema del error de observación por medio de una factorización recientemente aparecida en la literatura para luego aplicar el método directo de Lyapunov. La propuesta de diseño es puesta a prueba en diversos sistemas Lagrange-Euler donde las ventajas en comparación con el par calculado tradicional pueden ser apreciadas tanto en simulación como en tiempo real.

Palabras clave: Aplicación de análisis y diseño no lineales, Sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos, Métodos de Lyapunov, Diseño de observadores y filtros no lineales, Desigualdades matriciales lineales robustas.

Robust observer-based nonlinear computed-torque design via linear matrix inequalities

Abstract

Robustness of the well-known computed-torque technique is twofold improved in this paper: on the one hand, the inner-loop control law is made exclusively dependent on user-generated signals whose accuracy is no longer affected by noise or numerical errors; on the other hand, the outer-loop control law is based on available positions and observer-based estimations of the velocities. Both the controller and the observer are nonlinear structures designed via linear matrix inequalities arising from the application of a recently appeared factorization. Asymptotic convergence of the tracking and estimation errors is guaranteed via Lyapunov-based analysis. The proposal is put at test in a variety of Lagrange-Euler systems where advantages over standard computed-torque techniques are confirmed, both in simulation and real-time setups.

Keywords: Application of nonlinear analysis and design, Lagrangian and Hamiltonian systems, Lyapunov methods, Nonlinear observers and filter design, Robust linear matrix inequalities.

1. Introducción

La técnica de par calculado es uno de los enfoques más populares para el seguimiento de trayectoria en manipuladores robóticos rígidos con modelo Lagrange-Euler debido a su efec-

tividad y sencillez (Merat, 1987). La técnica consigue su objetivo construyendo un sistema lineal del error de seguimiento cuya estabilización implica el seguimiento asintótico de la trayectoria deseada $q_d(t)$ (Lewis et al., 2003); esto es posible debido

*Autor para correspondencia: miguel.bernal@itson.edu.mx

a que los sistemas Lagrange-Euler son linealizables por realimentación (Isidori, 1995). La técnica tradicional asume que los vectores de posiciones y velocidades, $q \in \mathbb{R}^n$ y $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ respectivamente, así como la forma precisa de la matriz de inercia $M(q)$ y los vectores de Coriolis, gravedad y ficción sumados en $H(q, \dot{q})$, están disponibles.

La ley de control consta de dos partes. Por un lado, el bucle interno de control $\tau(t)$ alimenta las expresiones arriba referidas para cancelar las no linealidades en el modelo del error de seguimiento (Marion, 1965); por el otro lado, el bucle externo de control $u(t)$ suele diseñarse como n controladores PD/PID para estabilizar una descomposición diagonal del modelo del error en n sistemas SISO (Lewis et al., 2003). Una generalización del bucle externo de control pueden hallarse en el empleo de desigualdades matriciales lineales (LMIs por sus siglas en inglés) para explotar todas las entradas de la forma matricial de las ganancias (Díaz and Bernal, 2019). Muchas modificaciones a la técnica estándar de par calculado (Lee and Chen, 1983; Shin and McKay, 1985) así como una gran variedad de aplicaciones (Piltan et al., 2012; Santos and Cortesão, 2018; Han et al., 2020) pueden hallarse en la literatura.

Las técnicas clásicas de robustez han sido incorporadas a la técnica de par calculado tradicional porque la linealización por realimentación implica la inversión del modelo y, por lo tanto, tiene una eficiencia que depende críticamente del conocimiento preciso del mismo (Hagenmeyer and Delaleau, 2003) y de sus parámetros (Charlet et al., 1989); algunas de estas mejoras son la inclusión de términos integrales (Lewis, 1992), el análisis estructurado de perturbaciones (Khalil, 1981), el análisis no estructurado de perturbaciones (Mohammed et al., 2018) y la garantía de errores ultimadamente acotados (Corless and Leitmann, 1981). Este trabajo aborda al problema de robustez de la técnica de par calculado cambiando la dependencia del bucle interno de control $\tau(t)$ de las señales de la planta $q(t)$ y $\dot{q}(t)$, cuya disponibilidad es discutible, por las señales generadas por el usuario $q_d(t)$ y $\dot{q}_d(t)$, respectivamente. Esto es ventajoso porque las señales generadas por el usuario no están contaminadas de ruido como sí pueden estarlo las señales de la planta que deben medirse o estimarse para luego utilizarse en operaciones no lineales dentro de $M(q)$ y $H(q, \dot{q})$.

Algunos trabajos han realizado partes de la sustitución sugerida, pero realizan análisis de robustez tradicionales (Palli et al., 2008); esto se debe a que utilizar las señales q_d y \dot{q}_d en vez de q y \dot{q} produce un sistema no lineal del error cuya dinámica, hasta ahora, sólo se aproximaba. En (Quintana et al., 2021) se presenta una factorización basada en el teorema del valor medio que permite, bajo ciertas condiciones, factorizar a la derecha de expresiones de la forma $f(q_d) - f(q)$ la señal $q_d - q$, algo que desde luego resulta aplicable al sistema no lineal del error. Una primera aplicación de esta factorización se encuentra en (Díaz et al., 2020), pero la sustitución es sólo parcial toda vez que su uso en la matriz de inercia lleva a modelos del error en forma descriptor (Guerra et al., 2007): este trabajo supera esta complicación. Como todas las expresiones no lineales en el sistema del error son acotadas en un compacto del espacio de juntas, es posible escribir un modelo convexo del mismo por medio de la técnica de sector no lineal (Taniguchi et al., 2001); basados en esa reescritura convexa el método directo de Lyapunov puede ser utilizado para deducir condiciones de diseño para el bucle

externo de control $u(t)$ en forma de LMIs (Boyd et al., 1994). Expresar los resultados en esta forma tiene la ventaja de poder encontrar soluciones en tiempo polinomial por medio de software comercialmente disponible (Gahinet et al., 1995; Sturm, 1999) así como aportar cotas de entrada, tasas de decaimiento y otras prestaciones de una manera directa (Tanaka and Wang, 2001).

Adicionalmente, la propuesta de bucle externo de control $u(t)$ utiliza estimados de la velocidad \dot{q} para garantizar su aplicabilidad en entornos de tiempo real, ya que la mayoría de los manipuladores robóticos utilizan sensores de posición pero no de velocidades (Canudas Wit et al., 1990). Para este fin, se propone un observador no lineal que estima \dot{q} para ser usado en $u(t)$; del mismo modo que en el diseño del controlador, un sistema del error de estimación es construido con base en la factorización en (Quintana et al., 2021) que, luego de la reescritura convexa, permite el diseño de las ganancias del observador por medio de condiciones LMI establecidas por medio del método directo de Lyapunov. Naturalmente, el uso de un estimado de \dot{q} en la ley de control requiere garantizar la estabilidad de todo el esquema, lo que se consigue gracias a la forma triangular del sistema del error combinado de seguimiento y estimación.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: la sección 2 presenta la técnica de par calculado tradicional y la factorización exacta de señales del error de seguimiento y estimación a partir de expresiones de la forma $f(q_d) - f(q)$ y $f(\dot{q}_d) - f(\dot{q})$, respectivamente; las secciones 3 y 4 desarrollan la técnica propuesta para el controlador y observador, respectivamente, obteniendo las condiciones LMI de diseño por medio del método directo de Lyapunov aplicado a sistemas no lineales del error de seguimiento y observación; la sección 6 contrasta el rendimiento de la propuesta con el de la técnica de par calculado tradicional en varios ejemplos, tanto en simulación como en tiempo real; por último, la Sección 7 recoge algunas conclusiones y discute trabajo futuro.

Notación: Las letras minúsculas son empleadas para escalares y vectores; las mayúsculas para funciones matriciales; las dependencias se omiten cuando pueden deducirse del contexto; el asterisco (*) en expresiones en línea indica la transpuesta de los términos a la izquierda mientras que en matrices indica la transpuesta del término en la posición simétrica; la transpuesta se denota con el superíndice (T). Salvo indicación contraria, todas las medidas se hacen en sistema internacional.

2. Preliminaries

El modelo matemático de un manipulador rígido compuesto de n juntas rotacionales y prismáticas puede expresarse en la forma Lagrange-Euler como:

$$M(q)\ddot{q}(t) + H(q, \dot{q}) = \tau(t), \quad (1)$$

donde $q \in \mathbb{R}^n$ es el vector de juntas (posiciones), $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $H(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ es la suma de los vectores de Coriolis, fricción y gravedad, y $\tau \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas generalizadas.

La técnica de par calculado permite realizar la tarea de seguimiento asintótico de una trayectoria infinitamente diferenciable $q_d(t)$ en el espacio de juntas del manipulador robótico;

consiste en llevar a 0 la señal del error de seguimiento

$$e_r(t) = q_d(t) - q(t), \quad (2)$$

y su derivada \dot{e}_r , tomando en cuenta por (1)

$$\dot{e}_r(t) = \dot{q}_d(t) + M^{-1}(q)(H(q, \dot{q}) - \tau(t)),$$

donde el bucle interno de control se define como

$$\tau(t) = M(q)(\ddot{q}_d(t) - u(t)) + H(q, \dot{q}), \quad (3)$$

con el bucle externo de control $u(t)$ por definirse.

Basado en lo anterior, el sistema del error de seguimiento puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_r(t) \\ \dot{e}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_r(t) \\ \dot{e}_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u(t). \quad (4)$$

Evidentemente, cualquier ley de control $u(t)$ que establezca este sistema garantizará la convergencia asintótica de $e_r(t)$ y $\dot{e}_r(t)$ a 0, i.e., $q(t) \rightarrow q_d(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Cualquier técnica lineal puede aplicarse, desde asignación de polos (Chen, 1984) hasta formulaciones LMI (Duan and Yu, 2013). Pese a su carácter multivariable, note que

$$u(t) = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_r(t) \\ \dot{e}_r(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

puede adoptar formas diagonales en $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in \{1, 2\}$, capaces de dividir la estabilización en la de n sistemas de 2o. orden, uno por cada entrada de $e_r(t)$.

Planteamiento del problema: La técnica de par calculado se ilustra esquemáticamente en la Figura 1. Note que las posiciones q y las velocidades \dot{q} se asumen medibles para el control; estas mediciones se emplean en $M(q)$ y $H(q, \dot{q})$ (en rojo) para calcular el bucle interno de control τ a pesar de que la mayoría de las aplicaciones no disponen de \dot{q} porque sólo incluyen sensores de posición. Finalmente, tanto si se miden como si se estiman, estas señales pueden presentar ruido y con ello deteriorar la implementación de la ley de control de par calculado.

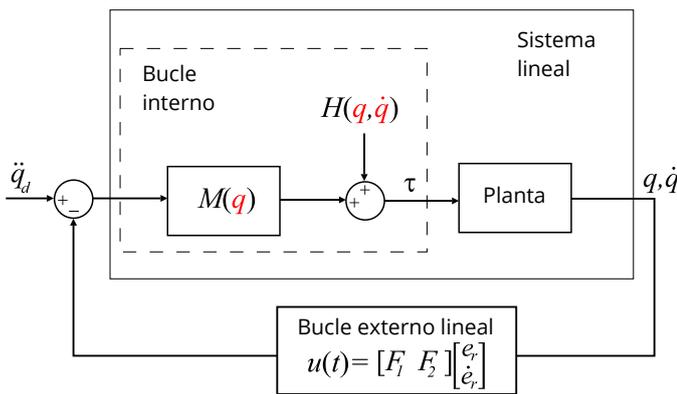


Figura 1: Esquema de par calculado tradicional.

Contribución: Para atacar el problema de las señales ruidosas en el bucle interno de control seguimos las ideas de (Nunes and Hsu, 2010) para cambiar $q(t)$ y $\dot{q}(t)$ en (3) por señales generadas por el usuario $q_d(t)$ y $\dot{q}_d(t)$, respectivamente, i.e.:

$$\tau(t) = M(q_d)(\ddot{q}_d(t) - u(t)) + H(q_d, \dot{q}_d), \quad (6)$$

donde $u(t) \in \mathbb{R}^n$ debe ser diseñada. En contraste con (Nunes and Hsu, 2010), nuestra propuesta:

- Empleará optimización convexa y expresiones exactas, es decir, las no linealidades no serán aproximadas.
- Asumirá que la planta sólo dispone de encoders para sensar la posición q (angular o lineal).
- Considerará que la diferencia entre los parámetros nominales y reales de la planta (longitudes, masas y momentos de inercia) es despreciable.
- Puesto que la posición q y el estimado de la velocidad \hat{q} serán empleados cuando se requiera información de la planta, un observador será requerido para garantizar que el error de observación

$$e_o(t) = \hat{q}(t) - q(t) \quad (7)$$

y su derivada converjan asintóticamente a 0.

- Garantizará la estabilidad asintótica del esquema de control basado en observación por medio de condiciones LMI.

La propuesta se ilustra en la Figura 2.

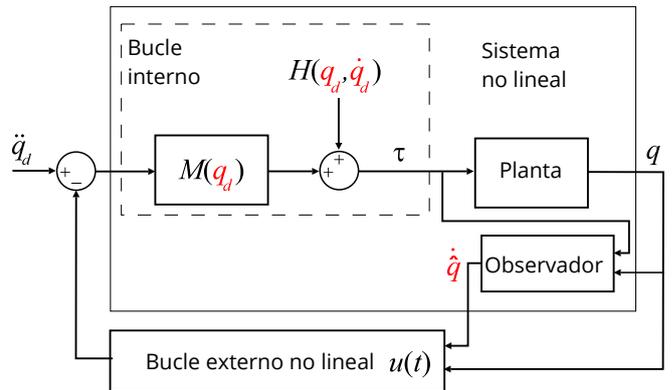


Figura 2: Esquema de par calculado propuesto.

Metodología (Obtención de sistemas del error): El análisis y diseño basado en Lyapunov utiliza con frecuencia la función candidata cuadrática $V(x) = x^T P x$, $P = P^T > 0$, a fin de asegurarse de que las condiciones de positividad y negatividad de la función y su derivada, respectivamente, se traduzcan en condiciones matriciales susceptibles de ser expresadas como LMIs; este procedimiento suele requerir que el sistema se escriba en la forma $\dot{x} = A(x)x(t)$. De manera análoga, el seguimiento de trayectoria y el diseño de observadores que tienen por objeto llevar a cero las señales del error de seguimiento y del error de observación, requieren que la dinámica del error tenga una forma matricial adecuada para su tratamiento bajo el método directo de Lyapunov. La obtención de dicha forma suele hacerse con aproximaciones, pero en este caso se hará de manera exacta factorizando las señales $e_r = q_d - q$ y $e_o = \hat{q} - q$ de expresiones de la forma $f(q_d) - f(q)$ or $f(\hat{q}) - f(q)$, respectivamente, con

$f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Esta factorización está garantizada por el teorema del valor medio y tiene una infinidad de formas explícitas como se muestra en (Quintana et al., 2021).

Si las expresiones tienen serie de Taylor convergente, pueden expresarse como

$$f(q_d) - f(q) = F(q_d, q)(q_d - q) = F(q_d, q)e_r, \quad (8)$$

donde $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ es una función cuyas entradas son polinomios multivariados de q y q_d . El método para obtener esta forma se resume como sigue:

- Todos los monomios cuyas potencias son combinaciones de aquellas involucradas en las expresiones polinómicas multivariados $p(q_d) - p(q)$ se suman y restan para luego acomodarse en una factorización matricial.
- Las expresiones no polinómicas se aproximan con cualquier grado de precisión por medio de la serie de Taylor; luego se tratan como en el primer caso.

Obviamente, las expresiones del observador $f(\hat{q}) - f(q)$ pueden ser tratadas de la misma manera (Quintana et al., 2021).

Por ejemplo, considere $q = [q_1 \ q_2]^T$ y $f(q) = [q_1^2 \ q_1 q_2^2]^T$. La factorización (8) se puede inferir definiendo $e_{r1} = q_{d1} - q_1$ y $e_{r2} = q_{d2} - q_2$, para escribir $q_{d1}^2 - q_1^2 = (q_{d1} + q_1)e_{r1}$ y

$$\begin{aligned} q_{d1}q_{d2}^2 - q_1q_2^2 &= q_{d1}q_{d2}^2 - q_{d1}q_2^2 + q_{d1}q_2^2 - q_1q_2^2 \\ &= q_{d1}(q_{d2}^2 - q_2^2) + (q_{d1} - q_1)q_2^2 \\ &= q_{d1}(q_{d2} + q_2)(q_{d2} - q_2) + q_2^2(q_{d1} - q_1) \\ &= \alpha q_{d1}(q_{d2} + q_2)e_{r2} + \alpha q_2^2 e_{r1} \\ &\quad + (1 - \alpha)q_{d1}(q_{d2} + q_2)e_{r2} + (1 - \alpha)q_2^2 e_{r1}, \end{aligned}$$

para toda $\alpha \in \mathbb{R}$.

Metodología (Modelado convexo exacto): Una vez que las dinámicas del error se escriben en forma matricial gracias a la metodología descrita arriba, nos proponemos utilizar modelado convexo exacto para derivar condiciones LMI que garanticen la estabilidad asintótica del origen (Tanaka and Wang, 2001; Lendek et al., 2010). Dada una expresión z definida en el intervalo $[z^0, z^1]$, es claro que:

$$z = \frac{z^1 - z}{z^1 - z^0}z^0 + \frac{z - z^0}{z^1 - z^0}z^1,$$

donde $w_0(z) = (z^1 - z)/(z^1 - z^0)$ y $w_1(z) = (z - z^0)/(z^1 - z^0)$ satisfacen la propiedad de suma convexa siempre que z permanezca en el intervalo, i.e., $w_0(z) + w_1(z) = 1$, $w_0(z), w_1(z) \in [0, 1]$.

Las sumas convexas pueden agruparse en el extremo izquierdo de las expresiones sin que ello afecte a los términos que no dependen de ellas (suman uno); en efecto, si $z_1 = w_0^1(z_1)z_1^0 + w_1^1(z_1)z_1^1$ y $z_2 = w_0^2(z_2)z_2^0 + w_1^2(z_2)z_2^1$, donde $w_j^i(z_j)$, $i_j \in \{0, 1\}$, $j \in \{1, 2\}$, satisface la propiedad de suma convexa para todo $z_j \in [z_j^0, z_j^1]$, entonces:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \sum_{i_1=0}^1 w_{i_1}^1(z_1)z_1^{i_1} + \sum_{i_2=0}^1 w_{i_2}^2(z_2)z_2^{i_2} = \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 w_{i_1}^1(z_1)w_{i_2}^2(z_2)(z_1^{i_1} + z_2^{i_2}) \\ z_1 z_2 &= \left(\sum_{i_1=0}^1 w_{i_1}^1(z_1)z_1^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=0}^1 w_{i_2}^2(z_2)z_2^{i_2} \right) = \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 w_{i_1}^1(z_1)w_{i_2}^2(z_2)z_1^{i_1} z_2^{i_2}. \end{aligned}$$

Las expresiones que surjan en el diseño del controlador/observador serán tratadas como se acaba de describir: las señales medibles se agruparán en el vector q_a ; las no medibles en \hat{q} . Se asumirá que estas señales pertenecen a conjuntos compactos Ω_a y $\Omega_{\hat{q}}$, respectivamente, lo que garantizará la existencia de cotas para dichas señales. Estas expresiones serán listadas como $z_i(q_a) \in [z_i^0, z_i^1]$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, cuando dependan de señales medibles y como $\zeta_j(\hat{q}) \in [\zeta_j^0, \zeta_j^1]$, $j \in \{1, 2, \dots, \rho\}$, cuando dependan de señales no medibles. Por construcción, cada par $w_0^i(z_i) = (z_i^1 - z_i)/(z_i^1 - z_i^0)$ y $w_1^i(z_i) = (z_i - z_i^0)/(z_i^1 - z_i^0)$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, satisface la propiedad de suma convexa para cada $z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_p]^T \in \Omega_a$, y cada par $\omega_0^j(\zeta_j) = (\zeta_j^1 - \zeta_j)/(\zeta_j^1 - \zeta_j^0)$ y $\omega_1^j(\zeta_j) = (\zeta_j - \zeta_j^0)/(\zeta_j^1 - \zeta_j^0)$, $j \in \{1, 2, \dots, \rho\}$, satisface la propiedad de suma convexa para cada $\zeta = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \dots \ \zeta_\rho]^T \in \Omega_{\hat{q}}$. La notación $w_i(z) = w_{i_1}^1(z)w_{i_2}^2(z) \dots w_{i_p}^p(z)$, $i = (i_1, i_2, \dots, i_p) \in \mathbb{B}^p$, $\omega_j(\zeta) = \omega_{j_1}^1(\zeta)\omega_{j_2}^2(\zeta) \dots \omega_{j_\rho}^\rho(\zeta)$, $j = (j_1, j_2, \dots, j_\rho) \in \mathbb{B}^\rho$, $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, será adoptada, donde \mathbb{B}^p y \mathbb{B}^ρ representan el conjunto de combinaciones de 1's y 0's de p y ρ bits, respectivamente.

Las siguientes dos secciones desarrollarán el controlador y el observador de manera independiente, basadas en la factorización y modelado convexo presentados; la tercera sección probará que el principio de separación se sostiene gracias a la convexidad y argumentos de eigenvalores (Boyd et al., 1994).

3. Diseño del controlador

Sustituyendo (6) en (1) y sumando $M(q)\ddot{q}_d$ a ambos lados produce:

$$M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) + M(q)\ddot{q}_d = M(q_d)(\ddot{q}_d - u) + H(q_d, \dot{q}_d) + M(q)\ddot{q}_d,$$

lo que, por medio de la factorización descrita en la sección previa y detallada en (Quintana et al., 2021), puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} M(q)(\ddot{q}_d - \ddot{q}) + M(q_d)\ddot{q}_d - M(q)\ddot{q}_d + H(q_d, \dot{q}_d) - H(q, \dot{q}) - M(q_d)u \\ = M(q)\ddot{e}_r(t) + \bar{M}(q, q_d, \dot{q}_d)e_r + \bar{H}(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d) \begin{bmatrix} e_r \\ \dot{e}_r \end{bmatrix} - M(q_d)u(t) = 0, \end{aligned}$$

con $\bar{M}, \bar{H}_1, \bar{H}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ expresiones matriciales suficientemente suaves (constituidas por funciones diferenciables hasta el orden requerido por el contexto), producto de la factorización

$$\bar{M}(q, q_d, \dot{q}_d)e_r = M(q_d)\ddot{q}_d - M(q)\ddot{q}_d, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_1(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d) & \bar{H}_2(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_r \\ \dot{e}_r \end{bmatrix} = H(q_d, \dot{q}_d) - H(q, \dot{q}), \quad (10)$$

donde $\bar{H}(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d) = [\bar{H}_1(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d) \ \bar{H}_2(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d)]$.

Así, la dinámica del error de seguimiento puede escribirse en la siguiente forma descriptor:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_r(t) \\ \ddot{e}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\bar{M}(\bar{q}) - \bar{H}_1(\bar{q}) & -\bar{H}_2(\bar{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_r(t) \\ \dot{e}_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M(q_d) \end{bmatrix} u(t) \quad (11)$$

con $\bar{q} \equiv [q^T \ q_d^T \ \dot{q}^T \ \dot{q}_d^T \ \ddot{q}_d^T]^T$ agrupando todos los posibles argumentos en \bar{M}, \bar{H}_1 , y \bar{H}_2 .

La presente propuesta asume que q es medible mientras que \dot{q} no lo es. Sin embargo, se probará más adelante que el principio de separación se sostiene, lo que significa que el controlador puede diseñarse como si \dot{q} fuera medible. Así, el bucle externo de control

$$u(t) = \begin{bmatrix} F_1(\bar{q}) & F_2(\bar{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_r(t) \\ \dot{e}_r(t) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

puede ser considerado con $F_1(\bar{q}), F_2(\bar{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como ganancias no lineales por determinar.

Teorema 1. Dada una trayectoria deseada $q_d(t)$ suficientemente suave y un sistema en la forma Lagrange-Euler (1), el error de seguimiento (2) converge asintóticamente a cero si el bucle interno de control (6) se aplica con el bucle externo de control (12), donde $F_1(\bar{q}) = M^{-1}(q_d)(\bar{M}(\bar{q}) + \bar{H}_1(\bar{q}) + \bar{F}_1(q))$, $F_2(\bar{q}) = M^{-1}(q_d)(\bar{H}_2(\bar{q}) + \bar{F}_2(q))$, $\bar{F}_1(q) = \sum_{i \in \mathbb{B}^p} \mathbf{w}_i(q) \bar{F}_{1i}$, $\bar{F}_2(q) = \sum_{i \in \mathbb{B}^p} \mathbf{w}_i(q) \bar{F}_{2i}$; $\bar{F}_{1i}, \bar{F}_{2i}, \mathbf{i} \in \mathbb{B}^p$, resultan de resolver las LMIs

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{1i} + (*) & (*) & (*) & (*) \\ \bar{F}_{1i} + S_1^T + \bar{F}_{2i}^T & S_2 + \bar{F}_{2i} + (*) & (*) & (*) \\ \bar{F}_{1i} - S_1^T + P_1 & S_3 + \bar{F}_{2i} - S_2^T + P_2 & -S_3 + (*) & (*) \\ \bar{F}_{1i} - M_i^T + P_2 & S_4 + \bar{F}_{2i} - M_i^T + P_3 & -S_4 - M_i^T & -M_i^T + (*) \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

con $P_1, P_2, P_3, S_1, S_2, S_3, S_4 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como variables de decisión y $\mathbf{w}_i(q) = w_{i_1}^1(q) w_{i_2}^2(q) \cdots w_{i_p}^p(q)$ como el producto de las funciones convexas $w_{ij}^j(q)$, $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, que surgen de la reescritura convexa exacta de $M(q)$ dentro del compacto $\Omega_q \subset \mathbb{R}^n$ de forma que $0 \in \Omega_q$:

$$M(q) = \sum_{i \in \mathbb{B}^p} \mathbf{w}_i(q) M_i. \quad (15)$$

Demostración 1. Se ha demostrado que si el bucle interno de control (6) se aplica a sistema Lagrange-Euler (1), la dinámica del error de seguimiento resulta ser (11). Sustituyendo (12) en (11) produce

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_r(t) \\ \ddot{e}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ M(q_d)F_1(\bar{q}) - \bar{M}(\bar{q}) - \bar{H}_1(\bar{q}) & M(q_d)F_2(\bar{q}) - \bar{H}_2(\bar{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_r(t) \\ \dot{e}_r(t) \end{bmatrix},$$

expresión que puede ser simplificada a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_r(t) \\ \ddot{e}_r(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ \bar{F}_1(q) & \bar{F}_2(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_r(t) \\ \dot{e}_r(t) \end{bmatrix} \\ \iff \sum_{i \in \mathbb{B}^p} \mathbf{w}_i(q) \begin{bmatrix} 0 & I & -I & 0 \\ \bar{F}_{1i} & \bar{F}_{2i} & 0 & -M_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_r(t) \\ \dot{e}_r(t) \\ \ddot{e}_r(t) \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

una vez que $F_1(\bar{q}) = M^{-1}(q_d)(\bar{M}(\bar{q}) + \bar{H}_1(\bar{q}) + \bar{F}_1(q))$ y $F_2(\bar{q}) = M^{-1}(q_d)(\bar{H}_2(\bar{q}) + \bar{F}_2(q))$ sean sustituidas, donde $M(q)$, $\bar{F}_1(q)$, y $\bar{F}_2(q)$ están en sus formas convexas equivalentes. Dado que $q \in \Omega_q$, la propiedad de suma convexa permite escribir las sumas convexas con $\mathbf{w}_i(q)$ en el extremo izquierdo.

A partir de la LMI (13), considere la función de Lyapunov candidata

$$V(e_r, \dot{e}_r) = \begin{bmatrix} e_r \\ \dot{e}_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_r \\ \dot{e}_r \end{bmatrix},$$

cuya derivada en el tiempo se puede expresar como:

$$\dot{V}(t) = \begin{bmatrix} e_r \\ \dot{e}_r \\ \ddot{e}_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_1 & P_2 \\ 0 & 0 & P_2^T & P_3 \\ P_1 & P_2 & 0 & 0 \\ P_2^T & P_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_r \\ \dot{e}_r \\ \ddot{e}_r \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Garantizar $\dot{V}(t) < 0$ a lo largo de las trayectorias del sistema implica garantizar que la expresión anterior sea definida negativa sujeta a (16); por medio del Lema de Finsler (Boyd et al., 1994), esto equivale a:

$$\sum_{i \in \mathbb{B}^p} \mathbf{w}_i(q) \left(S \begin{bmatrix} 0 & I & -I & 0 \\ \bar{F}_{1i} & \bar{F}_{2i} & 0 & -M_i \end{bmatrix} + (*) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_1 & P_2 \\ 0 & 0 & P_2^T & P_3 \\ P_1 & P_2 & 0 & 0 \\ P_2^T & P_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) < 0,$$

donde $S \in \mathbb{R}^{4n \times 2n}$ es una variable de decisión, debido a que (16) implica añadir ceros a la expresión previa (Oliveira and Skelton, 2001). Ahora bien, gracias a la convexidad de $\mathbf{w}_i(q)$ dentro de Ω_q , la desigualdad anterior está garantizada si las LMIs (14) se cumplen con

$$S = \begin{bmatrix} S_1^T & S_2^T & S_3^T & S_4^T \\ I & I & I & I \end{bmatrix}^T,$$

y entonces $V(e_r, \dot{e}_r)$ es una función de Lyapunov válida, garantizando así la estabilidad asintótica de e_r .

Observación 1. El uso del Lema de Finsler en la demostración anterior hace uso de una selección particular de S para obtener condiciones suficientes en forma de LMIs.

Observación 2. El teorema anterior se puede adaptar fácilmente si el conjunto de señales medibles cambia. En efecto, si sólo las posiciones q son medibles, la selección de $F_1(\bar{q})$ y $F_2(\bar{q})$ que permite cancelar los términos $\bar{M}(q)$, $\bar{H}_1(\bar{q})$ y $\bar{H}_2(\bar{q})$, ya no es posible; en su lugar, sólo $\bar{M}(q)$ puede ser eliminada y las expresiones en $\bar{H}_1(\bar{q})$ y $\bar{H}_2(\bar{q})$ deben ser separadas en dos conjuntos: aquellas que dependen exclusivamente de señales medibles y el resto; luego se modela en forma convexa para obtener LMIs; ver Sección 5.

4. Diseño del observador

Dado que el modelo de la planta (1) se puede reescribir en forma descriptor como:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ -H(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \tau(t), \quad (18)$$

y, además sabiendo que sólo $q(t)$ es medible, se propone el siguiente observador:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{q}}(t) \\ \ddot{\hat{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{q} \\ -H(\hat{q}, \dot{\hat{q}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \tau(t) + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1(q_a) \\ L_2(q_a) \end{bmatrix} e_o(t) \quad (19)$$

donde $q_a \equiv \begin{bmatrix} q^T & \dot{q}^T & \ddot{q}^T & q_d^T & \dot{q}_d^T & \ddot{q}_d^T \end{bmatrix}^T$ contiene todas las señales medibles, incluyendo aquellas para el seguimiento de

trayectoria, $e_o(t) = \hat{q}(t) - q(t)$ es el error, $L_1(q_a)$ y $L_2(q_a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son ganancias posiblemente no lineales.

Por medio de la factorización propuesta en (Quintana et al., 2021) tenemos:

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_1(q, \dot{q}, \hat{q}, \dot{\hat{q}}) & \bar{H}_2(q, \dot{q}, \hat{q}, \dot{\hat{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_o \\ \dot{e}_o \end{bmatrix} = H(\hat{q}, \dot{\hat{q}}) - H(q, \dot{q}). \quad (20)$$

Note que \bar{H}_i , $i \in \{1, 2\}$ son las mismas que en el sistema del error de seguimiento con las señales deseadas y sus derivadas reemplazadas por las señales estimadas y sus derivadas, respectivamente.

Recordando que $\tilde{q} = [q^T \quad \hat{q}^T \quad \dot{q}^T \quad \dot{\hat{q}}^T]^T$, ahora es posible escribir el sistema del error de observación como

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_o \\ \ddot{e}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\bar{H}_1(\tilde{q}) & -\bar{H}_2(\tilde{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_o \\ \dot{e}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1(q_a) \\ L_2(q_a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_o \\ \dot{e}_o \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Teorema 2. El error de estimación $e_o(t) = \hat{q}(t) - q(t)$ que resulta del sistema (1) y el observador (19) converge asintóticamente a cero si $L_1(q_a) = \sum_{i \in \mathbb{B}^p} \mathbf{w}_i(q_a) L_{1i}$ y $L_2(q_a) = \sum_{i \in \mathbb{B}^p} \mathbf{w}_i(q_a) L_{2i}$ con

$$\begin{bmatrix} L_{1i} \\ L_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_{1i} \\ N_{2i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} \in \mathbb{B}^p \quad (22)$$

y $P_1, P_2, P_3, N_{1i}, N_{2i}, \mathbf{i} \in \mathbb{B}^p$, variables de decisión de las LMIs

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} N_{1i} - P_2 \bar{H}_{1ij} + (*) & (*) \\ N_{2i} - P_3 \bar{H}_{2ij} + P_1^T - \bar{H}_{2ij}^T P_2^T & P_2^T - P_3 \bar{H}_{2ij} + (*) \end{bmatrix} < 0; \quad (23)$$

$\mathbf{w}_i(q_a) = w_{i_1}^1(q_a) w_{i_2}^2(q_a) \cdots w_{i_p}^p(q_a)$, $\mathbf{i} \in \mathbb{B}^p$, y $\omega_j(\tilde{q}) = \omega_{j_1}^1(\tilde{q}) \omega_{j_2}^2(\tilde{q}) \cdots \omega_{j_p}^p(\tilde{q})$, $\mathbf{j} \in \mathbb{B}^p$, productos de las funciones convexas $w_k^k(q_a)$, $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ y $\omega_l^l(\tilde{q})$, $l \in \{1, 2, \dots, \rho\}$, respectivamente, surgidas de la reescritura convexa exacta de los términos medibles y no medibles en $M^{-1}(q) \bar{H}_1(\tilde{q})$ y $M^{-1}(q) \bar{H}_2(\tilde{q})$, dentro del compacto $\Omega_{\tilde{q}} \subset \mathbb{R}^{4n}$ tal que $0 \in \Omega_{\tilde{q}}$:

$$M^{-1}(q) \bar{H}_k(\tilde{q}) = \sum_{i \in \mathbb{B}^p} \sum_{j \in \mathbb{B}^p} \mathbf{w}_i(q_a) \omega_j(\tilde{q}) \bar{H}_{kij}, \quad k \in \{1, 2\}. \quad (24)$$

Demostración 2. El sistema del error de observación (21) puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_o(t) \\ \ddot{e}_o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(q_a) & I \\ -M^{-1}(q) \bar{H}_1(\tilde{q}) + L_2(q_a) & -M^{-1}(q) \bar{H}_2(\tilde{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_o(t) \\ \dot{e}_o(t) \end{bmatrix}.$$

La primera LMI en (23) permite considerar la siguiente candidata a función de Lyapunov:

$$V(e_o, \dot{e}_o) = \begin{bmatrix} e_o \\ \dot{e}_o \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_o \\ \dot{e}_o \end{bmatrix},$$

cuya derivada respecto al tiempo es definida-negativa si

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2 \begin{bmatrix} e_o \\ \dot{e}_o \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1(q_a) & I \\ -M^{-1}(q) \bar{H}_1(\tilde{q}) + L_2(q_a) & -M^{-1}(q) \bar{H}_2(\tilde{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_o \\ \dot{e}_o \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_o \\ \dot{e}_o \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 L_1(\cdot) + P_2 L_2(\cdot) - P_2 M^{-1}(\cdot) \bar{H}_1(\cdot) + (*) \\ P_2^T L_1(\cdot) + P_3 L_2(\cdot) - P_3 M^{-1}(\cdot) \bar{H}_1(\cdot) + P_1^T - \bar{H}_2^T(\cdot) M^{-1}(\cdot) P_2^T \\ P_2^T - P_3 M^{-1}(q) \bar{H}_2(\tilde{q}) + (*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_o \\ \dot{e}_o \end{bmatrix} < 0, \end{aligned}$$

que, luego de la sustitución de (24), $L_1(q_a) = \sum_{i \in \mathbb{B}^p} \mathbf{w}_i(q_a) L_{1i}$ y $L_2(q_a) = \sum_{i \in \mathbb{B}^p} \mathbf{w}_i(q_a) L_{2i}$, y la aplicación de la propiedad de suma convexa, está garantizada por:

$$\sum_{i \in \mathbb{B}^p} \sum_{j \in \mathbb{B}^p} \mathbf{w}_i(q_a) \omega_j(\tilde{q}) \begin{bmatrix} P_1 L_{1i} + P_2 L_{2i} - P_2 \bar{H}_{1ij} + (*) \\ P_2^T L_{1i} + P_3 L_{2i} - P_3 \bar{H}_{1ij} + P_1^T - \bar{H}_{2ij}^T(\tilde{q}) P_2^T \\ P_2^T - P_3 \bar{H}_{2ij} + (*) \end{bmatrix} < 0.$$

El segundo conjunto de LMIs en (23) garantiza la desigualdad anterior siempre que $P_1 L_{1i} + P_2 L_{2i}$ y $P_2^T L_{1i} + P_3 L_{2i}$ sean reemplazadas por N_{1i} y N_{2i} , respectivamente, que es precisamente lo que (22) implica. Así pues, $V(e_o, \dot{e}_o)$ es una función de Lyapunov legítima que garantiza la estabilidad asintótica de e_o , lo que concluye la prueba.

Observación 3. La complejidad numérica de las condiciones LMI de los teoremas 1 y 2 puede estimarse como $\log_{10}(n_d^3 n_l)$, donde n_d es el número de variables de decisión escalares y n_l es el número de filas en todas las LMIs (Xie et al., 2014). Para el Teorema 1 tenemos $n_d = n^2(7 + 2^p + 2^p)$ y $n_l = 4n2^p + 2n$, mientras que para el Teorema 2 tenemos $n_d = n^2(3 + 2^p + 2^p)$ y $n_l = 2n(1 + 2^{p+p})$.

5. Diseño del controlador basado en observación

La estructura del bucle interno de control ya se consideró en la sección 3, pero la señal del bucle externo $u(t)$ que ahí se consideró asumía que \dot{q} era medible, lo que no es un supuesto realista. El observador propuesto en la sección 4 permite estimar \dot{q} por medio de $\hat{\dot{q}}$. En esta sección retomamos el diseño del controlador considerando que el bucle externo de control tiene la forma

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{bmatrix} F_1(q_a) & F_2(q_a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_r^T(t) & \dot{q}_d^T(t) - \dot{\hat{q}}^T(t) \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} F_1(q_a) & F_2(q_a) & -F_2(q_a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_r^T(t) & \dot{e}_r^T(t) & \dot{e}_o^T(t) \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (25)$$

donde $F_1(q_a)$ y $F_2(q_a)$ se diseñan como en la sección 3 y las señales no medibles \dot{q} son reemplazadas por sus estimaciones $\hat{\dot{q}}$.

Reuniendo los sistemas del error de seguimiento (11) y del error de observación (21) con el bucle externo de control (25), tenemos:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M(q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_r(t) \\ \dot{e}_r(t) \\ \dot{e}_o(t) \\ \ddot{e}_o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & \dots \\ M(q_d) F_1(q_a) - \bar{M}(\tilde{q}) - \bar{H}_1(\tilde{q}) & M(q_d) F_2(q_a) - \bar{H}_2(\tilde{q}) & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -M(q_d) F_2(q_a) & \dots \\ \dots & L_1(q_a) & I & \dots \\ \dots & M(q) L_2(q_a) - \bar{H}_1(\tilde{q}) & -\bar{H}_2(\tilde{q}) & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_r(t) \\ \dot{e}_r(t) \\ e_o(t) \\ \dot{e}_o(t) \end{bmatrix}.$$

Definiendo $M(q) = \text{diag}(I, M(q), I, M(q))$ y escogiendo ganancias $F_1(q_a) = M^{-1}(q_d) (\bar{M}(\tilde{q}) + \bar{F}_1(q_a))$ y $F_2(q_a) =$

$M^{-1}(q_a)\bar{F}_2(q_a)$, el sistema del error de seguimiento/observación anterior se reescribe como:

$$\mathcal{M}(q) \begin{bmatrix} \dot{e}_r^T & \ddot{e}_r^T & \dot{e}_o^T & \ddot{e}_o^T \end{bmatrix}^T = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & I & 0 & 0 \\ \bar{F}_1(\cdot) - \bar{H}_1(\cdot) & \bar{F}_2(\cdot) - \bar{H}_2(\cdot) & 0 & -\bar{F}_2(\cdot) \\ 0 & 0 & L_1(\cdot) & I \\ 0 & 0 & M(\cdot)L_2(\cdot) - \bar{H}_1(\cdot) & -\bar{H}_2(\cdot) \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_r \\ \dot{e}_r \\ e_o \\ \dot{e}_o \end{bmatrix}$$

Como $\mathcal{M}(q) > 0$, podemos multiplicar ambos lados del modelo previo por $M^{-1}(q)$, lo que junto con $\bar{e}_r \equiv [e_r^T \ \dot{e}_r^T]^T$ y $\bar{e}_o \equiv [e_o^T \ \dot{e}_o^T]^T$ produce:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{e}}_r \\ \dot{\bar{e}}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_c(\bar{q}) + \mathcal{B}(q)\mathcal{F}(q_a) & -\mathcal{B}(q)\mathcal{F}(q_a)\mathcal{D} \\ 0 & \mathcal{A}_o(\bar{q}) + \mathcal{L}(q_a)C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_r \\ \bar{e}_o \end{bmatrix}, \quad (26)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_c(\bar{q}) &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}(q)\bar{H}_1(\bar{q}) & -M^{-1}(q)\bar{H}_2(\bar{q}) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{D} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_o(\bar{q}) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}(q)\bar{H}_1(\bar{q}) & -M^{-1}(q)\bar{H}_2(\bar{q}) \end{bmatrix}, \\ C &= [I \ 0], \quad \mathcal{F}(q_a) = [\bar{F}_1(q_a) \ \bar{F}_2(q_a)], \quad \mathcal{L}(q_a) = \begin{bmatrix} L_1(q_a) \\ L_2(q_a) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

El siguiente teorema demuestra que el diseño del controlador y del observador, bajo las condiciones descritas, satisface el principio de separación, esto es, que pueden diseñarse independientemente con garantías de que su reunión llevará $e_r(t)$ y $e_o(t)$ a 0; este teorema imita un resultado similar para inclusiones diferenciales lineales en (Boyd et al., 1994, Section 7.6).

Teorema 3. La señal del error $\bar{e} \equiv [\bar{e}_r^T \ \bar{e}_o^T]^T$ converge asintóticamente a 0 si existen matrices $X = X^T > 0$, $Q = Q^T > 0$, que satisfagan las desigualdades

$$X(\mathcal{A}_c(\bar{q}) + \mathcal{B}(q)\mathcal{F}(q_a)) + (\mathcal{A}_c(\bar{q}) + \mathcal{B}(q)\mathcal{F}(q_a))^T X < 0 \quad (27)$$

$$(\mathcal{A}_o(\bar{q}) + \mathcal{L}(q_a)C)Q + Q(\mathcal{A}_o(\bar{q}) + \mathcal{L}(q_a)C)^T < 0, \quad (28)$$

en un compacto $\Omega_{\bar{e}} \subset \mathbb{R}^{4n}$ tal que $0 \in \Omega_{\bar{e}}$.

Demostración 3. La existencia de una función cuadrática de Lyapunov capaz de asegurar la estabilidad asintótica del origen de (26) implica que

$$\begin{bmatrix} X & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_c(\bar{q}) + \mathcal{B}(q)\mathcal{F}(q_a) & -\mathcal{B}(q)\mathcal{F}(q_a)\mathcal{D} \\ 0 & \mathcal{A}_o(\bar{q}) + \mathcal{L}(q_a)C \end{bmatrix} + (*) < 0, \quad (29)$$

para un compacto $\Omega_{\bar{e}} \subset \mathbb{R}^{4n}$ con $0 \in \Omega_{\bar{e}}$. Expandiendo la expresión por bloques en (1, 1) produce (27).

De manera similar, pre- y post-multiplicando (29) por

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} X & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix}^{-1},$$

produce

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_c(\bar{q}) + \mathcal{B}(q)\mathcal{F}(q_a) & -\mathcal{B}(q)\mathcal{F}(q_a)\mathcal{D} \\ 0 & \mathcal{A}_o(\bar{q}) + \mathcal{L}(q_a)C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q \end{bmatrix} + (*) < 0, \quad (30)$$

de donde se sigue que (28) se cumple si la expresión en la posición (2, 2) se obtiene.

Así pues, si las condiciones (27)-(28) se cumplen, la siguiente función candidata de Lyapunov puede ser considerada para (26):

$$V(\bar{e}_r, \bar{e}_o) = \begin{bmatrix} \bar{e}_r(t) \\ \bar{e}_o(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda X & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_r(t) \\ \bar{e}_o(t) \end{bmatrix},$$

con $\lambda > 0$ por definirse; su derivada respecto al tiempo es definida-negativa si

$$\begin{bmatrix} \lambda X & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_c(\bar{q}) + \mathcal{B}(q)\mathcal{F}(q_a) & -\mathcal{B}(q)\mathcal{F}(q_a)\mathcal{D} \\ 0 & \mathcal{A}_o(\bar{q}) + \mathcal{L}(q_a)C \end{bmatrix} + (*) \\ = \begin{bmatrix} \lambda X(\mathcal{A}_c(\bar{q}) + \mathcal{B}(q)\mathcal{F}(q_a)) + (*) & -\lambda X\mathcal{B}(q)\mathcal{F}(q_a)\mathcal{D} \\ -\lambda\mathcal{D}\mathcal{F}^T(q_a)\mathcal{B}^T(q)X & Q^{-1}(\mathcal{A}_o(\bar{q}) + \mathcal{L}(q_a)C) + (*) \end{bmatrix} < 0,$$

se cumple en un compacto $\Omega_{\bar{e}} \subset \mathbb{R}^{4n}$ con $0 \in \Omega_{\bar{e}}$. Por el complemento de Schur la desigualdad anterior es equivalente a

$$\lambda R(\cdot) - S(\cdot) > 0, \quad (31)$$

con $R(\cdot) = X\mathcal{B}(q)\mathcal{F}(q_a)\mathcal{D}Q^{-1}(\mathcal{A}_o(\bar{q}) + \mathcal{L}(q_a)C) + (*)^{-1} \times \mathcal{D}\mathcal{F}^T(q_a)\mathcal{B}^T(q)X$ y $S(\cdot) = X(\mathcal{A}_c(\bar{q}) + \mathcal{B}(q)\mathcal{F}(q_a)) + (*)$.

Las condiciones (27)-(28) garantizan que $\lambda_{\min}(R(\cdot)) < 0$ y $\lambda_{\max}(S(\cdot)) < 0$; por lo tanto, λ puede escogerse de modo que $\lambda(\lambda_{\min}(R(\cdot))) > \lambda_{\max}(S(\cdot))$ para garantizar (31).

Observación 4. El teorema arriba mostrado no es una metodología de diseño; su único propósito es garantizar que, para la familia de sistemas bajo consideración (plantas Lagrange-Euler), las estructuras propuestas de controlador y observador pueden diseñarse independientemente. Dicho en otras palabras, garantiza que la reunión de controlador y observador garantizará la convergencia asintótica de las trayectorias del sistema a las trayectorias deseadas (Teorema 1) y la convergencia asintótica a 0 del error de estimación (Teorema 2).

Observación 5. Los teoremas 1 y 2 están basados en funciones de Lyapunov y el teorema 3 prueba que sus diseños son independientes. Esto garantiza que las trayectorias del error de seguimiento y las trayectorias del error de observación convergen asintóticamente a 0 para cualquier condición inicial $\bar{e}(0)$ dentro del máximo nivel de Lyapunov contenido en el compacto $\Omega_{\bar{e}}$. La estimación de dicho nivel (Khalil, 2014, Sección 3.6) está fuera del alcance de este artículo.

Observación 6. Los sistemas con incertidumbres paramétricas multiplicativas pueden manejarse directamente por medio de la propuesta, separando señales medibles y no medibles para su modelado convexo. De hecho, un sistema no lineal incierto $\dot{x}(t) = f(x, \theta) + g(x, \theta)u$ con $\theta \in \mathbb{R}^s$ agrupando las incertidumbres, puede escribirse como

$$\dot{x}(t) = \sum_{i \in \mathbb{B}^p} \sum_{j \in \mathbb{B}^p} \mathbf{w}_i(x)\omega_j(x, \theta) (A_{ij}x(t) + B_{ij}u(t)), \quad (32)$$

donde las expresiones acotadas que dependen de incertidumbres pueden incluirse en la lista de términos no medibles $\zeta_j(x, \theta) \in [\zeta_j^0, \zeta_j^1]$, $j \in \{1, 2, \dots, \rho\}$, de modo que $\zeta_j(x, \theta) = \omega_0^j(x, \theta)\zeta_j^0 + \omega_1^j(x, \theta)\zeta_j^1$, $\omega_0^j(x, \theta) \triangleq (\zeta_j^1 - \zeta_j(x, \theta))/(\zeta_j^1 - \zeta_j^0)$, $\omega_1^j(x, \theta) \triangleq 1 - \omega_0^j(x, \theta)$.

6. Ejemplos

Esta sección proporciona tres ejemplos donde se aplica la técnica propuesta: el primero es un manipulador robótico con una junta de revolución y otra prismática; el segundo es un manipulador SCARA de dos brazos; el tercero es una implementación en tiempo real que controla la posición del eslabón horizontal de un péndulo de Furuta bajo las perturbaciones causadas por el eslabón vertical. Tanto el controlador solo como el controlador basado en observador son presentados y los resultados se comparan con el par calculado tradicional en ambientes ruidosos.

Ejemplo 1. Considere el brazo de dos juntas (rotacional y prismática) mostrado en la Figura 3, cuyo modelo en la forma Lagrange-Euler está dado por (Craig, 2005):

$$M(q)\ddot{q}(t) + H(q, \dot{q}) = \tau(t), \quad (33)$$

donde $q = [q_1 \ q_2]^T$ es el vector de juntas, $M(q) = \text{diag}(m_1 l^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 q_2^2, m_2)$ es la matriz de inercia, $\tau(t) = [\tau_1(t) \ \tau_2(t)]^T$ reúne las señales que van a los actuadores, y

$$H(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 2m_2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (m_1 l + m_2 q_2) g \cos q_1 \\ m_2 g \sin q_1 \end{bmatrix}$$

reúne los vectores de gravedad y Coriolis. Los parámetros se listan en la Tabla 7.

Consideremos inicialmente que tanto el vector de juntas q como su derivada \dot{q} son medibles. Por medio de la factorización descrita en las secciones 2 y 3, tenemos que (9)-(10) puede escribirse como:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2\dot{q}_{1d}q_2 + 2\dot{q}_{1d}q_{2d} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{H}_1 = \begin{bmatrix} \bar{H}_{1(1,1)} & \bar{H}_{1(1,2)} \\ \bar{H}_{1(2,1)} & \bar{H}_{1(2,2)} \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_2 = \begin{bmatrix} \bar{H}_{2(1,1)} & \bar{H}_{2(1,2)} \\ \bar{H}_{2(2,1)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_{1(1,1)} &= 0,8175q_1^3q_2 - 7,3575q_{1d} - 9,81q_1q_2 - 9,81q_2q_1 \\ &7,3575q_1 + 0,613125q_1q_{1d}^2 + 0,613125q_1^2q_{1d} + 0,8175q_2q_1^3 \\ &0,613125q_1^3 + 0,613125q_{1d}^3 + 0,8175q_1q_2q_{1d}^2 + 0,8175q_1^2q_2 \\ \bar{H}_{1(1,2)} &= 0,8175q_{1d}^4 - 9,81q_{1d}^2 + 4\dot{q}_{1d}\dot{q}_{2d} + 19,62, \quad \bar{H}_{1(2,1)} \\ &0,1635q_1^4 + 0,1635q_1^3q_{1d} + 0,1635q_1^2q_{1d}^2 - 3,27q_1^2 + 0,1635q_1q \\ &3,27q_1q_{1d} + 0,1635q_{1d}^4 - 3,27q_{1d}^2 + 19,62, \quad \bar{H}_{1(2,2)} = -2 \\ \bar{H}_{2(1,1)} &= 4\dot{q}_2q_2, \quad \bar{H}_{2(1,2)} = 4\dot{q}_{1d}q_2, \quad \text{y} \quad \bar{H}_{2(2,1)} = -2\dot{q}_1q_2 - 2\dot{q}_{1d}q_2 \end{aligned}$$

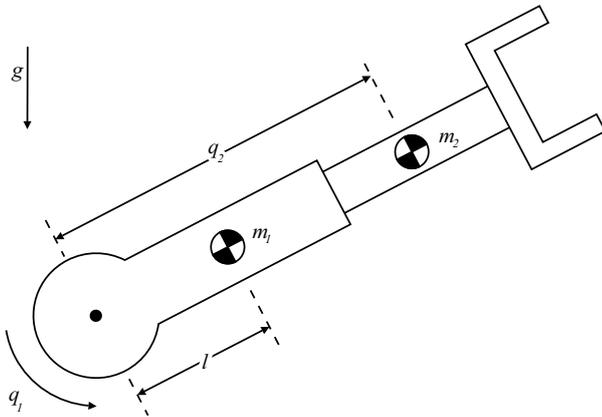


Figura 3: Esquema del brazo revoluto-prisma del Ejemplo 1.

Tabla 1: Parámetros del manipulador RP del Ejemplo 1.

Parámetro	Símbolo	Valor
Masa del eslabón 1	m_1	3 kg
Masa del eslabón 2	m_2	2 kg
Distancia mostrada en la Figura 3	l	0,5 m
Momento de inercia del eslabón 1	I_{zz1}	0,03 kg·m ²
Momento de inercia del eslabón 2	I_{zz2}	0,01 kg·m ²
Gravedad	g	9,81 m/s ²

Puesto que q y \dot{q} son medibles, el controlador (12) puede usarse con $F_1(\bar{q})$ y $F_2(\bar{q})$ definidas como en el Teorema 1. Esto significa que sólo $M(q)$ debe reescribirse como suma convexa; como sólo contiene una no linealidad, asumiendo que $q_2 \in [-0,2, 0,2]$ tenemos:

$$z_1(q) \equiv m_1 l^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 q_2^2 = 2q_2^2 + 0,79 \in [0,79, 0,87],$$

lo que significa que las LMIs (13)-(14) en el Teorema 1 deben resolverse para hallar las ganancias $\bar{F}_{j(i)}$, $i \in \{0, 1\}$, $j \in \{1, 2\}$; las LMIs produjeron $S_1 = \text{diag}(5,7553, 5,7103)$, $S_2 = \text{diag}(0,8993, 1,0793)$, $S_3 = \text{diag}(3,0227, 2,9327)$, $S_4 = \text{diag}(-0,9285, -1,6935)$, $P_1 = \text{diag}(7,5886, 7,4086)$, $P_2 = \text{diag}(1,9263, 2,4663)$, $P_3 = \text{diag}(5,7790, 7,3990)$, $\bar{F}_{1(0)} = \text{diag}(-2,1939, -2,0072)$, $\bar{F}_{1(1)} = \text{diag}(-2,1805, -2,0072)$, $\bar{F}_{2(0)} = \text{diag}(-3,9287, -4,0120)$, $\bar{F}_{2(1)} = \text{diag}(-3,9153, -4,0120)$.

La Figura 4 muestra que el seguimiento de la trayectoria deseada $q_{1d}(t) = 0,1 \sin t$, $q_{2d}(t) = 0,05 \cos(2t)$, tiene lugar cuando el controlador diseñado se implementa; la simulación se produce desde las condiciones iniciales $q_1(0) = 0,1$, $q_2(0) = \dot{q}_1(0) = 0$, y $\dot{q}_2(0) = 0,2$.

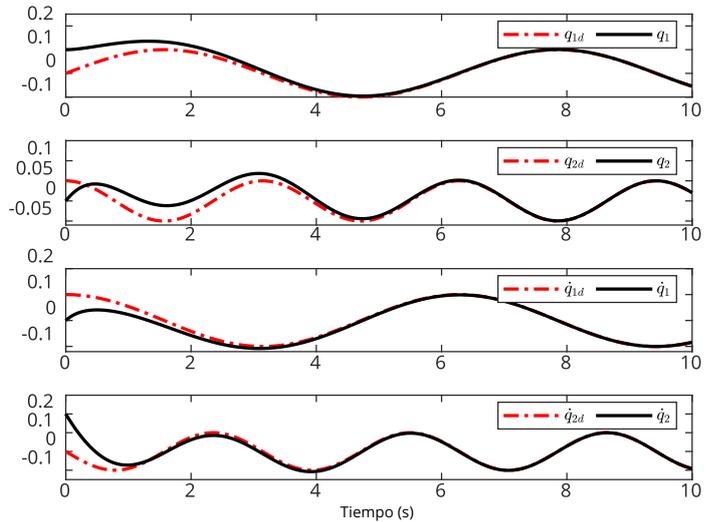


Figura 4: Seguimiento de trayectoria en el Ejemplo 1 basada en el controlador por par calculado propuesto con todos los estados medibles.

Consideremos ahora el diseño del controlador basado en observador. Como \dot{q} ya no es medible, $F_1(\bar{q}) = M^{-1}(q_d)(\bar{M}(\bar{q}) + \bar{F}_1(q))$ y $F_2(\bar{q}) = M^{-1}(q_d)\bar{F}_2(q)$ deben ser usados, lo que significa que $\bar{H}_1(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d)$ y $\bar{H}_2(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d)$ deben modelarse porque ya no pueden cancelarse directamente por medio de $u(t)$

en (25). Todavía más: las señales medibles deben separarse de las no medibles para que sólo aquellas puedan usarse en el controlador; estas señales están listadas en las Tablas 2-3 junto con sus cotas considerando que $q_1, q_{1d}, \hat{q}_1 \in [-\pi/6, \pi/6]$, $q_2, q_{2d}, \hat{q}_2 \in [-0,2, 0,2]$, $\dot{q}_1, \dot{q}_{1d}, \hat{\dot{q}}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_{2d}, \hat{\dot{q}}_2 \in [-2, 2]$, $\ddot{q}_{1d} \in [-3, 3]$.

Tabla 2: No linealidades y sus cotas para el controlador del Ejemplo 1.

$z_i(q_a)/\zeta_j(\bar{q})$	z_i^0/ζ_j^0	z_i^1/ζ_j^1
$z_1(q_a) = \bar{H}_{1(1,1)}$	-9,3134	9,3134
$z_2(q_a) = \bar{H}_{1(1,2)}$	0,9920	35,6200
$z_3(q_a) = \bar{H}_{1(2,1)}$	16,9920	19,6200
$z_4(q_a) = \bar{H}_{1(2,2)}$	-8	0
$\zeta_1(\bar{q}) = \bar{H}_{2(1,1)}$	-1,6	1,6
$z_5(q_a) = \bar{H}_{2(1,2)}$	-1,6	1,6
$\zeta_2(\bar{q}) = \bar{H}_{2(2,1)}$	-1,6	1,6
$z_6(q_a) = 2q_2^2 + 0,79$	0,79	0,88

Tabla 3: No linealidades y sus cotas para el observador del Ejemplo 1.

$z_i(q_a)/\zeta_j(\bar{q})$	z_i^0/ζ_j^0	z_i^1/ζ_j^1
$z_1(q_a) = \bar{H}_{1(1,1)}$	-9,3134	9,3134
$z_2(q_a) = \bar{H}_{1(1,2)}$	0,9920	35,6200
$z_3(q_a) = \bar{H}_{1(2,1)}$	16,9920	19,6200
$z_4(q_a) = \bar{H}_{1(2,2)}$	-8	0
$\zeta_1(\bar{q}) = \bar{H}_{2(1,1)}$	-1,6	1,6
$z_5(q_a) = \bar{H}_{2(1,2)}$	-1,6	1,6
$\zeta_2(\bar{q}) = \bar{H}_{2(2,1)}$	-1,6	1,6
$z_6(q_a) = 1/(2q_2^2 + 0,79)$	1,1494	1,2658

Algunas de las 2^6 ganancias del controlador obtenidas por medio de las LMIs del Teorema 1 (adaptadas para \dot{q} no medible) son:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{1(000000)} &= \begin{bmatrix} -29,0852 & 0,6587 \\ 16,6587 & -27,7610 \end{bmatrix}, \\ \bar{F}_{1(101010)} &= \begin{bmatrix} -10,4584 & 1,3253 \\ 19,9533 & -27,7610 \end{bmatrix}, \\ \bar{F}_{2(000000)} &= \begin{bmatrix} -30,1063 & -1,5333 \\ 0,0667 & -30,6747 \end{bmatrix}, \\ \bar{F}_{2(101010)} &= \begin{bmatrix} -30,1063 & 1,5333 \\ -0,0667 & -30,6747 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

y algunos de las 2^6 ganancias del observador obtenidas por medio de las LMIs del Teorema 2 son:

$$\begin{aligned} L_{1(000000)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1,7887 \\ -2,5453 & 0 \end{bmatrix} \times 10^7, \\ L_{1(101010)} &= \begin{bmatrix} -0,0001 & -0,8473 \\ 1,2057 & 0 \end{bmatrix} \times 10^6, \\ L_{2(000000)} &= \begin{bmatrix} 0 & 3,3232 \\ -1,6929 & 0 \end{bmatrix} \times 10^8, \\ L_{2(101010)} &= \begin{bmatrix} -0,0002 & -1,5742 \\ 0,8019 & 0 \end{bmatrix} \times 10^7, \end{aligned}$$

La Figura 5 muestra una simulación del comportamiento obtenido cuando se implementa el controlador basado en ob-

servación diseñado; tanto el error de seguimiento como el de observación convergen asintóticamente a 0 como se esperaba.

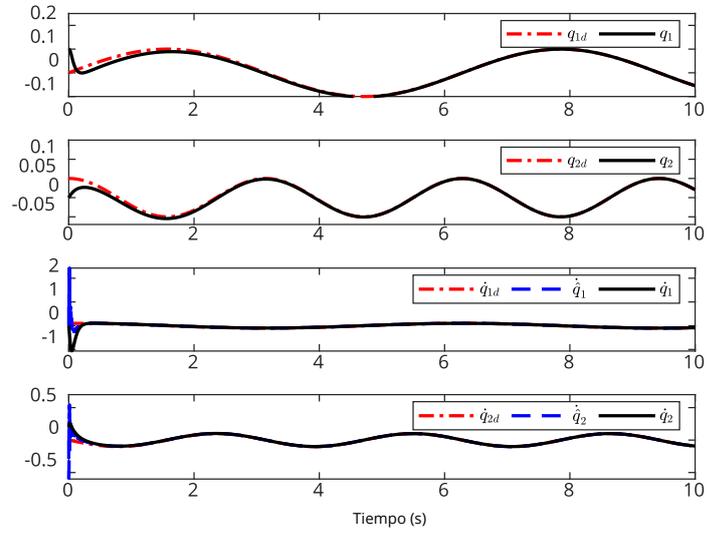


Figura 5: Seguimiento de trayectoria en el Ejemplo 1 basada en el controlador por par calculado y el observador no lineal propuestos: estados de posición q medibles y estados de velocidad \dot{q} estimados por \hat{q} .

Ejemplo 2. Considere el mecanismo SCARA mostrado en la Figura 6; su modelo en la forma Lagrange-Euler es (Visioli and Legnani, 2002):

$$\begin{bmatrix} J_{m1} + J_{HD1} + k^2(m_1 l^2 + 2m_2 l^2(1 + \cos q_2)) & k^2 m_2 l^2(1 + \cos q_2) \\ k^2 m_2 l^2(1 + \cos q_2) & J_{m2} + J_{HD2} + k^2 m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) k m_2 l^2 \sin q_2 \\ \dot{q}_1^2 k m_2 l^2 \sin q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{bmatrix},$$

donde q_1 y q_2 son ángulos, $\tau_1(t)$ y $\tau_2(t)$ son las señales de los pares actuadores, y la Tabla 4 especifica los parámetros de la planta.

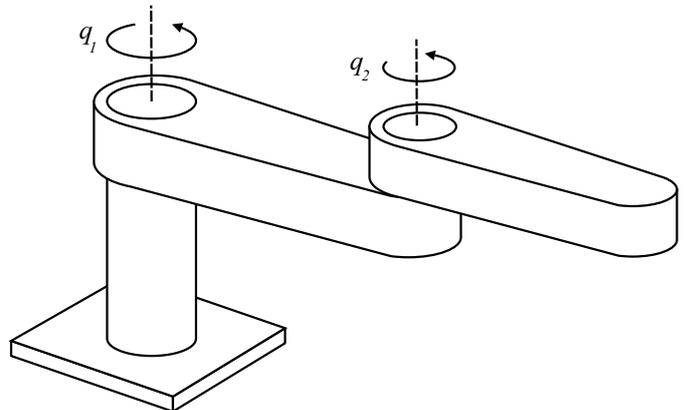


Figura 6: Esquema del mecanismo SCARA del Ejemplo 2.

Tabla 4: Parámetros del mecanismo SCARA del Ejemplo 2.

Parámetro	Símbolo	Valor
Masa del eslabón 1	m_1	9,55 kg
Masa del eslabón 2	m_2	12,12 kg
Longitud de los eslabones	l	0,33 m
Momento inercia eslabón 1	J_{m1}	$0,88 \times 10^{-4}$ kg·m ²
Momento inercia eslabón 2	J_{m2}	$1,67 \times 10^{-4}$ kg·m ²
Momento inercia motor 1	J_{HD1}	$5,45 \times 10^{-4}$ kg·m ²
Momento inercia motor 2	J_{HD2}	$2,01 \times 10^{-4}$ kg·m ²
Tasa de reducción engranes	k	0,01

La trayectoria deseada viene dada por:

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{200} \cos(6t) + \frac{1}{100} \sin(3t) + \frac{1}{10} \sin t + 0,01 \\ \frac{1}{40} \cos(3t) + \frac{1}{100} \sin(1,5t) + \frac{1}{10} \sin t \end{bmatrix}.$$

Como en el Ejemplo 1, factorizamos de acuerdo a (9)-(10) para obtener:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{M}_{(1,2)} \\ 0 & \bar{M}_{(2,2)} \end{bmatrix}, \bar{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \bar{H}_{1(1,2)} \\ 0 & \bar{H}_{1(2,2)} \end{bmatrix}, \bar{H}_2 = \begin{bmatrix} \bar{H}_{2(1,1)} & \bar{H}_{2(1,2)} \\ \bar{H}_{2(2,1)} & 0 \end{bmatrix},$$

donde, debido a la longitud de las expresiones polinomiales obtenidas, sólo dos de ellas son presentadas con fines ilustrativos:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{(2,2)} &= 0,0000055\dot{q}_{1d}q_{2d}^3 + 0,0000055\dot{q}_{1d}q_{2d}^2q_{2d} + 0,0000055\dot{q}_{1d}q_{2d}q_{2d}^2 \\ &- 0,0000659934\dot{q}_{1d}q_{2d} + 0,0000055\dot{q}_{1d}q_{2d}^3 - 0,0000659934\dot{q}_{1d}q_{2d}, \\ \bar{H}_{2(2,1)} &= 0,01319868\dot{q}_{1d}q_{2d} + 0,01319868\dot{q}_{1d}q_{2d} - 0,00219978\dot{q}_{1d}q_{2d}^3 \\ &+ 0,000109989\dot{q}_{1d}q_{2d}^5 - 0,00219978\dot{q}_{1d}q_{2d}^3 + 0,000109989\dot{q}_{1d}q_{2d}^5. \end{aligned}$$

Las cotas $q_1, q_{1d}, \hat{q}_1, q_2, q_{2d}, \hat{q}_2 \in [-\pi/6, \pi/6]$, $\dot{q}_1, \dot{q}_{1d}, \hat{\dot{q}}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_{2d}, \hat{\dot{q}}_2 \in [-0,5, 0,5]$, $\ddot{q}_{1d}, \ddot{q}_{2d} \in [-1, 1]$, determinan las cotas listadas en la Tabla 5-6 para las expresiones no lineales en \bar{M} , \bar{H}_1 , y \bar{H}_2 .

Tabla 5: No linealidades y sus cotas para el controlador del Ejemplo 2.

$z_i(q_a)/\zeta_j(\bar{q})$	z_i^0/ζ_j^0	z_i^1/ζ_j^1
$z_1(q_a) = \bar{H}_{1(1,2)}$	-0,0066	0,0008
$z_2(q_a) = \bar{H}_{1(2,2)}$	0	0,0033
$\zeta_1(\bar{q}) = \bar{H}_{2(1,1)}$	-0,0033	0,0033
$\zeta_2(\bar{q}) = \bar{H}_{2(1,2)}$	-0,0099	0,0099
$\zeta_3(\bar{q}) = \bar{H}_{2(2,1)}$	-0,0066	0,0066
$z_3(q_a) = \bar{M}_{(1,1)}$	0,0012	0,0013
$z_4(q_a) = \bar{M}_{(1,2)}$	$0,2463 \times 10^{-3}$	$0,2640 \times 10^{-3}$

Tabla 6: No linealidades y sus cotas para el observador del Ejemplo 2.

$z_i(q_a)/\zeta_j(\bar{q})$	z_i^0/ζ_j^0	z_i^1/ζ_j^1
$z_1(q_a) = \bar{H}_{1(1,2)}$	-0,0066	0,0008
$z_2(q_a) = \bar{H}_{1(2,2)}$	0	0,0033
$\zeta_1(\bar{q}) = \bar{H}_{2(1,1)}$	-0,0033	0,0033
$\zeta_2(\bar{q}) = \bar{H}_{2(1,2)}$	-0,0099	0,0099
$\zeta_3(\bar{q}) = \bar{H}_{2(2,1)}$	-0,0066	0,0066
$z_3(q_a) = 1/\det M(q)$	$1,7769 \times 10^6$	$1,8047 \times 10^6$
$z_4(q_a) = -\bar{M}_{(1,2)}$	$-0,2640 \times 10^{-3}$	$-0,2463 \times 10^{-3}$
$z_5(q_a) = \bar{M}_{(1,1)}$	0,0012	0,0013

Algunas de las 2⁴ ganancias del controlador obtenidas por medio de las LMIs del Teorema 1 (adaptadas para \dot{q} no medible) son

$$\begin{aligned} \bar{F}_{1(0000)} &= \begin{bmatrix} -0,4901 & -0,0066 \\ 0 & -0,4901 \end{bmatrix}, \bar{F}_{1(1111)} = \begin{bmatrix} -0,4901 & 0,0008 \\ 0 & -0,4868 \end{bmatrix}, \\ \bar{F}_{2(0000)} &= \begin{bmatrix} -0,7377 & -0,0001 \\ -0,0001 & -0,7373 \end{bmatrix}, \bar{F}_{2(1111)} = \begin{bmatrix} -0,7377 & -0,0001 \\ -0,0001 & -0,7373 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

y algunas de las 2⁵ ganancias del observador obtenidas por medio de las LMIs del Teorema 2 son $L_{1(00000)} = L_{1(101010)} = \text{diag}(-1,3303, -1,3303)$, $L_{2(00000)} = L_{2(101010)} = \text{diag}(-1,6639, -1,6639)$.

A fin de probar la robustez del esquema, la señal de ruido $w(t) = [w_1(t) \ w_2(t) \ w_3(t) \ w_4(t)]^T (\mathcal{U}(t-8) - \mathcal{U}(t-12))$ donde $w_1(t) = w_2(t) = 0,05r(t) + 0,2 \sin(10t)$ y $w_3(t) = w_4(t) = 0,1r(t) + 0,2 \sin(20t)$, $r(t)$ es una función aleatoria con distribución gaussiana (mediana 0, varianza 1) y $\mathcal{U}(t)$ es el escalon unitario, fue añadida a $[q^T \ \dot{q}^T]^T$. Asimismo, una ley de control por par calculado tradicional (que asume q y \dot{q} medibles), fue implementado para hacer comparaciones; sus ganancias en (5) son $F_1 = \text{diag}(-15, -8)$ y $F_2 = \text{diag}(-12, -7)$, que fijan los polos del sistema del error de seguimiento en -5, -4, -3, y -3. Naturalmente, este esquema también se somete a la señal ruidosa arriba dada.

Los resultados de simulación se muestran en la Figura 7 bajo condiciones iniciales $q_1(0) = q_2(0) = 0,2$, $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0,4$, $\hat{q}_1(0) = \hat{q}_2(0) = 0,1$ y $\hat{\dot{q}}_1(0) = \hat{\dot{q}}_2(0) = 0$. Para mostrar el efecto del ruido, la Figura 8 muestra el error cuadrático cuando la señal de ruido es distinta de 0. En ambas figuras nuestra propuesta se desempeña mejor que el par calculado tradicional a pesar de que está basada en un estimado de \dot{q} ; esto se explica por dos hechos: (a) $\tau(t)$ sólo depende de señales generadas por el usuario que no están contaminadas de ruido y (b) las no linealidades medibles del sistema son empleadas para fines de control.

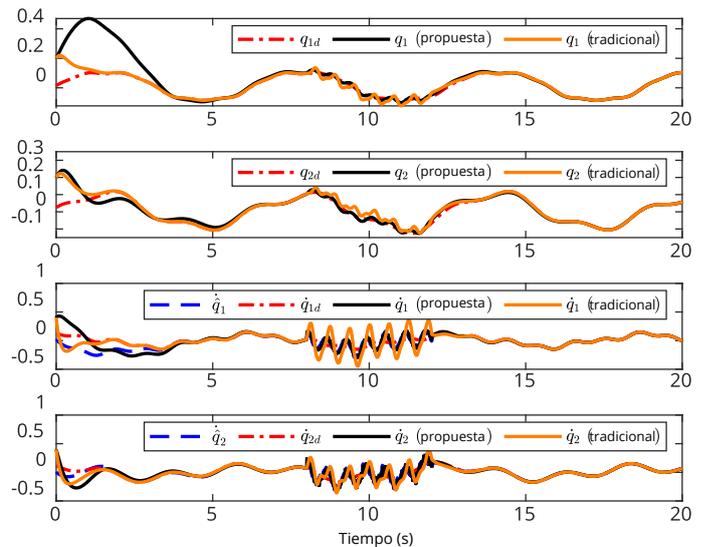


Figura 7: Comparación del seguimiento de trayectoria por par calculado tradicional y por par calculado propuesto basado en observación en el Ejemplo 2.

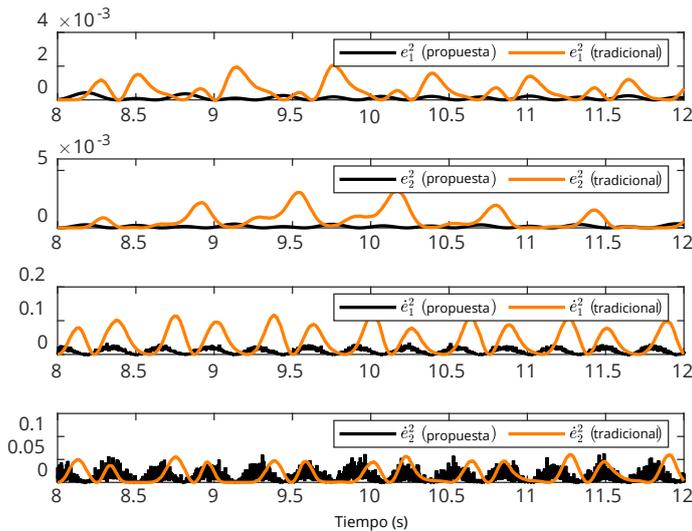


Figura 8: Comparación de los errores cuadráticos de seguimiento de trayectoria bajo ruido por par calculado tradicional y por par calculado propuesto basado en observación en el Ejemplo 2.

En la Tabla 7 se comparan las integrales del error cuadrático de seguimiento: la propuesta tiene mejor rendimiento que el enfoque tradicional.

Tabla 7: Comparación de la integral de los errores cuadráticos en el Ejemplo 2.

Integral del error	Par tradicional	Par propuesto
e_1	$2,72 \times 10^{-3}$	$4,8 \times 10^{-4}$
e_2	$3,4 \times 10^{-3}$	4×10^{-4}
\dot{e}_1	0,176	0,0329
\dot{e}_2	5,6	0,767

En las figuras 9 y 10 se comparan las señales de control: la propuesta consume menos energía que el enfoque tradicional.

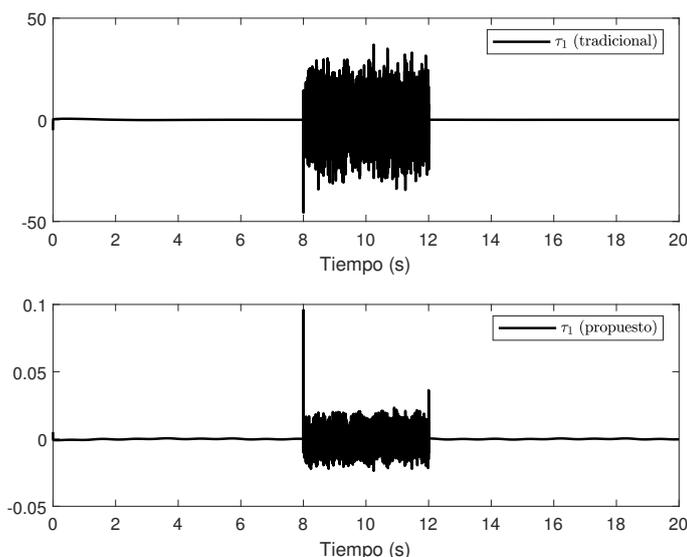


Figura 9: Comparación de las señales de control $\tau_1(t)$ por par calculado tradicional (arriba) y por par calculado propuesto basado en observación (abajo) en el Ejemplo 2.

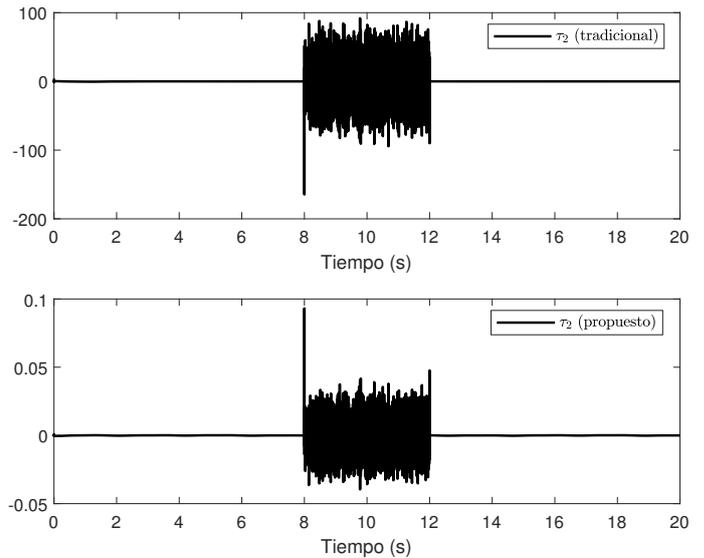


Figura 10: Comparación de las señales de control $\tau_2(t)$ por par calculado tradicional (arriba) y por par calculado propuesto basado en observación (abajo) en el Ejemplo 2.

Ejemplo 3. El bien conocido péndulo de Furuta se ilustra en la Figura 11; consiste en un eslabón horizontal que rota movido por un motor de CD y un eslabón vertical sujeto a la punta del primero y que se mueve libremente. Los ángulos q_1 y q_2 , medidos en radianes por encoders, son las únicas señales medibles para control. El modelo dinámico de la planta en forma Lagrange-Euler es (Iwashiro et al., 1996):

$$\begin{bmatrix} J_{m_1} + m_1 l_1^2 + m_2(L_1^2 + l_2^2 \sin^2 q_2) & -m_2 L_1 l_2 \cos q_2 \\ -m_2 L_1 l_2 \cos q_2 & J_{m_2} + m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m_2 l_2^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2 \cos q_2 + m_2 L_1 l_2 \dot{q}_2 \sin q_2 \\ -m_2 l_2^2 \dot{q}_1^2 \sin q_2 \cos q_2 + m_2 l_2 g \cos q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde la única entrada $\tau(t)$ es el par que se aplica al eslabón horizontal. La Tabla 8 presenta los parámetros proporcionados por el fabricante Quanser Consulting Inc. (Quanser, 2006).

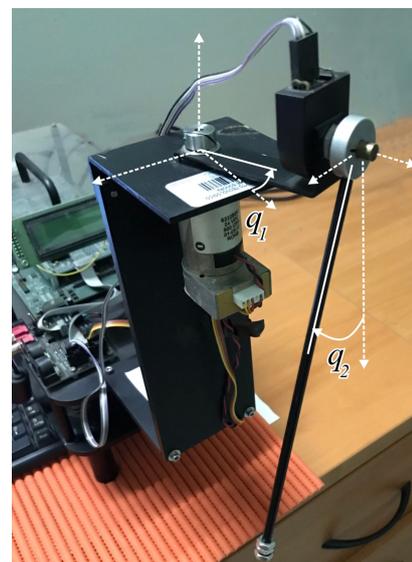


Figura 11: Péndulo de Furuta del Ejemplo 3.

Tabla 8: Parámetros del péndulo de Furuta del Ejemplo 3.

Parámetro	Símbolo	Valor
Masa del eslabón 1	m_1	0,0451 kg
Masa del eslabón 2	m_2	0,0239 kg
Longitud del eslabón 1	L_1	0,068 m
Distancia centro de masa 1	l_1	0,0340 m
Distancia centro de masa 2	l_2	0,0822 m
Momento inercia eslabón 1	J_{m1}	$3,2929 \times 10^{-5}$ k
Momento inercia eslabón 2	J_{m2}	$1,8281 \times 10^{-4}$ k
Gravedad	g	$9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

El objetivo de control es hacer que el eslabón actuado sea una senoïdal mientras el eslabón vertical actúa como perturbación. Si se ignora el segundo eslabón el modelo nominal reduce a $(J_{m1} + m_1 l_1^2) \ddot{q}_1(t) = \tau(t)$, que no requiere modelo convexo pues consta de 1 solo vértice. Las LMIs del Teorema 1 producen las ganancias $\bar{F}_1 = -0,0101$ y $\bar{F}_2 = -0,0104$, cuya implementación práctica es sólo una suma ponderada de dos términos.

Para el observador se considera el compacto $q_2, \hat{q}_2 \in [-0,3491, 0,3491]$, $\dot{q}_1, \hat{q}_1, \dot{q}_2, \hat{q}_2 \in [-1,5, 1,5]$, que induce las cotas de la Tabla 9, correspondientes a las expresiones que aparecen tras la factorización (20).

Tabla 9: No linealidades y sus cotas para el péndulo de Furuta del Ejemplo 3.

$z_i(q_a)/\zeta_j(\tilde{q})$	z_i^0/ζ_j^0	z_i^1/ζ_j^1
$z_1(q_a) = \bar{H}_{1(1,2)}$	-0,0004	0,0010
$z_2(q_a) = \bar{H}_{1(2,2)}$	0,0178	0,0193
$\zeta_1(\tilde{q}) = \bar{H}_{2(1,1)}$	$-0,1557 \times 10^{-3}$	$0,1557 \times 10^{-3}$
$\zeta_2(\tilde{q}) = \bar{H}_{2(1,2)}$	$-0,2928 \times 10^{-3}$	$0,2928 \times 10^{-3}$
$\zeta_3(\tilde{q}) = \bar{H}_{2(2,1)}$	$-0,1557 \times 10^{-3}$	$0,1557 \times 10^{-3}$
$z_3(q_a) = M_{(1,1)}$	$0,1955 \times 10^{-3}$	$0,2144 \times 10^{-3}$
$z_4(q_a) = M_{(1,2)}$	$-0,1336 \times 10^{-3}$	$-0,1255 \times 10^{-3}$
$z_5(q_a) = 1/\det M(q)$	$1,7228 \times 10^7$	$2,0220 \times 10^7$

Las LMIs en el Teorema 2 producen 2^5 ganancias del observador; algunas de ellas son:

$$L_{1(00000)} = \begin{bmatrix} -29,52 & 24,75 \\ -44,11 & -12,23 \end{bmatrix}, L_{1(11111)} = \begin{bmatrix} -10,87 & 793,73 \\ -857,05 & -30,46 \end{bmatrix},$$

$$L_{2(00000)} = \begin{bmatrix} -444,59 & 188,53 \\ -266,36 & -74,83 \end{bmatrix}, L_{2(11111)} = \begin{bmatrix} -1,95 & 6,68 \\ -3,40 & 1,55 \end{bmatrix} \times 10^3.$$

Recuerde que estas ganancias se ponderan con expresiones no lineales para producir un par de matrices no lineales $L_1(q_a) = \sum_{i \in \mathbb{B}^p} \mathbf{w}_i(q_a) L_{1i}$ y $L_2(q_a) = \sum_{i \in \mathbb{B}^p} \mathbf{w}_i(q_a) L_{2i}$ cuya implementación en tiempo real no requiere más que operaciones ordinarias de sumas y productos, de modo que su número no es impedimento para su implementación.

La Figura 12 muestra la evolución en tiempo real del ángulo controlado q_1 cuando $q_{1d} = -0,2 \sin(t)$ bajo dos enfoques: empleando par calculado tradicional con las velocidades angulares proporcionadas por el equipo; el segundo empleando nuestro controlador basado en observación. La señal de ruido $w(t) = 0,01r(t) + 0,01 \sin(30t)$ fue sumada a $q_1(t)$ en ambos experimentos desde $t = 5$ hasta $t = 10$. Las condiciones iniciales fueron $q_1(0) = 0,7$ y 0 para el resto de señales. Los resultados confirman que nuestra propuesta es más robusta que

la tradicional al ser menos sensible al ruido por las razones ya explicadas.

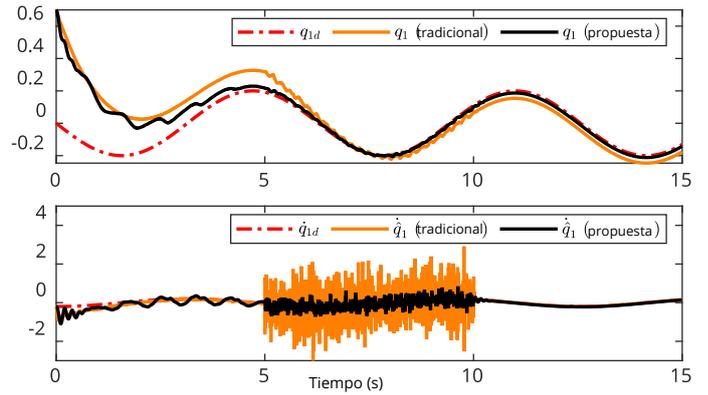


Figura 12: Comparación del seguimiento de trayectoria en tiempo real por par calculado tradicional y par calculado propuesto basado en observación en el Ejemplo 3.

7. Conclusiones

Se ha presentado una nueva metodología de diseño de controladores basados en observación para plantas en la forma Lagrange-Euler. Ha quedado demostrado que la propuesta puede tener un mejor desempeño que la técnica de par calculado tradicional al hacer que el bucle interno de control dependa enteramente de señales generadas por el usuario mientras el bucle externo depende en forma no lineal de las señales medibles y las velocidades estimadas por un observador no lineal. Ha quedado demostrada la ventaja en sistematicidad e implementabilidad numérica de expresar las condiciones de diseño en forma de desigualdades matriciales lineales, garantizando convergencia asintótica a 0 del error de seguimiento de trayectoria y del error de estimación por medio del método directo de Lyapunov. Se han proporcionado ejemplos que ilustran las ventajas de la metodología propuesta, tanto en simulación como en tiempo real, especialmente desde el punto de vista de la robustez que permite un menor gasto de energía y menor sensibilidad al ruido gracias a un menor uso de las señales medidas de la planta: a mayor número de no linealidades sustituidas, mayor beneficio en estos rubros. La propuesta padece las siguientes limitaciones: la reescritura convexa de expresiones no lineales así como la factorización de señales del error no es única; la factibilidad de las LMIs depende de las reescrituras referidas, la región de interés y las relajaciones de suma convexa; requiere realizar más pasos que la metodología tradicional.

Agradecimientos

Este trabajo estuvo financiado por el CONACYT por medio de la beca 756168 y por el Proyecto CA ITSON PROFAPI 2021.

Referencias

Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E., Belakrishnan, V., 1994. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Vol. 15. SIAM: Studies In Applied Mathematics, Philadelphia, USA.

- Canudas Wit, C. D., Åström, K. J., Fixot, N., 1990. Computed torque control via a non-linear observer. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 4 (6), 443–452.
- Charlet, B., Lévine, J., Marino, R., 1989. On dynamic feedback linearization. *Systems & Control Letters* 13 (2), 143–151.
- Chen, C. T., 1984. *Linear System Theory and Design*. Saunders College Publishing, New York, USA.
- Corless, M., Leitmann, G., 1981. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 26 (5), 1139–1144.
- Craig, J. J., 2005. *Introduction to robotics: mechanics and control*, 3/E. Pearson Education International.
- Díaz, J. A., Bernal, M., 2019. A novel LMI computed-torque technique for stabilization of underactuated systems. In: *Congreso Nacional de Control Automatico*. pp. 797–802.
- Díaz, J. A., Ibarra, J., Bernal, M., 2020. Improving robustness of computed-torque schemes via LMI-based nonlinear feedback. In: *2020 17th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*. IEEE, pp. 1–6.
- Duan, G., Yu, H., 2013. *LMIs in Control Systems: Analysis, Design and Applications*. CRC Press, Boca Raton, Florida.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J., Chilali, M., 1995. *LMI Control Toolbox*. Math Works, Natick, USA.
- Guerra, T. M., Bernal, M., Kruszewski, A., Afroun, M., 2007. A way to improve results for the stabilization of continuous-time fuzzy descriptor models. In: *46th IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 5960–5964.
- Hagenmeyer, V., Delaleau, E., 2003. Exact feedforward linearization based on differential flatness. *International Journal of Control* 76 (6), 537–556.
- Han, S., Wang, H., Tian, Y., Christov, N., 2020. Time-delay estimation based computed torque control with robust adaptive RBF neural network compensator for a rehabilitation exoskeleton. *ISA transactions* 97, 171–181.
- Isidori, A., 1995. *Nonlinear Control Systems*, 3rd Edition. Springer, London.
- Iwashiro, M., Furuta, K., Astrom, K. J., 1996. Energy based control of pendulum. In: *Proceeding of the 1996 IEEE International Conference on Control Applications IEEE International Conference on Control Applications held together with IEEE International Symposium on Intelligent Control*. IEEE, pp. 715–720.
- Khalil, H., 2014. *Nonlinear Control*. Prentice Hall, New Jersey, USA.
- Khalil, H. K., 1981. Asymptotic stability of nonlinear multiparameter singularly perturbed systems. *Automatica* 17 (6), 797–804.
- Lee, C., Chen, M., 1983. A suboptimal control design for mechanical manipulators. In: *1983 American Control Conference*. IEEE, pp. 1056–1061.
- Lendek, Z., Guerra, T., Babuška, R., De-Schutter, B., 2010. *Stability Analysis and Nonlinear Observer Design Using Takagi-Sugeno Fuzzy Models*. Springer-Verlag, Netherlands.
- Lewis, F., Dawson, D., Abdallah, C., 2003. *Robot manipulator control: theory and practice*. CRC Press.
- Lewis, F. L., 1992. *Applied optimal control and estimation*. Prentice Hall PTR.
- Marion, J. B., 1965. *Classical dynamics*. Academic Press.
- Merat, F., 1987. Introduction to robotics: Mechanics and control. *IEEE Journal on Robotics and Automation* 3 (2), 166–166.
- Mohammed, R. H., Elnaghi, B. E., Bendary, F. A., Elserfi, K., 2018. Trajectory tracking control and robustness analysis of a robotic manipulator using advanced control techniques. *Int. J. Eng. Manuf.(IJEM)* 8 (6), 42–54.
- Nunes, E. V., Hsu, L., 2010. Global tracking for robot manipulators using a simple causal PD controller plus feedforward. *Robotica* 28 (1), 23–34.
- Oliveira, M., Skelton, R., 2001. Stability tests for constrained linear systems. In: *Perspectives in robust control*. Vol. 268 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, pp. 241–257.
- Palli, G., Melchiorri, C., De Luca, A., 2008. On the feedback linearization of robots with variable joint stiffness. In: *2008 IEEE international conference on robotics and automation*. IEEE, pp. 1753–1759.
- Piltan, F., Yarmahmoudi, M. H., Shamsodini, M., Mazlomian, E., Hosainpour, A., 2012. Puma-560 robot manipulator position computed torque control methods using matlab/simulink and their integration into graduate nonlinear control and matlab courses. *International Journal of Robotics and Automation* 3 (3), 167–191.
- Quanser, I., 2006. *Mechatronics Control Kit User's Manual (Instructor)*. Mathworks, inc, Natick, MA.
- Quintana, D., Estrada-Manzo, V., Bernal, M., 2021. An exact handling of the gradient for overcoming persistent problems in nonlinear observer design via convex optimization techniques. *Fuzzy Sets and Systems* 416, 125–140.
- Santos, L., Cortesão, R., 2018. Computed-torque control for robotic-assisted tele-echography based on perceived stiffness estimation. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering* 15 (3), 1337–1354.
- Shin, K., McKay, N., 1985. Minimum-time control of robotic manipulators with geometric path constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control* 30 (6), 531–541.
- Sturm, J., 1999. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software* 11-12, 625–653.
- Tanaka, K., Wang, H., 2001. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons, New York.
- Taniguchi, T., Tanaka, K., Wang, H., 2001. Model construction, rule reduction and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 9 (2), 525–537.
- Visioli, A., Legnani, G., 2002. On the trajectory tracking control of industrial scara robot manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 49 (1), 224–232.
- Xie, X., Yue, D., Ma, T., Zhu, X., 2014. Further studies on control synthesis of discrete-time TS fuzzy systems via augmented multi-indexed matrix approach. *IEEE Transactions on Cybernetics* 44 (12), 2784–2791.