

## Control de posición utilizando un servomotor inteligente en modo voltaje y considerando fricción: Tutorial

Eusebio Bugarin\*, Ana Yaveni Aguilar-Bustos

*Tecnológico Nacional de México / IT de Ensenada, Blvd. Tecnológico No. 150, Ex-ejido Chapultepec, C.P. 22780, Ensenada, B.C., México.*

**To cite this article:** Bugarin, E., Aguilar-Bustos, A. Y. 2025. Position control using an intelligent servomotor in voltage mode and considering friction: Tutorial. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 22, 1-12. <https://doi.org/10.4995/riai.2024.21102>

### Resumen

El presente artículo, a manera de tutorial, detalla el análisis del control de posición de un servomotor inteligente que ha sido modificado para poder programarle su acción de control en modo voltaje. Es importante destacar que el análisis realizado considera la fricción (inherente a todo sistema mecánico). El servomotor inteligente, objeto de estudio, es el Dynamixel AX-12 de la empresa coreana Robotis; un servomotor muy utilizado para el diseño y construcción de robots avanzados con aplicaciones de entretenimiento y de investigación. Primero se estudian tanto los modelos estáticos como dinámicos de fricción. Luego, basándose en el análisis teórico, se muestra un procedimiento bastante accesible para estimar todos los parámetros del servomotor. Posteriormente, utilizándose la Teoría de Estabilidad de Lyapunov, se realiza un análisis riguroso de la acción proporcional en el control de posición del sistema robótico. Finalmente, se diseña un control con observador de perturbaciones, que no necesita de la medición de la velocidad, para llevar asintóticamente el error de posición a cero. Cada simulación es comparada con experimentos satisfactorios de tiempo real con un periodo de muestreo constante de 0.001 (s).

*Palabras clave:* Control de robots, sistemas no lineales, métodos de Lyapunov, diseño de observadores, identificación y modelado, fricción.

### Position control using an intelligent servomotor in voltage mode and considering friction: Tutorial

#### Abstract

This article, as a tutorial, details the analysis of the position control of an intelligent servomotor that has been modified to be able to program its control action in voltage mode. It is important to highlight that the analysis carried out considers the friction (inherent in all mechanical system). The intelligent servomotor, object of study, is the Dynamixel AX-12 from the Korean company Robotis; a servomotor widely used for the design and construction of advanced robots with entertainment and research applications. First, both static and dynamic friction models are studied. Then, based on the theoretical analysis, a fairly accessible procedure is shown to estimate all the servomotor parameters. Subsequently, using Lyapunov's Stability Theory, a rigorous analysis of the proportional action in the position control of the robotic system is carried out. Finally, a control with disturbance observer is designed, which does not require velocity measurements, to asymptotically lead the position error to zero. Each simulation is compared to satisfactory real-time experiments with a constant sampling period of 0.001 (s).

*Keywords:* Robot control, non-linear systems, Lyapunov methods, observer design, identification and modelling, friction.

### 1. Introducción

La Robótica tiene gran auge hoy en día, ya sea en sus aplicaciones industriales o en otras encomiendas de campo o de servicios. Sciavicco y Siciliano (2009) detallan una clasificación para la Robótica que comprende dos grandes

áreas: la Robótica Industrial y la Robótica Avanzada. La primera se encarga de estudiar fundamentalmente a los brazos robóticos; actualmente con diseños muy sofisticados y con desempeños muy sorprendentes, sobre todo precisamente en tareas industriales (nótese que para lograr estos desempeños sorprendentes todavía es necesario estructurar en buena

\*Autor para correspondencia: ebugarin@ite.edu.mx

Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

medida el espacio de trabajo de dichos robots). Y la segunda es la que engloba al resto de los robots; es decir, la Robótica Avanzada es quien aborda a los robots de campo (con aplicaciones en minas, exploración interplanetaria, agricultura, etc.) y a los robots de servicio (guías de museo, asistentes médicos, auxiliares domésticos, etc.). Evidentemente un robot avanzado requiere de una mayor autonomía al operar o trabajar en ambientes difíciles de estructurar.

Por supuesto, las aplicaciones de robots avanzados son las que recientemente están llamando más la atención; tanto en el ámbito comercial como en los ámbitos de investigación, educación y de entretenimiento. De hecho, en vista de lo anterior, ha habido muchos avances tecnológicos para facilitar su diseño y construcción. Uno de ellos es el desarrollo de servomotores inteligentes, los cuales integran en una sola unidad a todo un sistema de control e instrumentación. Estos servomotores están compuestos, básicamente, de un sistema de cómputo, un actuador, una transmisión para el movimiento y diversos sensores para su sistema interno de control o para su monitoreo y seguridad; y sólo es necesario realizarles conexiones de alimentación de energía y de señalización (comunicación bidireccional de datos para su monitoreo y consignas de control). Si el servomotor es lo suficientemente sofisticado aceptará consignas de control en modo posición, velocidad o par (lo típico es aceptar sólo consignas de control en modo posición). Sin embargo, al ser estos servomotores sistemas cerrados, no es posible modificarles a placer sus estrategias de control (lo cual, dependiendo de la aplicación, pudiera verse como una desventaja).

En este artículo, el objeto de estudio es precisamente un servomotor inteligente; de hecho uno con la particularidad de ser de bajo costo: el servomotor Dynamixel AX-12 de la empresa coreana Robotis (ver Figura 1). Los servomotores Dynamixel son muy utilizados en proyectos de robots para el entretenimiento, pero también para robots en la investigación (Iqbal *et al.*, 2020; Kusnerova *et al.*, 2020; Singh *et al.*, 2020; Oh y Kim, 2021; Arena *et al.*, 2022; Fereidouni *et al.*, 2022; Shirai *et al.*, 2022; Tsai *et al.*, 2022; Zyhowski *et al.*, 2022; Constantin *et al.*, 2023). En Thai (2017) se detallan, no sólo a estos servomotores, sino también más accesorios y componentes Robotis para cursos de ingeniería en Robótica.

En particular, el servomotor AX-12 se compone (básicamente) de un motor eléctrico de corriente directa de imanes permanentes (CDIP), un tren de engranes para la transmisión del movimiento angular, un potenciómetro para medir la posición de su eje de carga y un sistema de cómputo basado en el microcontrolador Atmega8 (ver Figura 3). Su protocolo original de comunicación es a través de un puerto serial UART (Universal Asynchronous Receiver Transmitter) en modo semi-dúplex; es decir, puede enviar y recibir información por un solo canal (pero no simultáneamente, lo cual no es favorable para una comunicación de datos rápida). En la búsqueda de utilizar a este servomotor en sistemas robóticos embebidos de tiempo real (y con altas velocidades de transmisión de datos), en Sánchez-García *et al.* (2023) se reporta una modificación que se le realizó, tanto en su hardware como en su software, para abrir la posibilidad de programarle leyes de control a placer e incrementar su velocidad de transmisión de datos; ahora por protocolo SPI (Serial Peripheral Interface). El rediseño fue sustancial debido

a que se logró mejorar en un factor de 10 dicha velocidad de transmisión de datos, toda vez que sometido el servomotor a experimentos de tiempo real utilizando un controlador proporcional-derivativo con prealimentación (Bugarin *et al.*, 2014) para el seguimiento de trayectoria (posición deseada variable en el tiempo) el servomotor original operó satisfactoriamente con un periodo de muestreo constante de tan sólo 0.01 (s); en tanto que el servomotor mejorado alcanzó 0.001 (s).



Figura 1: Servomotor inteligente Dynamixel AX-12. Adaptado con permiso de [https://en.robotis.com/shop\\_en/largeimage.php?it\\_id=902-0003-001&no=1](https://en.robotis.com/shop_en/largeimage.php?it_id=902-0003-001&no=1) por Robotis América.

De esta forma, este artículo, utilizando como objeto de estudio al servomotor Dynamixel AX-12, tiene el siguiente

**OBJETIVO:** A manera de tutorial detallar el modelado, identificación de parámetros y análisis del control de posición (con posición deseada constante; esto es, regulación) de un servomotor con motor eléctrico de CDIP considerando la fricción.

Debe hacerse notar que la fricción siempre está presente en todo mecanismo; sin embargo, en numerosos trabajos científicos este fenómeno simplemente se desprecia. Debido a que a este servomotor modificado se le pueden programar leyes de control a placer, el análisis y experimentación de su control de posición se realizará en modo voltaje (su modo habitual, al poseer un motor eléctrico de corriente directa).

En este sentido, primero se estudiarán diferentes modelos de fricción (tanto estáticos como dinámicos). Luego se describirá, basados en el análisis teórico, un procedimiento bastante accesible para la estimación de todos los parámetros (eléctricos y mecánicos) del modelo del servomotor con fricción. Posteriormente, observándose que este sistema robótico con fricción modelada es un sistema de control no lineal, se utilizará la Teoría de Estabilidad de Lyapunov (ver por ejemplo, Khalil (2002)) para analizar rigurosamente los efectos de la acción de control proporcional en su control de posición. Finalmente, se describirá el diseño de un controlador de posición con observador de perturbaciones, que no necesita de mediciones de velocidad, para reducir (o eliminar para cuestiones prácticas) el efecto de la fricción; lográndose entonces llevar asintóticamente el error de posición a cero. También se destaca que los resultados serán simulados y comparados con experimentos satisfactorios de tiempo real que se ejecutarán con un periodo de muestreo constante de 0.001 (s). Por supuesto, es importante mencionar que los resultados aquí obtenidos se pueden extender a servomotores más sofisticados.

## 2. Modelos de fricción

Como se ha mencionado, la fricción juega un papel muy importante en todo control de movimiento de mecanismos. Lo anterior debido principalmente a que la fricción es una fuerza de oposición al movimiento que siempre existe al deslizarse o interactuar dos cuerpos en contacto. De hecho, la fricción es en gran medida la responsable de generar errores en estado estacionario, fenómenos de amarre-deslizamiento (stick-slip) y ciclos límite (Armstrong-Hélouvy *et al.*, 1994; Canudas de Wit *et al.*, 1995; Swevers *et al.*, 2000). De esta manera es que se torna significativo contar con un buen modelo de este fenómeno tan complejo; permitiendo estar en posibilidades para realizar análisis, propuestas y garantías rigurosas sobre el cumplimiento de objetivos de control de movimiento en sistemas robóticos con fricción considerada.

Las observaciones experimentales indican que la fricción se compone de dos regímenes (Swevers *et al.*, 2000): el régimen de predeslizamiento y el régimen de deslizamiento. El régimen de predeslizamiento es atribuido básicamente a las asperezas existentes entre las superficies de contacto. De manera que, antes del deslizamiento, existen fuerzas adhesivas entre las superficies de contacto generadas por las deformaciones de las uniones de dichas asperezas (comportándose como resortes no lineales). Dichas uniones van desapareciendo en la medida que la fuerza o par aplicado para el movimiento se incrementa. Esto permite esbozar que, en este régimen, la fricción debe estar también en función del desplazamiento relativo. Por otro lado, en el régimen de deslizamiento entonces las fuerzas adhesivas desaparecen, estando la fricción en función de la velocidad relativa entre las superficies de contacto.

Para modelar estos fenómenos de la fricción existen modelos estáticos (sin memoria) y modelos dinámicos (con memoria o expresados en variables de estado). Uno que pertenece al primer tipo es el descrito por Armstrong-Hélouvy *et al.* (1994), el cual detalla que la fuerza de fricción  $f(\dot{q})$  se modela mediante (ver Figura 2):

$$f(\dot{q}) = f_c \text{sign}(\dot{q}) + f_v \dot{q} + (f_s - f_c) e^{-\left(\frac{\dot{q}}{v_s}\right)^2} \text{sign}(\dot{q}) \quad (1)$$

donde  $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$  es la velocidad relativa existente entre las superficies de contacto (la derivada con respecto al tiempo de la posición relativa  $q$ ). Cada término de la derecha de esta ecuación está asociado a diversos efectos bastante estudiados; es decir, en orden también hacia la derecha: la fricción de Coulomb, la fricción viscosa y la fricción estática junto con el efecto Stribeck. De esta manera,  $f_c > 0$  es el coeficiente de fricción de Coulomb,  $f_v > 0$  el coeficiente de fricción viscosa,  $f_s > 0$  el coeficiente de fricción estática,  $v_s > 0$  el coeficiente de velocidad de Stribeck y

$$\text{sign}(\dot{q}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \dot{q} > 0 \\ 0, & \text{si } \dot{q} = 0; \\ -1, & \text{si } \dot{q} < 0 \end{cases} \quad (2)$$

correspondiendo esta última definición con la clásica para la función “signo” (en contraste con otras definiciones, como por ejemplo, en el sentido de Filippov (1988); la cual es utilizada bajo la teoría de inclusiones diferenciales, lo que está fuera del alcance del presente artículo).

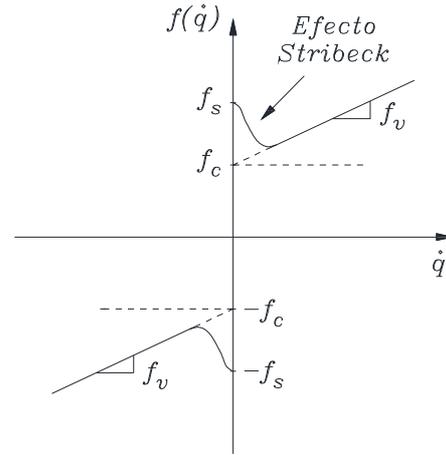


Figura 2: Modelo estático de fricción.

Nótese que  $f_s > f_c$ . Ahora bien, conceptualmente en este modelo: la fricción estática corresponde con la fuerza que se necesita vencer para iniciar el movimiento relativo entre las superficies de contacto; la fricción de Coulomb corresponde con la fuerza que se opone al ya establecerse el movimiento; el efecto Stribeck ocurre a bajas velocidades; y la fricción viscosa corresponde con la fuerza de oposición debida a la existencia de algún fluido (aire, lubricante, etc.). Generalmente se utilizan modelos reducidos de (1), dependiendo de la aplicación, que absorban las componentes más importantes para ello; como lo es considerar sólo la fricción de Coulomb o incluir fricción de Coulomb y fricción viscosa. Es de observarse que el régimen de predeslizamiento de la fricción no es prácticamente considerado por este modelo estático.

Por otro lado, los modelos dinámicos son más complejos pero intentan considerar ambos regímenes del fenómeno de fricción. Canudas de Wit *et al.* (1995) proponen el siguiente modelo, denominado LuGre, bastante aceptado por la comunidad de la Robótica:

$$\begin{aligned} f(\dot{q}, z, \dot{z}) &= \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + f_v \dot{q} \\ \dot{z} &= \dot{q} - \frac{|\dot{q}|}{g(\dot{q})} z \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $z$  es una variable de estado interna (prácticamente inmedible y generalmente asociada al promedio de las deformaciones de las asperezas existentes entre las superficies de contacto),  $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ ,  $\sigma_0 > 0$  el coeficiente de rigidez para la relación fuerza-posición en el régimen de predeslizamiento,  $\sigma_1 > 0$  el coeficiente de fricción microviscosa y

$$0 < \frac{f_c}{\sigma_0} < g(\dot{q}) = \frac{f_c + (f_s - f_c) e^{-\left(\frac{\dot{q}}{v_s}\right)^2}}{\sigma_0} < \frac{f_s}{\sigma_0} \quad (4)$$

Este modelo generaliza (ver Canudas de Wit *et al.* (1995)) al modelo de Dahl (1968), si

$$g(\dot{q}) = \frac{f_c}{\sigma_0} \quad (5)$$

y  $\sigma_1 = 0$ . Este modelo de Dahl también es bastante utilizado,

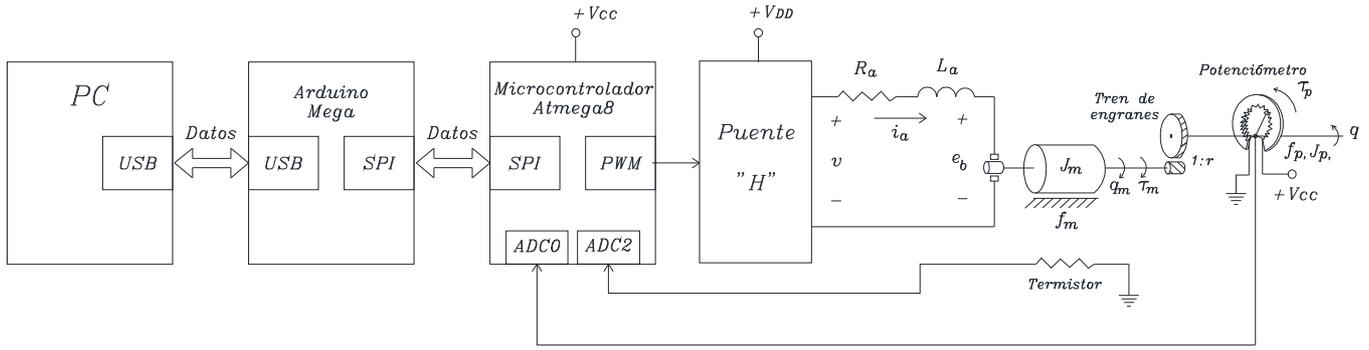


Figura 3: Diagrama a bloques de la plataforma de experimentación: Computadora Personal (PC), sistema de cómputo supervisor (Arduino Mega) y servomotor Dynamixel AX-12.

pero no considera la fricción estática y el efecto Stribeck. Expresándose entonces de la siguiente manera dicho modelo:

$$f(\dot{q}, z) = \sigma_0 z + f_v \dot{q}$$

$$\dot{z} = \dot{q} - \frac{\sigma_0}{f_c} |\dot{q}| z. \tag{6}$$

Nótese que en el equilibrio para la ecuación de estado interna de la fricción (es decir,  $\dot{z} = 0$ ) y si  $\dot{q}$  es igual a una constante diferente de cero, entonces el modelo de LuGre reproduce a (1) y el modelo de Dahl también a (1) pero con sólo la fricción de Coulomb y viscosa consideradas.

Existen otros modelos de fricción; como el Burridge-Knopoff (1967) o el Bliman-Sorine (1993). Sin embargo, los ya descritos son los más comúnmente utilizados por la comunidad de la Robótica.

### 3. Modelado e identificación de parámetros

El diagrama a bloques del servomotor Dynamixel AX-12, objeto de estudio, puede verse a la derecha de la Figura 3. Como se mencionó y se puede observar en la figura, éste está compuesto básicamente por un motor de corriente directa, un tren de engranes con relación 1:r ( $r = 254$ ), un potenciómetro para medir la posición angular  $q$  de su eje de carga y un microcontrolador Atmega8 como su sistema de cómputo. La etapa de potencia corresponde con un puente ‘H’ manejado por un canal modulador de ancho de pulso (PWM por sus siglas en inglés) y la etapa de medición es a través de un divisor de voltaje hacia un canal convertidor analógico a digital (ADC por sus siglas en inglés). Ambos canales son de 10 bits, de manera que la resolución  $n_v$  para el voltaje  $v$  aplicado al motor es (utilizándose un voltaje  $V_{DD} = 11.1$  (V) recomendado por el fabricante)

$$n_v = \frac{11.1 \text{ (V)}}{2^{10} \text{ (bit)}} = 0.0108 \left( \frac{\text{V}}{\text{bit}} \right),$$

y la resolución  $n_q$  para  $q$  es (considerando que sólo se miden ángulos entre  $\pm 150 \frac{\pi}{180}$  (rad))

$$n_q = \frac{300 \frac{\pi}{180} \text{ (rad)}}{2^{10} \text{ (bit)}} = 0.29 \frac{\pi}{180} \left( \frac{\text{rad}}{\text{bit}} \right).$$

El termistor sólo tiene propósitos de seguridad y como ya se ha descrito, el protocolo de comunicación es por SPI;

pudiéndose correr experimentos de tiempo real a una cadencia constante de 0.001 (s).

#### 3.1. Modelado

Siguiendo la metodología de Bugarin *et al.* (2014) y Kelly y Santibáñez (2003), el modelo de la parte eléctrica del motor de corriente directa sería (despreciándose la inductancia de armadura del motor  $L_a$ ):

$$v = R_a i_a + K_b \dot{q}_m \tag{7}$$

donde  $R_a$  es la resistencia de armadura,  $i_a$  la corriente de armadura,  $\dot{q}_m$  la velocidad angular del eje del motor y  $K_b \dot{q}_m = e_b$  es la fuerza contraelectromotriz (con  $K_b$  precisamente la constante de fuerza contraelectromotriz). Nótese que  $q_m = r q$ , por lo que  $\dot{q}_m = r \dot{q}$  (lo mismo sucede para la aceleración).

Por otro lado, el modelo de la parte mecánica quedaría expresado mediante

$$J_m \ddot{q}_m = \tau_m - f_m - \frac{\tau_p}{r} \tag{8}$$

$$J_p \ddot{q} = \tau_p - f_p \tag{9}$$

donde  $J_m$  es el momento de inercia del rotor del motor,  $\tau_m = K_a i_a$  es el par generado por el motor (con  $K_a$  la constante de par del motor),  $f_m$  es la fricción en el eje del motor y  $\tau_p$  es el par de carga asociado en este caso al tren de engranes y potenciómetro. Aquí se considera que el efecto de todos los engranes y el potenciómetro están incluidos en (9); por lo que  $J_p$  sería su momento de inercia y  $f_p$  su fricción.

Si de (8) se despeja  $\tau_p$  y luego esto se sustituye en (9) se obtiene

$$J \ddot{q} = r K_a i_a - r f_m - f_p \tag{10}$$

donde  $J = J_p + r^2 J_m$  es el momento de inercia referido al eje de carga del servomotor. Ahora considérense los efectos de la fricción también referidos al eje de carga del servomotor; es decir,  $f = r f_m + f_p$ . De este modo, (10) resulta

$$J \ddot{q} = r K_a i_a - f. \tag{11}$$

Finalmente, (7) y (11) representan el modelo dinámico del servomotor. Ahora bien, todas las unidades de las variables en el modelo del servomotor serán expresadas en el SI (Sistema

Internacional de Unidades); de esta manera  $K_a = K_b$  (Corke, 1996). También note que ambas ecuaciones pueden expresarse en una sola si de (11) se despeja  $i_a$  y luego este resultado se sustituye en (7), quedando

$$v = \alpha \ddot{q} + \beta \dot{q} + \gamma f \quad (12)$$

donde  $\gamma = \frac{R_a}{rK_a}$ ,  $\alpha = \gamma J$  y  $\beta = rK_a$ . Si la fricción no es considerada, (12) es una ecuación diferencial lineal que puede ser analizada mediante la teoría de control clásico o la teoría de sistemas lineales. Sin embargo, con excepción de la fricción viscosa, la fricción convierte a (12) en un sistema no lineal.

### 3.2. Consideración de la fricción y análisis en lazo abierto

Ahora, para la fricción considérense sólo los efectos más importantes que pueden ser captados por este servomotor (de relativamente baja resolución); es decir, la fricción de Coulomb y la fricción viscosa. Esto es, los primeros dos términos de (1) en su formulación estática o el modelo dinámico de Dahl (6).

Obsérvese que, si se toma en cuenta este modelo estático, el modelo (12) quedaría expresado mediante

$$v = \alpha \ddot{q} + (\beta + \gamma f_v) \dot{q} + \gamma f_c \text{sign}(\dot{q}). \quad (13)$$

El modelo (13) corresponde no sólo a un sistema no lineal sino a uno discontinuo. Considérese un análisis en lazo abierto con  $v = v_1$  (siendo  $v_1$  una constante). Si el vector de estados es  $[q \ \dot{q}]^T$ , entonces (13) expresada en variables de estado quedaría

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \frac{1}{\alpha} [v_1 - (\beta + \gamma f_v) \dot{q} - \gamma f_c \text{sign}(\dot{q})] \end{bmatrix}; \quad (14)$$

de tal suerte que sus estados de equilibrios deben ser solución de

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \frac{1}{\alpha} [v_1 - (\beta + \gamma f_v) \dot{q} - \gamma f_c \text{sign}(\dot{q})] \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Lo que implica que existe el siguiente continuo de equilibrios:  $[q \ \dot{q}]_{eq}^T = [q \ 0]^T$ ; tal que  $q \in \mathbb{R}$ . Y que se tiene la siguiente restricción:  $v_1 = \gamma f_c \text{sign}(0)$ . Pero de acuerdo con (2) entonces lo anterior sólo sería válido si  $v_1 = 0$ . Sin embargo, es bastante conocido que la fricción estática y la fricción de Coulomb provocan que también para ciertos valores “pequeños” de voltaje aplicado (no sólo cero) el eje del motor no se mueva (es decir, que  $\dot{q} = 0$ ); lo cual contradice dicha restricción.

Por otro lado, si se realiza el siguiente cambio de variables:  $\omega = \dot{q}$  (con  $\omega$  la velocidad angular), entonces (13) resulta

$$v = \alpha \dot{\omega} + (\beta + \gamma f_v) \omega + \gamma f_c \text{sign}(\omega). \quad (16)$$

Una ecuación diferencial de un solo estado. Si  $\omega$  es el estado, su expresión en variables de estado sería

$$\frac{d}{dt} [\omega] = \left[ \frac{1}{\alpha} [v - (\beta + \gamma f_v) \omega - \gamma f_c \text{sign}(\omega)] \right]. \quad (17)$$

Con equilibrios en (si  $v = v_1$ )

$$\omega = \frac{v_1 - \gamma f_c \text{sign}(\omega)}{\beta + \gamma f_v}. \quad (18)$$

Intuitivamente, si  $v_1 > \gamma f_c$ , entonces  $\omega > 0$  con  $\omega_{eq} = \frac{v_1 - \gamma f_c}{\beta + \gamma f_v}$ . Si  $v_1 < -\gamma f_c$ , entonces  $\omega < 0$  con  $\omega_{eq} = \frac{v_1 + \gamma f_c}{\beta + \gamma f_v}$ . Pero si  $\omega_{eq} = 0$  entonces debería cumplirse que  $\text{sign}(0) = \frac{v_1}{\gamma f_c}$ .

Obsérvese que se llega a la misma situación que en el análisis anterior. En resumen, este modelo estático de fricción no reproduce fielmente lo que le sucede al servomotor (con fricción) con velocidades cercanas a cero. Algo que se debe tomar muy en cuenta si lo que se busca es resolver el problema de control de posición (o de regulación, con posición deseada constante).

Ahora considérese el modelo de fricción de Dahl, de manera que el modelo del servomotor quedaría (sustituyendo (6) en (12))

$$\begin{aligned} v &= \alpha \ddot{q} + \beta \dot{q} + \gamma (\sigma_0 z + f_v \dot{q}) \\ \dot{z} &= \dot{q} - \frac{\sigma_0}{f_c} |\dot{q}| z. \end{aligned} \quad (19)$$

La cual expresada en variables de estado resulta (con el cambio de variables  $\omega = \dot{q}$  y el vector de estados  $[z \ \omega]^T$ )

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega - \frac{\sigma_0}{f_c} |\omega| z \\ \frac{1}{\alpha} [v - (\beta + \gamma f_v) \omega - \gamma \sigma_0 z] \end{bmatrix}. \quad (20)$$

De tal forma que en los equilibrios debe cumplirse

$$\omega = \frac{\sigma_0}{f_c} |\omega| z \quad (21)$$

$$v = (\beta + \gamma f_v) \omega + \gamma \sigma_0 z. \quad (22)$$

Para su análisis primero considérese el caso para cuando  $\omega = 0$ , entonces se tiene que de (22)

$$v = \gamma \sigma_0 z. \quad (23)$$

Lo que implica que para este caso el estado de equilibrio sería  $[z \ \omega]_{eq}^T = \left[ \frac{v}{\gamma \sigma_0} \ 0 \right]^T$ . En adelante considérese también que  $v = v_1$ . Para verificar si este estado de equilibrio, en estas condiciones, es asintóticamente estable (o atractivo para fines prácticos); es decir, si las trayectorias del sistema tienden a él (esto es, para qué valores de  $v$  el servomotor no se mueve) se utilizará la Teoría de Estabilidad de Lyapunov (ver por ejemplo, Khalil (2002)).

En este sentido, primero realícese el siguiente cambio de variables:  $y = z - \frac{v_1}{\gamma \sigma_0}$ , por lo que  $\dot{y} = \dot{z}$  y  $z = y + \frac{v_1}{\gamma \sigma_0}$ . De tal suerte que el sistema (20) expresado en el vector de estado  $[y \ \omega]^T$  resulta

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega - \frac{\sigma_0}{f_c} |\omega| (y + \frac{v_1}{\gamma \sigma_0}) \\ -\frac{1}{\alpha} [(\beta + \gamma f_v) \omega + \gamma \sigma_0 y] \end{bmatrix}; \quad (24)$$

implicando que el origen es un estado de equilibrio. Es decir,  $[y \ \omega]_{eq}^T = [0 \ 0]^T$  es punto o estado de equilibrio del sistema (24).

Ahora considere la siguiente función candidata de Lyapunov (definida positiva y radialmente desacotada):

$$V(y, \omega) = \frac{1}{2}\epsilon_1\omega^2 + \frac{1}{2}(\epsilon_2y + \epsilon_3\omega)^2$$

con  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 > 0$ ; y cuya derivada temporal resulta

$$\dot{V}(y, \omega) = \epsilon_1\omega\dot{\omega} + (\epsilon_2y + \epsilon_3\omega)(\epsilon_2\dot{y} + \epsilon_3\dot{\omega}).$$

De tal manera que sustituyéndole (24) y después de algunas simplificaciones algebraicas (utilizando la desigualdad de Schwarz) se llega a que

$$\dot{V}(y, \omega) \leq -[|y| \ |\omega|] \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |y| \\ |\omega| \end{bmatrix}$$

donde

$$v_{11} = \frac{\epsilon_2^2\sigma_0}{f_c}|\omega| + \frac{\epsilon_2\epsilon_3\gamma\sigma_0}{\alpha}$$

$$v_{22} = \frac{(\epsilon_1+\epsilon_3^2)(\beta+\gamma f_v)}{\alpha} + \epsilon_2\epsilon_3\left(\frac{v_1}{\gamma f_c} - 1\right)$$

$$v_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_2\epsilon_3\sigma_0}{f_c}|\omega| + \epsilon_2^2\left(\frac{v_1}{\gamma f_c} - 1\right) + \frac{(\epsilon_1+\epsilon_3^2)\gamma\sigma_0}{\alpha} + \frac{\epsilon_2\epsilon_3(\beta+\gamma f_v)}{\alpha}\right).$$

Por lo tanto, la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov es definida negativa si  $v_{11} > 0$  y si  $v_{11}v_{22} - v_{12}^2 > 0$ . Todos los parámetros de (24) son positivos, de manera que la primera condición siempre se satisface al haberse seleccionado  $\epsilon_2, \epsilon_3 > 0$ . Para verificar la segunda condición, reescríbase ésta como  $v_{11}v_{22} > v_{12}^2$  o como

$$a_1|\omega| + a_2 > \frac{1}{4}(a_3|\omega| + a_4)^2$$

donde, por supuesto,  $a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$  son constantes que dependen de los parámetros de (24) y de las constantes  $\epsilon_1, \epsilon_2$  y  $\epsilon_3$ . Note de  $v_{22}$  y de  $v_{12}$  que  $v_1 = \gamma f_c$  es un caso crítico. Considérese este caso y propóngase  $\epsilon_1 = \frac{1}{\gamma\sigma_0} - \epsilon_3^2$  con  $\epsilon_3 = \frac{1}{\epsilon_2(\beta+\gamma f_v)}$ , por lo que  $\epsilon_2 > \frac{\sqrt{\gamma\sigma_0}}{\beta+\gamma f_v} > 0$  para que  $\epsilon_1 > 0$ . De esta forma  $a_1 = \frac{\epsilon_2^2(\beta+\gamma f_v)}{\alpha\gamma f_c}$ ,  $a_2 = \frac{1}{\alpha^2}$ ,  $a_3 = \frac{\sigma_0}{(\beta+\gamma f_v)f_c}$  y  $a_4 = \frac{2}{\alpha}$ ; lo anterior implica que, con una  $\epsilon_2$  lo suficientemente grande, siempre existirá una región alrededor de  $\omega = 0$  donde la desigualdad de esta segunda condición sea válida (con la excepción de convertir dicha desigualdad en una igualdad sólo para cuando  $\omega = 0$ , lo cual sigue siendo válido para concluir que  $\dot{V}(y, \omega)$  sea definida negativa).

Continuando con este análisis para valores de  $v_1 < \gamma f_c$  (al menos hasta  $v_1 \geq -\gamma f_c$ , que como se verá es de primer interés y donde se satisface que  $-2 \leq \frac{v_1}{\gamma f_c} - 1 < 0$ ) se puede de la misma forma verificar que siempre existirán constantes  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 > 0$  que cumplan con las condiciones mencionadas para que  $\dot{V}(y, \omega)$  sea definida negativa. Para demostrar lo anterior, nótese que la segunda condición (la primera siempre

se cumple) debe satisfacerse sobre todo en  $\omega = 0$ ; lo cual implica que  $a_2 > \frac{1}{4}a_4^2$ . Es decir (proponiéndose  $\epsilon_3 = 1/\sqrt{\gamma\sigma_0}$  y multiplicando ambos miembros por  $\alpha^2$ );

$$-b_1\epsilon_2^2 + b_2b_3\epsilon_2 > \frac{1}{4}(-b_1\epsilon_2^2 + b_2\epsilon_2 + b_3)^2$$

donde  $b_1 = \alpha\left(1 - \frac{v_1}{\gamma f_c}\right)$ ,  $b_2 = \frac{1}{\sqrt{\gamma\sigma_0}}(\beta + \gamma f_v)$  y  $b_3 = \gamma\sigma_0\left(\epsilon_1 + \frac{1}{\gamma\sigma_0}\right)$ , siendo todas estas constantes positivas (note

que  $b_3$  depende de  $\epsilon_1$ ). Entonces si  $\epsilon_2 = \frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 + 4b_1b_3}}{2b_1} > 0$  (la raíz más a la derecha de la cuártica en la derecha de la desigualdad; es decir, de esa manera el lado derecho de la desigualdad es igual a cero) puede seleccionarse  $\epsilon_1 > \frac{b_1}{\gamma\sigma_0b_2^2}$  para que la desigualdad sea válida y concluir que  $\dot{V}(y, \omega)$  es definida negativa. Lo cual implica que para todos estos valores constantes de  $v_1$  el origen de (24) es un punto de equilibrio asintóticamente estable y que sus estados están acotados.

Por otro lado, tal como se demuestra formalmente en Canudas de Wit *et al.* (1995), de la segunda ecuación de (19),  $|z(t)| \leq \frac{f_c}{\sigma_0}$  para todo  $t > 0$  si  $|z(0)| \leq \frac{f_c}{\sigma_0}$ . De esta manera  $z_{Max} = \frac{f_c}{\sigma_0}$  y  $z_{min} = -\frac{f_c}{\sigma_0}$ . Expresándose este resultado importante por el siguiente conjunto invariante:

$$\Gamma = \{z : |z| \leq \frac{f_c}{\sigma_0}\}. \quad (25)$$

Con este resultado y el desarrollo anterior, observando (23), se puede concluir que si  $|v_1| \leq \gamma f_c$  entonces el punto de equilibrio  $[z \ \omega]_{eq}^T = \begin{bmatrix} v_1 \\ \gamma\sigma_0 \end{bmatrix} 0^T$  es asintóticamente estable y el sistema se desempeña con estados acotados. Es decir, si  $|v_1| \leq \gamma f_c$  el servomotor tiende a no moverse y la variable  $z$  interna es quien absorbe la energía inyectada al sistema por el voltaje aplicado  $v$ . Esto es, se obtiene una explicación más acercada a la realidad para cuando  $\omega = 0$ .

Finalmente, considere el caso para cuando  $\omega \neq 0$ . De (21) y (22) se llega a que en el equilibrio  $\omega$  debe cumplir (18), análogamente al caso del modelo estático de fricción con  $\omega \neq 0$ ; y  $z = \frac{f_c}{\sigma_0}$  si  $v_1 > \gamma f_c$  o  $z = -\frac{f_c}{\sigma_0}$  si  $v_1 < -\gamma f_c$ . Es decir, si  $v_1 > \gamma f_c$  se tiene el equilibrio en  $[z \ \omega]_{eq}^T = \begin{bmatrix} f_c \\ \sigma_0 \end{bmatrix} \frac{v_1 - \gamma f_c}{\beta + \gamma f_v}$  y si  $v_1 < -\gamma f_c$  se tiene el equilibrio en  $[z \ \omega]_{eq}^T = \begin{bmatrix} -f_c \\ \sigma_0 \end{bmatrix} \frac{v_1 + \gamma f_c}{\beta + \gamma f_v}$ . Para analizar la estabilidad del punto de equilibrio cuando  $v_1 > \gamma f_c$ , realícese el siguiente cambio de variables:

$$y = z - \frac{f_c}{\sigma_0}$$

$$r = \omega - \alpha_1$$

donde  $\alpha_1 = \frac{v_1 - \gamma f_c}{\beta + \gamma f_v} > 0$ .

De manera que la ecuación de estados (20) con este cambio de variables resulta

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r + \alpha_1) - \frac{\sigma_0}{f_c} |r + \alpha_1| (y + \frac{f_c}{\sigma_0}) \\ \frac{1}{\alpha} [-(\beta + \gamma f_v) r - \gamma \sigma_0 y] \end{bmatrix}; \quad (26)$$

la cual tiene al origen como punto de equilibrio. Ahora propóngase la siguiente función candidata de Lyapunov (definida positiva y radialmente desacotada):

$$V(y, r) = \frac{1}{2} \epsilon_1 r^2 + \frac{1}{2} (\epsilon_2 y + \epsilon_3 r)^2$$

donde  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 > 0$ ; y cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (26) cumple con

$$\dot{V}(y, r) \leq -[|y| \quad |r|] \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |y| \\ |r| \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{donde } v_{11} &= \frac{\epsilon_2^2 \sigma_0}{f_c} (r + \alpha_1) + \frac{\epsilon_2 \epsilon_3 \gamma \sigma_0}{\alpha} \\ v_{22} &= \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_3)(\beta + \gamma f_v)}{\alpha} \\ v_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_2 \epsilon_3 \sigma_0}{f_c} (r + \alpha_1) + \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_3) \gamma \sigma_0}{\alpha} + \frac{\epsilon_2 \epsilon_3 (\beta + \gamma f_v)}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Lo anterior es válido al menos en la región  $|r| < \alpha_1$ , puesto que en esa región  $|r + \alpha_1| = r + \alpha_1 > 0$ . De tal manera que, inspirados en el caso crítico anterior, bastaría con que

$$\frac{\epsilon_2^2 (\beta + \gamma f_v)}{\alpha \gamma f_c} (r + \alpha_1) + \frac{1}{\alpha^2} > \frac{1}{4} \left( \frac{\sigma_0}{(\beta + \gamma f_v) f_c} (r + \alpha_1) + \frac{2}{\alpha} \right)^2$$

para corroborar que  $\dot{V}(y, \omega)$  sea definida negativa (por supuesto seleccionándose de la misma forma  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_3$ ). Observe que un punto de cruce entre la línea recta (miembro izquierdo de la desigualdad) y la parábola (miembro derecho de la desigualdad), la cual siempre es mayor que cero excepto en  $r = -\left(\frac{2(\beta + \gamma f_v) f_c}{\alpha \sigma_0} + \alpha_1\right)$  donde es igual a cero; note que es a la izquierda de  $r = -\alpha_1$  es cuando  $r = -\alpha_1$ . De esta forma, para cumplir con esta desigualdad en  $|r| < \alpha_1$ , bastaría un  $\epsilon_2$  lo suficientemente grande como para que la pendiente de dicha línea recta logre que el segundo punto de cruce sea en  $r > \alpha_1$ . Específicamente, en este caso se debe cumplir que

$$\epsilon_2 > \max \left\{ \frac{\sqrt{\gamma \sigma_0}}{\beta + \gamma f_v}, \sqrt{\frac{\alpha \alpha_1 \gamma}{2(\beta + \gamma f_v)^3 f_c} + \frac{\gamma}{(\beta + \gamma f_v)^2}} \right\};$$

lo cual siempre será posible obtenerlo. Por lo tanto, el origen de (26) es un equilibrio asintóticamente estable y (26) evolucionará con estados acotados. Lo cual implica que el punto de equilibrio de (20)  $[z \ \omega]_{eq}^T = \left[ \frac{f_c}{\sigma_0} \quad \frac{v_1 - \gamma f_c}{\beta + \gamma f_v} \right]^T$  es asintóticamente estable. De esta manera, se ha demostrado formalmente que si  $v = v_1 > \gamma f_c$  entonces el  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \frac{f_c}{\sigma_0}$  y el  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \frac{v_1 - \gamma f_c}{\beta + \gamma f_v}$ . La estabilidad del punto de equilibrio cuando  $v_1 < -\gamma f_c$  se demuestra de manera similar.

### 3.3. Identificación de parámetros

En acuerdo con al análisis anterior, se utilizará el modelo de fricción de Dahl para modelar la fricción del servomotor; es decir, el modelo del servomotor completo será (19). Recuerde que (19) se obtuvo luego de sustituir (6) en (12); y (12) se encontró luego de despejar  $i_a$  de (11) y ese resultado sustituirlo en (7).

Para la identificación de parámetros de este modelo se utilizarán hechos bastante conocidos en la literatura. Primero note que si se divide (7) entre  $i_a$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{v}{i_a} &= \frac{e_b}{i_a} + R_a \\ &= K_b \frac{\dot{q}_m}{i_a} + R_a; \end{aligned} \quad (27)$$

es decir, se consigue la ecuación de una línea recta con pendiente  $K_b$  y cruce por la ordenada  $R_a$ . De tal suerte que con sólo aplicar un voltaje  $v$  constante al motor y medir tanto  $i_a$  como  $\dot{q}_m$  (o  $\dot{q} = \dot{q}_m/r$ ) en estado estacionario es posible identificar los parámetros  $K_b$  y  $R_a$  (y  $K_a$  pues se ha supuesto  $K_a = K_b$ ).

Para realizar este experimento de identificación, el motor se desconectó eléctricamente sin afectar las partes mecánicas. Luego se le alimentó con una fuente de voltaje en serie con un resistor de muy bajo valor (resistor “shunt” de 0.1  $\Omega$ ), con valores para  $v$  tanto positivos como negativos. La caída de voltaje en este resistor “shunt” fue amplificado con un “amplificador de instrumentación” de alta ganancia, para luego por Ley de Ohm calcular la  $i_a$  correspondiente (de un promedio de valores durante 40 (s), auxiliados por un osciloscopio). Para la medición de la velocidad angular  $\dot{q}$  se utilizó un tacómetro genérico (de hecho, todos los instrumentos utilizados fueron genéricos a modo de hacer más accesible la posible reproducción del experimento).

La Figura 4 muestra estos resultados experimentales. Los datos en azul corresponden con voltajes positivos y los datos en rojo con voltajes negativos. Utilizando la herramienta “Ajuste de curvas” de MATLAB se encontró (por mínimos cuadrados):

$$(a) \text{ Para } v > 0: \frac{v}{i_a} = 0.0063 \frac{\dot{q}_m}{i_a} + 28.03$$

$$(b) \text{ Para } v < 0: \frac{v}{i_a} = 0.0063 \frac{\dot{q}_m}{i_a} + 35.54$$

En la misma Figura 4 se muestran las gráficas de estas mejores líneas rectas encontradas con un trazo discontinuo. Como se puede observar ambas líneas rectas tienen la misma pendiente  $K_b$  pero diferente  $R_a$ . Estas diferencias pueden ser atribuidas al efecto del conmutador del motor y a que en realidad el modelado supone parámetros concentrados. De esta manera se propone utilizar el promedio para estos parámetros; es decir

$$K_a = 0.0063 \text{ (N} \cdot \text{m/A)}, K_b = 0.0063 \text{ (V} \cdot \text{s/rad)} \text{ y } R_a = 31.8 \text{ (}\Omega\text{)}.$$

Ahora considere (11), la ecuación mecánica del servomotor. Como se ha demostrado, para un voltaje constante  $v = v_1$  la velocidad angular tiende a

$$\dot{q}_{ss} = \begin{cases} \frac{v_1 - \gamma f_c}{\beta + \gamma f_v}, & \text{si } v_1 > \gamma f_c \\ \frac{v_1 + \gamma f_c}{\beta + \gamma f_v}, & \text{si } v_1 < -\gamma f_c \end{cases}$$

entonces  $\dot{q}_{ss} = 0$  (los subíndices “ss” indican en estado estacionario). De manera que en estas condiciones la fricción  $f = rK_a i_a$  y, con  $r$  y  $K_a$  conocidos, se puede graficar la fricción contra la velocidad. La Figura 5 describe esta gráfica, marcando con un “\*” los datos experimentales. De hecho, se observa un comportamiento similar al descrito por (1); es decir, se puede argumentar que están presentes en el servomotor todos los fenómenos modelados por (1). También, nótese que se tiene un comportamiento asimétrico respecto al signo de  $\dot{q}$ . Utilizando de la misma forma la herramienta “Ajuste de curvas” de MATLAB se encontró (con mínimos cuadrados no lineales, el algoritmo Levenberg-Marquardt y suponiendo el comportamiento (1)):

(a) Para  $\dot{q} \geq 0$ :

$$f = 0.0698 + 0.0051\dot{q} + (0.1018 - 0.0698)e^{-\left(\frac{\dot{q}}{0.0484}\right)^2}$$

(b) Para  $\dot{q} \leq 0$ :

$$f = -0.0569 + 0.0033\dot{q} + (-0.0902 - 0.0569)e^{-\left(\frac{\dot{q}}{0.0484}\right)^2}$$

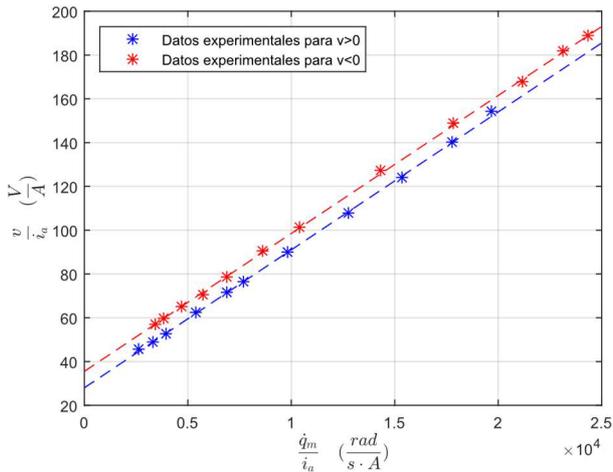


Figura 4: Resultados experimentales de la parte eléctrica del servomotor.

En la misma Figura 5 se observan las gráficas tanto de (a) como de (b) con líneas discontinuas azules. Si sólo se consideran las componentes viscosa y de Coulomb se tendrían segmentos de línea recta. Estos dos parámetros también se determinan bajo la misma herramienta de MATLAB pero descartando los datos para cuando  $\dot{q} = 0$ , encontrándose los mismos valores para sus coeficientes que en (a) y (b). Sus gráficas de ajuste se muestran en la figura con líneas discontinuas en rojo. Nuevamente, se propone utilizar un promedio para todos estos parámetros del modelo de fricción; esto es

$$f_c = 0.0634 \text{ (N}\cdot\text{m)}, \quad f_s = 0.0042 \text{ (N}\cdot\text{m}\cdot\text{s/rad)}, \quad f_v = 0.0960 \text{ (N}\cdot\text{m)} \text{ y } v_s = 0.0484 \text{ (rad/s)}.$$

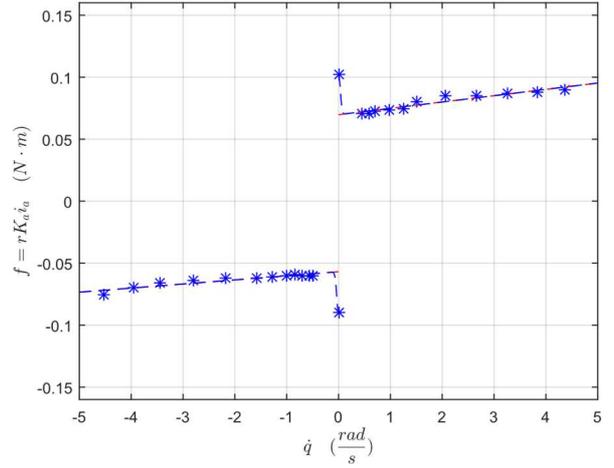


Figura 5: Resultados experimentales para la fricción.

Se debe hacer notar que se han estimado todos los parámetros del modelo (1); sin embargo, en adelante sólo se utilizarán  $f_c$  y  $f_v$  necesarios para el modelo de fricción de Dahl seleccionado.

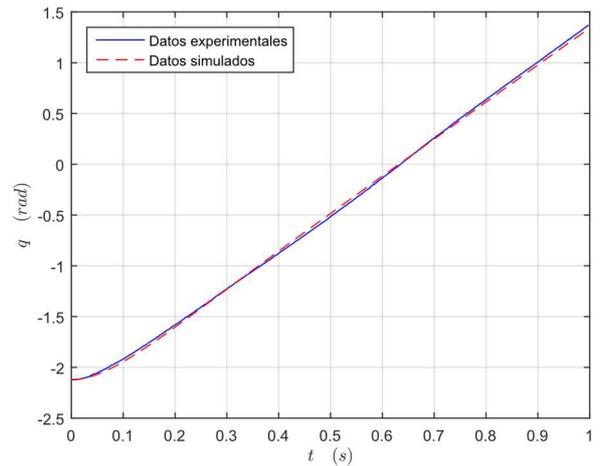


Figura 6: Comparativas de lo simulado con lo experimental en el procedimiento de estimación de parámetros final.

Sólo faltarían estimar  $J$  y  $\sigma_0$ . Para su estimación se realiza un experimento de tiempo real, con un periodo de muestreo constante de 0.001 (s), durante 1 (s), en lazo abierto, aplicando un voltaje  $v = 7.39$  (V) y utilizando el sistema de cómputo supervisor (un Arduino Mega, ver Figura 3) para capturar la evolución contra el tiempo de la posición angular  $q(t)$ . El experimento de tiempo real opera entre el servomotor y el sistema de cómputo supervisor (utilizándose interrupciones y relojes); luego, al terminar el experimento (1 (s)), el sistema de cómputo supervisor envía los datos por USB a la computadora personal para realizar el análisis de datos fuera de línea. Posteriormente, entonces fuera de línea, mediante la herramienta “Estimación de parámetros” de MATLAB/Simulink (la cual ejecuta comparativas entre los datos experimentales y datos de simulación con Simulink), con el método de mínimos cuadrados no lineales, el algoritmo Levenberg-Marquardt, con  $10^{-6}$  como tolerancia para la

estimación de los parámetros y con las condiciones iniciales  $J(0) = 0.005$  y  $\sigma_0(0) = 1$ ; se estiman dichos parámetros (teniendo también cuidado en la condición inicial  $q(0) = -2.122$  (rad) del experimento). Encontrándose finalmente que

$$J = 0.0072 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2) \text{ y } \sigma_0 = 0.1352 \text{ (N} \cdot \text{m/rad)}.$$

La Figura 6 detalla la comparativa entre lo simulado y lo experimental. Puede observarse que los comportamientos de ambas gráficas son muy similares, tanto en el transitorio como en el estado estacionario; validándose así la estimación de parámetros realizada.

#### 4. Análisis de la acción proporcional para el control de posición

##### 4.1. Control proporcional

En este apartado se analiza rigurosamente el desempeño del controlador proporcional aplicado a la regulación de posición del servomotor (objeto de estudio), tomando en cuenta la fricción. De esta manera, el objetivo de regulación de posición expresado de manera formal es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_d \quad (28)$$

donde  $q_d$  es la posición angular deseada, la cual debe ser constante.

Ahora considérese entonces el modelo del servomotor con fricción de Dahl (19) y con la ley de control

$$v = k_p \tilde{q} \quad (29)$$

donde  $k_p > 0$  es la ganancia proporcional (seleccionada por el usuario) y  $\tilde{q} = q_d - q$ . El sistema en lazo cerrado se forma sustituyendo (29) en (19), el cual expresado en el vector de estados  $[z \ \tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T$  sería

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} - \frac{\sigma_0}{f_c} |\dot{\tilde{q}}| z \\ \dot{\tilde{q}} \\ \frac{1}{\alpha} [\gamma \sigma_0 z - (\beta + \gamma f_v) \dot{\tilde{q}} - k_p \tilde{q}] \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Cuyo análisis de equilibrios implica que (en el equilibrio)  $\dot{\tilde{q}} = 0$  y  $\tilde{q} = \frac{\gamma \sigma_0 z}{k_p}$ ; es decir, hay un continuo de equilibrios (de hecho, hay una línea recta de equilibrios).

Es importante mencionar que, si no se considera la fricción, el controlador proporcional resuelve el problema de regulación (28); pues el lazo cerrado es la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes positivos (la cual es bastante conocida y al poseer los coeficientes positivos es suficiente para demostrar que se cumple (28); de hecho esto se cumple exponencialmente):

$$\alpha \ddot{\tilde{q}} + (\beta + \gamma f_v) \dot{\tilde{q}} + k_p \tilde{q} = 0. \quad (31)$$

Por otro lado, si se considera el modelo de fricción estático (1) con sólo fricción de Coulomb y viscosa; el sistema en lazo cerrado implica que en el equilibrio  $\dot{\tilde{q}} = 0$  y  $\tilde{q} = \frac{\gamma f_c \text{sign}(0)}{k_p}$ . De

tal manera que nuevamente se tiene el problema de no reproducción fiel de las observaciones experimentales cuando las velocidades son muy “pequeñas”.

Ahora bien, para el análisis de estabilidad de los equilibrios de (30), al ser un sistema no lineal, nuevamente se utilizará la Teoría de Estabilidad de Lyapunov; en específico el Teorema 4.4 del libro de Khalil (2002). En este sentido, considérese la siguiente función candidata de Lyapunov (también definida positiva y radialmente desacotada):

$$V(z, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \gamma \sigma_0 z^2 + \frac{1}{2} k_p \tilde{q}^2 + \frac{1}{2} \alpha \dot{\tilde{q}}^2,$$

cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (30) es

$$\dot{V}(z, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = -\frac{\gamma \sigma_0^2}{f_c} |\dot{\tilde{q}}| z^2 - (\beta + \gamma f_v) \dot{\tilde{q}}^2 \leq 0.$$

Ahora, debido a que  $V(z, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$  es radialmente desacotada, entonces el conjunto

$$\Omega_c = \left\{ [z \ \tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T \in \mathbb{R}^3 : V(z, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \leq c \right\}$$

es compacto y positivamente invariante. De esta manera, seleccionando  $\Omega = \Omega_c$  entonces se cumplen las condiciones del mencionado Teorema 4.4 del libro de Khalil (2002).

Observe que  $\dot{V}(z, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = 0$  si  $\dot{\tilde{q}} = 0$ ; esto implica que si  $\dot{\tilde{q}} \equiv 0$  entonces  $\ddot{\tilde{q}} = 0$  y, a su vez, de la primera ecuación de (30) que  $\dot{z} = 0$  (lo cual significa que  $z = \text{constante}$ ) y de la tercera ecuación de (30) que  $\gamma \sigma_0 z = k_p \tilde{q}$ . De manera que el máximo conjunto invariante de

$$E = \left\{ [z \ \tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T \in \mathbb{R}^3 : \dot{V}(z, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = 0 \right\}$$

sería

$$M = \left\{ [z \ \tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T \in \mathbb{R}^3 : \dot{\tilde{q}} = 0 \text{ y } \gamma \sigma_0 z = k_p \tilde{q} \right\}.$$

Es decir, se concluye que el conjunto  $M$  es atractivo; el cual contiene precisamente a los equilibrios de (30). Lo anterior significa que las trayectorias del sistema tienden al equilibrio de (30); por lo que existirán errores en estado estacionario (pero acotados) y no se cumplirá el objetivo de control (28). Sin embargo, observe que entre más grande sea  $k_p$  más pequeño será  $\tilde{q}$ . Algo que regularmente se realiza en estos servomotores; es decir, se utilizan ganancias grandes (por supuesto en detrimento de otras propiedades del sistema; como incrementar la rigidez de la articulación). Por otro lado, las conclusiones de este análisis al menos permiten establecer cotas para el error en estado estacionario; puesto que debido a (25)  $|z| \leq \frac{f_c}{\sigma_0}$  y entonces  $|\tilde{q}| \leq \frac{\gamma f_c}{k_p}$ . Adicionalmente, como anotación importante del análisis también se concluye que el estado  $z$  tiende a una constante.

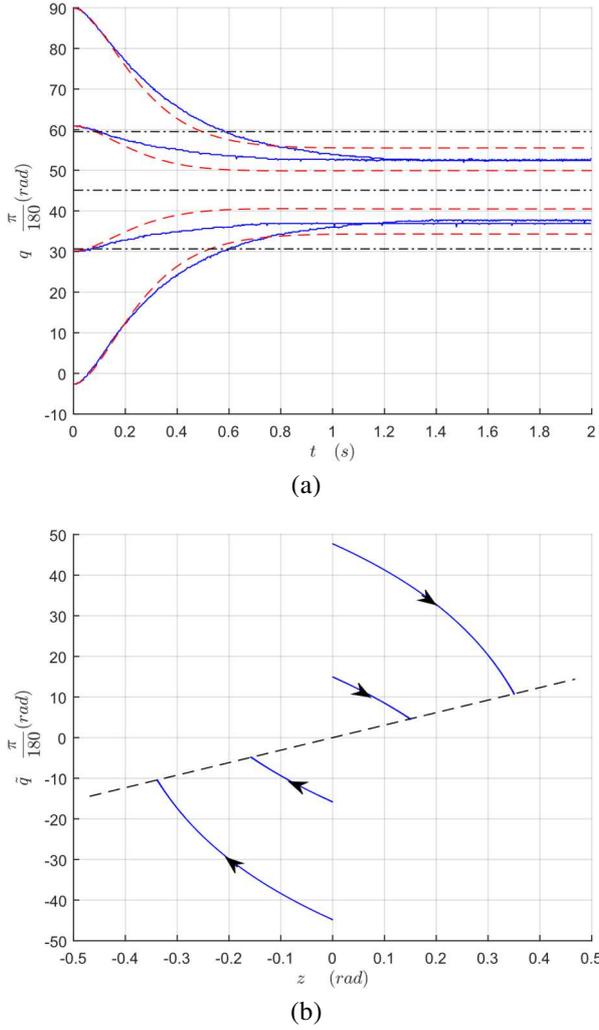


Figura 7: (a) Comparativas experimentales para  $k_p = 5$ . (b) Plano de fase  $z - \tilde{q}$  con las trayectorias correspondientes.

#### 4.2. Comparativas experimentales

A continuación, en referencia a la sección anterior (ley de control (29) y modelo del servomotor (19)), se describen comparativas entre resultados de simulación y resultados experimentales (con la plataforma de experimentación ya descrita en la Sección 3.3 y mostrada en la Figura 3).

Se realizaron 2 escenarios de simulación y experimentación: uno con  $k_p = 5$  y otro con  $k_p = 10$ . En ambos escenarios el tiempo de simulación y experimentación fue de 2 (s) y (para corresponder con la resolución en la medición de posición del servomotor)  $q_d = 45.0918 \frac{\pi}{180}$  (rad); y  $\dot{q}(0) = z(0) = 0$ . En adelante se utilizarán los parámetros estimados en la Sección 3.3.

De esta manera, al primer escenario le corresponderá una cota  $|\tilde{q}| \leq \frac{\gamma f_c}{k_p} = 14.4376 \frac{\pi}{180}$  (rad). Es decir, el análisis para este escenario predice que  $q_{ss}$  estará entre  $59.5294 \frac{\pi}{180}$  (rad) y  $30.6542 \frac{\pi}{180}$  (rad). La Figura 7 detalla 4 corridas para este escenario, cada una de ellas sólo con diferente condición inicial  $q(0)$ . Observe en la Figura 7(a), en líneas punteadas negras, tanto  $q_d$  como las cotas para  $q_{ss}$ ; y las gráficas  $q(t)$  para las 4

corridas mencionadas (en línea continua azul los datos experimentales y en línea discontinua roja los datos de simulación). Como puede notarse  $q_{ss}$ , tanto en los experimentos como en las simulaciones, cae dentro de las cotas predichas por el análisis. Es importante destacar que, para los experimentos, las curvas de posición tienden a valores muy similares dependiendo de si se llega por abajo o por arriba de la posición deseada; en tanto que para las simulaciones cada valor en la tendencia es diferente (aunque también se depende de si se llega por abajo o por arriba de la posición deseada).

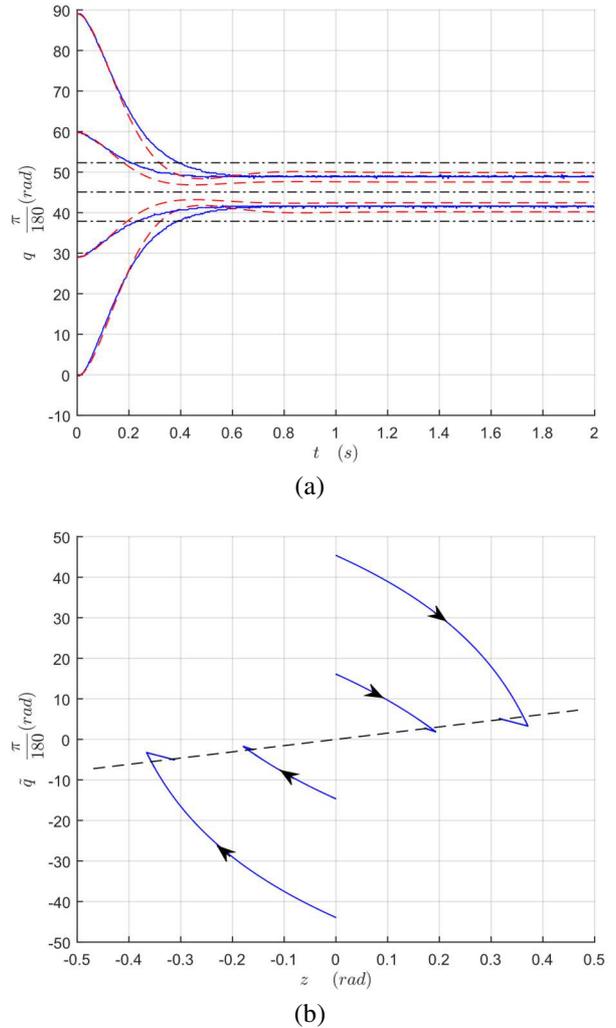


Figura 8: (a) Comparativas experimentales para  $k_p = 10$ . (b) Plano de fase  $z - \tilde{q}$  con las trayectorias correspondientes.

Por otro lado, la Figura 7(b) presenta el plano de fase  $z - \tilde{q}$  con las 4 trayectorias correspondientes. Obsérvese que, como se predice, las trayectorias tienden a la línea recta  $\tilde{q} = 30.7880 \frac{\pi}{180} z$  (dicha línea recta se muestra en trazo discontinuo negro).

Ahora, correspondientemente, para el segundo escenario la cota sería  $|\tilde{q}| \leq \frac{\gamma f_c}{k_p} = 7.2188 \frac{\pi}{180}$ ; es decir,  $q_{ss} = [37.8730, 52.3106] \frac{\pi}{180}$  (rad). La Figura 8(a) ilustra la evolución de  $q$  contra el tiempo de las simulaciones y experimentos para este escenario. Se observa un comportamiento similar al escenario anterior, pero ahora con

un intervalo de tendencia para  $q$  más pequeño (al ser más grande  $k_p$ ). Aquí se puede observar de mejor manera que los transitorios, lejos del intervalo para  $q_{ss}$ , son bastante similares en la comparativa de simulación y experimentación; validándose en cierto modo el procedimiento de estimación de parámetros realizado.

Finalmente, también de manera similar, la Figura 8(b) describe el plano de fase  $z - \tilde{q}$  con las trayectorias tendientes a la línea recta  $\tilde{q} = 15.3940 \frac{\pi}{180} z$ .

## 5. Control con observador de perturbación

Apoyándose en las conclusiones de la Sección 4.1 (principalmente en que el estado  $z$  interno es acotado y tiende a una constante), en esta sección se diseñará un observador de perturbación para resolver el problema de regulación (28). La teoría utilizada para este diseño se basará en el Lema 9.1 del libro de Khalil (2002).

Observe que el modelo del servomotor (12) puede ser expresado mediante

$$\begin{aligned} J\ddot{q} &= \frac{rK_a}{R_a}v - \left( \frac{r^2K_a^2}{R_a} + f_v \right) \dot{q} - f_{per} \\ &= u - \left( \frac{r^2K_a^2}{R_a} + f_v \right) \dot{q} - f_{per}, \end{aligned} \quad (32)$$

con  $u = \frac{rK_a}{R_a}v$  y  $f_{per}$  los efectos de la fricción de Coulomb. Entonces el diseño del observador sería (siguiendo los pasos de Ohnishi *et al.* (1996))

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_{1z} \\ 1 & -k_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_{1z}k_{2z}q \\ (k_{1z} - k_{2z}^2)q + \frac{u}{J} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

con polos arbitrarios (pero con parte real negativa)  $p_1$  y  $p_2$ , tal que  $p_1 + p_2 = -k_{2z}$  y  $p_1p_2 = -k_{1z}$ . De manera que la perturbación puede ser estimada mediante

$$\hat{f}_{per} = -J(k_{1z}q + z_1). \quad (34)$$

Está demostrado en Ohnishi *et al.* (1996) que ante perturbaciones constantes  $\hat{f}_{per}$  tiende a  $f_{per}$  conforme el tiempo transcurre; es decir,  $\hat{f}_{per}$  tiende a cero si  $\tilde{f}_{per} = f_{per} - \hat{f}_{per}$ . Ahora, propóngase

$$u = k_{p1}\tilde{q} + \hat{f}_{per} \quad (35)$$

donde  $k_{p1} > 0$  es la ganancia proporcional. De tal manera que sustituida en (32), el lazo cerrado quedaría

$$J\ddot{\tilde{q}} + \left( \frac{r^2K_a^2}{R_a} + f_v \right) \dot{\tilde{q}} + k_{p1}\tilde{q} = \tilde{f}_{per}.$$

Es decir, en términos del Lema 9.1 mencionado, se obtiene un sistema nominal con el origen como equilibrio exponencialmente estable y con una perturbación desvaneciente. Lo cual implica que el objetivo de control (28) se cumple. Es significativo notar que este controlador (33)-(35) no depende de la medición de la velocidad  $\dot{q}$ . Algo muy

importante pues implicaría la adición de un sensor más en el servomotor o de la estimación de esta variable; lo cual, como es sabido, regularmente agrega ruido de alta frecuencia al sistema de control.

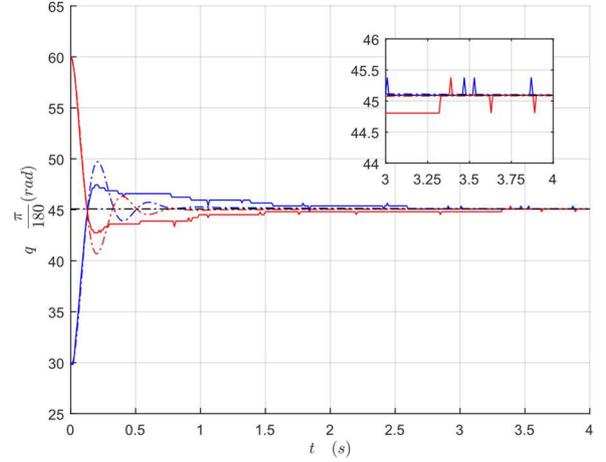


Figura 9: Comparativas experimentales utilizando el controlador con observador de perturbación.

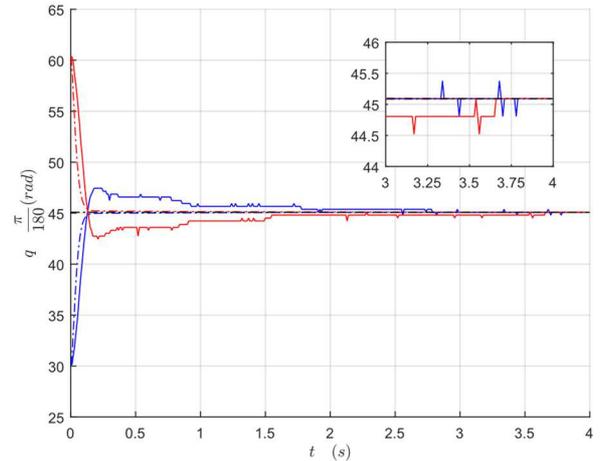


Figura 10: Comparativas experimentales utilizando el controlador con observador de perturbación y  $J = 0.001$  (kg · m<sup>2</sup>).

La Figura 9 detalla las comparativas de simulación y experimentación utilizando este control con observador de perturbación. De la misma forma que en los experimentos anteriores  $q_d = 45.0918 \frac{\pi}{180}$  (rad); y  $\dot{q}(0) = z(0) = 0$ . Y las ganancias fueron  $k_p = 2$  y  $k_{1z} = k_{2z} = 500$ . La Figura 9 presenta dos corridas con diferentes condiciones iniciales para  $q$ , una por debajo de  $q_d$  (con trazo continuo azul para el experimento y con trazo punteado del mismo color para la simulación) y otra por arriba de ella (con trazo continuo rojo para el experimento y con trazo punteado del mismo color para la simulación). Como puede observarse, aprovechando el acercamiento realizado en el recuadro de la parte superior derecha de la figura, después de 3.5 (s) el error es prácticamente nulo en ambos casos (sólo se notan variaciones con magnitudes dentro de la mínima resolución  $n_q$  del servomotor). También es importante destacar que luego de 0.25 (s) existen ligeras diferencias entre lo simulado y lo experimental, al sufrir el servomotor los efectos de la fricción de Coulomb; sin embargo, en los transitorios iniciales, las

comparativas son bastante similares. Lo anterior valida nuevamente la estimación de parámetros realizada y el hecho de que otras no linealidades presentes (como juego mecánico, rigidez torsional, etc.) parecen ser, en las condiciones de estos experimentos, despreciables.

Finalmente, note que, para la implementación del controlador (33)-(35), dentro de todos los parámetros del modelo sólo se depende de  $J$ . La Figura 10 describe la repetición del experimento anterior pero ahora suponiendo una  $J = 0.001$  ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ). Observe que el comportamiento experimental es similar al anterior (puesto que dicho parámetro actúa prácticamente como una ganancia); en tanto que la simulación cambia notablemente (ahora ya no hay sobreimpulsos en las respuestas y existen diferencias marcadas entre lo simulado y lo experimental desde el arranque de cada corrida). Con este experimento de nuevo se da muestra de la robustez tanto del procedimiento de modelado e identificación de parámetros como del comportamiento del controlador (33)-(35).

## 6. Conclusiones

A manera de tutorial se detalló un análisis riguroso para el control de posición, considerando fricción y en modo voltaje, de un servomotor inteligente de bajo costo; el cual es muy empleado para el diseño y construcción de robots avanzados (con aplicaciones de entretenimiento pero también de investigación). De manera que primero se describieron los modelos de fricción más utilizados por la comunidad de la Robótica (modelos tanto estáticos, sin memoria; como dinámicos, con memoria o expresados en variables de estado). Luego, se explicó el modelo del servomotor con fricción de Coulomb y viscosa; y también con fricción de Dahl. Posteriormente, se presentó un procedimiento bastante accesible para la estimación de los parámetros del servomotor completo. Y finalmente, apoyándose en la Teoría de Estabilidad de Lyapunov, se describió un análisis minucioso del desempeño de la acción proporcional en el control de posición del servomotor; terminándose con el diseño de un control de posición con observador de perturbación. Se destaca que cada simulación se comparó con resultados experimentales; dichos experimentos logrados en una plataforma de tiempo real con un periodo de muestreo constante de 0.001 (s). Así mismo, es importante mencionar que estos resultados pueden ser fácilmente extendidos a servomotores más sofisticados.

## Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo financiero brindado por el Tecnológico Nacional de México y el Instituto Tecnológico de Ensenada. Así mismo, se agradece a Marco de Carlo Martínez Rodríguez por su invaluable asistencia en los experimentos.

## Referencias

Arena, P., Patane, L., Spinosa, A. G., 2022. A new embodied motor-neuron architecture. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 30:5, pp. 2212-2219.

- Armstrong-Hélouvy, B., Dupont, P., Canudas de Wit, C., 1994. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, 30(7), pp. 1083–1138.
- Bliman, P. A., Sorine, M., 1991. Friction modelling by hysteresis operators. Application to Dahl, sticktion and Stribeck effects. In *Proceedings of the Conference "Models of Hysteresis"*, Trento, Italy.
- Bugarin, E., Castañeda-García, L. J., Aguilar-Bustos, A. Y., 2014. Experimental analysis of the dynamixel AX-12 servomotor and its wireless communication. In *Advances in computing science, control and communications*, pp. 37–46. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Burridge, R., Knopoff, L., 1967. Model and theoretical seismicity. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 57, pp. 341-371.
- Canudas de Wit, C., Olsson, H., Åström, K., Lischinsky, P., (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 40, pp. 419–425
- Constantin, G.; Maroşan, I.-A.; Crenganiş, M.; Botez, C.; Gîrjob, C.-E.; Biriş, C.-M.; Chicea, A.-L.; Bârsan, 2023. A. Monitoring the Current Provided by a Hall Sensor Integrated in a Drive Wheel Module of a Mobile Robot. *Machines*, 11, 385. <https://doi.org/10.3390/machines11030385>
- Corke, P. I., 1996. In situ Measurement of Robot Motor Electrical Constants. *Robotica*, 23(14), pp. 433–436
- Dahl, P. R., 1968. A solid friction model. The Aerospace Corporation, El Segundo, CA, Tech. Rep. TOR-158(3107-18)
- Fereidouni, S., Hassani, M. S., Talebi, A., Rezaie, A. H., 2022. A novel design and implementation of wheelchair navigation system using Leap Motion sensor, *Disability and Rehabilitation: Assistive Technology*, 17:4, 442-448, DOI: 10.1080/17483107.2020.1786734
- Filippov, A. F., 1988. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Norwell, MA: Kluwer.
- Kelly, R., Santibañez, V., 2003. *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Pearson Prentice Hall. Madrid. 344 pp.
- Khalil, H. K., 2002. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, tercera edición, 750 pp.
- Iqbal, J., Xu, R., Halloran, H., Li, C., 2020. Development of a Multi-Purpose Autonomous Differential Drive Mobile Robot for Plant Phenotyping and Soil Sensing. *Electronics* 2020, 9(9), 1550. DOI:10.3390/electronics9091550
- Kusnerova, M., Repka, M., Harnicarova, M., Valček, J., Danel, R., Kmec, J., Palkova, Z., 2020. A new way of measuring the belt friction coefficient using a digital servomotor. *Measurement*. Vol. 150. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2019.107100>
- Oh Y., Kim J. H., 2021. System Design and Implementation of Multi-legged Spider Robots for Landmine Detection in the Demilitarized Zone. 2021 18th International Conference on Ubiquitous Robots (UR). Gangneung, Korea (South), pp. 228-234. DOI: 10.1109/UR52253.2021.9494703
- Ohnishi, K., Shibata, M., Murakami, T., 1996. Motion control for advanced mechatronics. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*. 1(1), 56-67
- Sánchez-García, B., Bugarin, E., y Aguilar-Bustos, A. Y., 2023. Mejoramiento de un servomotor inteligente de bajo costo. *Pádi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 11(Especial2), 127-133. <https://doi.org/10.29057/icbi.v11iEspecial2.10852>
- Sciacavico, L., Siciliano, B., 2009. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer-Verlag, London, 632 pp.
- Shirai, K., Shimamura, K., Koubara, A., Shigaki, S., Fujisawa, R., 2022. Development of a behavioral trajectory measurement system (Bucket-ANTAM) for organisms moving in a two-dimensional plane. *Artificial Life and Robotics* (2022) 27:698–705. <https://doi.org/10.1007/s10015-022-00811-5>
- Singh, R., Khurana, A. and Kumar, S., 2020. Optimized 3D laser point cloud reconstruction by gradient descent technique. *Industrial Robot*, Vol. 47 No. 3, pp. 409-421. DOI: <https://doi.org/10.1108/IR-12-2019-0244>
- Swevers, J., Al-Bender, F., Gansseman, C. G., Prajogo, T., 2000. An Integrated Friction Model Structure with Improved Presliding Behavior for Accurate Friction Compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(4)
- Thai, C. N., 2017. *Exploring Robotics with Robotis systems*. Springer, segunda edición, 342 pp.
- Tsai C. C., Hsu W. T., Tai F. C., Chen S. C., 2022. Adaptive Motion Control of a Terrain-Adaptive Self-Balancing Leg-Wheeled Mobile Robot over Rough Terrain. 2022 International Automatic Control Conference (CACs), Kaohsiung, Taiwan, pp. 1-6, DOI: 10.1109/CACs55319.2022.9969857
- Zyhowski, W.P., Zill, S.N., Szczecinski, N.S., 2022. Load Feedback from a Dynamically Scaled Robotic Model of Carausius Morosus Middle Leg. *Biomimetic and Biohybrid Systems. Living Machines 2022. Lecture Notes in Computer Science*, Springer.