

Control robusto de la actitud de un multirrotor empleando una arquitectura de control en cascada con prealimentación

Javier Rico-Azagra*, Montserrat Gil-Martínez, Ramón Rico

Grupo de Ingeniería de Control, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de la Rioja, Edificio Aepartmental A A/San Aosé de Aalasan, A1, A6004, Aogroño, Aspaña.

To cite this article: Rico-Azagra, J., Gil-Martínez, M., Rico, R., 2025. Robust multi-rotor attitude control using cascaded feedback control architecture and feedforward. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 22, 45-56. <https://doi.org/10.4995/riai.2024.21627>

Resumen

Este trabajo aborda el control robusto de la actitud de un UAV de tipo multirrotor. Como principal novedad destaca el empleo de una estructura de control *model-matching* en cascada que, junto a los dos controladores de realimentación del ángulo de rotación y su velocidad angular, incorpora un controlador de prealimentación de la referencia. La metodología de diseño empleada deriva la ganancia de control al lazo de realimentación interno a partir de cierta frecuencia especificada, mientras que el lazo de realimentación externo domina en baja frecuencia. Un reparto equilibrado de la realimentación entre lazos consigue controladores de realimentación más sencillos y de menor ancho de banda individual, que permiten un rápido control del ángulo sin que los ruidos de medida se amplifiquen peligrosamente en la acción de control. Los diseños de control son robustos y se han realizado en el dominio de la frecuencia discreta siguiendo los postulados de la Teoría de Realimentación Cuantitativa. Se han considerado explícitamente especificaciones de estabilidad, de rechazo de perturbaciones de par y de seguimiento de referencias angulares. La solución de control propuesta es validada experimentalmente en un cuatrirrotor real.

Palabras clave: UAV, Cuatrirrotor, Control robusto, QFT, Control en cascada.

Robust multi-rotor attitude control using cascaded feedback control architecture and feedforward

Abstract

This paper deals with the robust attitude control of a multicopter UAV. The main novelty is the use of a cascaded model-matching control structure that includes a reference feedforward controller along with the two angle and velocity feedback controllers. The design methodology used derives the control gain to the inner feedback loop above a certain frequency, while the outer feedback loop dominates at low frequencies. A balanced distribution of feedback between loops results in simpler, lower-bandwidth feedback controllers that allow fast angle control without dangerously amplifying measurement noise in the control action. The control designs are robust and performed in the discrete frequency domain according to the postulates of Quantitative Feedback Theory, with explicit consideration of stability, torque disturbance rejection, and angular reference tracking specifications. The proposed control solution is experimentally validated on a real quadrotor.

Keywords: UAV, Quadrotor, Robust control, QFT, Cascade control.

1. Introducción

En los sistemas de control de movimiento es habitual el empleo de estructuras en cascada. Algunos ejemplos notables son los sistemas de control de ejes en la maquinaria industrial

(Mandra, 2014) o el control de posicionadores (Han et al., 2023; Mandali and Dong, 2022). Un campo específico y de gran popularidad actualmente es el control de vehículos autónomos, donde se establecen sistemas de control jerárquicos que operan en cascada para controlar la posición y la orientación del vehículo.

*Autor para correspondencia: javier.rico@unirioja.es

En particular, dentro de los UAVs, los cuatrirrotores coplanarios (González-Morgado et al., 2023) se califican como sistemas sub-actuados con cuatro fuerzas de actuación independientes para controlar una configuración espacial de seis grados de libertad (Emran and Najjaran, 2018). De ahí que los sistemas de control primigenios, y la forma más habitual para su manejo en la práctica, recurran a estrategias en cascada que separan las dinámicas de orientación y posición. De hecho, ya que el lazo interno que controla la orientación opera entre 5-10 veces más rápido que el control externo de la posición, ambos sistemas de control suelen diseñarse de forma independiente (Roza and Maggiore, 2014).

A su vez, el control de la orientación se lleva a cabo en estructuras de lazos anidados que realimentan el ángulo girado por el UAV y su velocidad de giro (Mirtaba et al., 2023). En este caso, tiene especial relevancia la utilización de técnicas específicas para sistemas en cascada, ya que existe una interferencia importante entre las dinámicas de ambos lazos. Además, es posible explotar una versatilidad importante de las estructuras en cascada y es que permiten una rápida reacción a perturbaciones que quedan englobadas dentro del lazo interno (Visioli, 2006). En ese sentido, la utilización de la velocidad estimada a través de la IMU (*Inertial Measurement Unit* o unidad de medida inercial) es crucial para mejorar la estabilización del vehículo, por ejemplo ante ráfagas de viento, o para mitigar el acoplamiento que surge en el control de los tres ángulos y la altura.

Por otro lado, las señales de los sensores embarcados tienen muchas fluctuaciones debido a las vibraciones que se producen durante la operación del UAV. Además, los sensores MEMS (*Micro Electro Mechanical Systems*) de bajo coste utilizados en los drones introducen ruidos y errores de sesgo dinámicos importantes. Por todo ello, independientemente de la configuración de un buen sistema de estimación que fusione las medidas de varios sensores, es crucial que la realimentación no amplifique los ruidos de medida en la acción de control, para evitar que el actuador sature. Sin embargo, la limitación de la ganancia de realimentación restringe el comportamiento dinámico. Entonces, el empleo de estructuras en cascada resulta de gran utilidad para repartir adecuadamente el ancho de banda necesario entre los dos controladores de realimentación y así minimizar el impacto de los ruidos de medida (Sidi, 2001; Horowitz and Sidi, 1973).

Adicionalmente, el hecho de que la carga útil de los UAVs sea variable, así como la pérdida de potencia propulsora debida a la descarga de la batería, prefiguran a las técnicas de control robusto como adecuadas para el diseño de los elementos de control.

Con estos retos, en este trabajo se utilizará la arquitectura de control *model-matching* cascada y su metodología de diseño robusta asociada, descritas en Rico-Azagra and Gil-Martínez (2023), para llevar a cabo el control de actitud (ángulos de *roll* y *pitch*) en un multirrotores albergado en un banco de pruebas. Se plantearán especificaciones de control robusto de estabilidad, seguimiento de referencias, y rechazo de perturbaciones. El reparto del ancho de banda de control entre los lazos de realimentación perseguirá fundamentalmente un equilibrio entre la rapidez de respuesta, aportada por el lazo interno derivando ganancia de control a este lazo, y la incorporación mayor de rui-

dos provenientes del sensor adicional. El problema de control se resolverá en el marco del control robusto cuantitativo conocido como QFT, de sus siglas en inglés *Quantitative Feedback Theory* (García-Sanz, 2017). De forma particular, el diseño de control se abordará en el dominio discreto, con el fin de acercar la fase de diseño a la de implementación en la controladora de vuelo empleada en el UAV (Rico et al., 2022). El banco de pruebas de los experimentos alberga un cuatrirrotor que gira sin desplazarse dentro de una estructura cuyo prototipo original se presentó en Rico-Azagra et al. (2021); este tipo de bancos de pruebas resultan de gran utilidad en el desarrollo de nuevas estrategias de control (Chávez-Gudiño et al., 2023).

La exposición del trabajo se estructura como sigue. La Sección 2 describe el sistema multirrotores en el que se realizarán todos los experimentos. La Sección 3 detalla la arquitectura de control y el modelo lineal con incertidumbre paramétrica del sistema a controlar. La Sección 4 aborda el diseño QFT de los elementos de control y la verificación de las especificaciones planteadas. La Sección 5 ilustra la validez de la propuesta a través de diferentes experimentos en el sistema real. Finalmente, las conclusiones se presentan en la Sección 6.

2. Descripción del sistema cuatrirrotor

Un cuatrirrotor en forma de H con distancia entre ejes de 180 mm \times 135 mm con todo el equipamiento de vuelo a bordo se alberga en una estructura que permite su rotación libre sin producirse desplazamiento, tal y como se ilustra en la Figura 1. La plataforma original descrita en Rico-Azagra et al. (2021) se mejora tal y como se indica en Nájera et al. (2023), lo que atañe fundamentalmente a unos rotores (conjunto motor-hélice) de mayor potencia, un nuevo armazón (*frame*) y una controladora de vuelo de mejores prestaciones de cómputo, almacenamiento, paquetes de sensores e interfaces de comunicación. También se ha realizado un equilibrado del cuerpo para que su rotación se corresponda lo más posible con la de un vuelo libre.



Figura 1: Cuatrirrotor en plataforma de giro libre.

Las variables directamente implicadas en el control de la actitud del cuatrirrotor se muestran en la Figura 2, siendo:

- $[X_G, Y_G, Z_G]$ los ejes del sistema de referencia inercial terrestre.
- $[X_B, Y_B, Z_B]$ los ejes del sistema de referencia no inercial del cuerpo.

- $[\phi, \theta, \psi]$ los ángulos de Euler en el sistema de referencia inercial terrestre, expresados en grados. Se designarán según la nomenclatura inglesa *roll* (alabeo), *pitch* (cabeceo) y *yaw* (guiñada), teniendo en cuenta su uso generalizado.
- $[p, q, r]$ las velocidades de rotación en el sistema de referencia del cuerpo, expresadas en grados/segundo.
- $[M_1, M_2, M_3, M_4]$ las señales de control de los motores, expresadas en tanto por uno (p.u.). El reparto a cada motor se relaciona con las acciones de control en los cuatro grados de libertad del movimiento (ángulos y altura) tal que:

$$M_1 = u_z - u_\phi - u_\theta - u_\psi$$

$$M_2 = u_z + u_\phi - u_\theta + u_\psi$$

$$M_3 = u_z + u_\phi + u_\theta - u_\psi$$

$$M_4 = u_z - u_\phi + u_\theta + u_\psi,$$

siendo u_ϕ, u_θ y u_ψ las acciones de control para el giro en cada eje principal, y u_z la acción de control para mantener la altura si el vuelo fuera libre. Dado que el cuatrirrotor se encuentra sujeto, este valor u_z puede seleccionarse de forma libre. Habitualmente, u_z se pre-configura al valor 0,5 p.u. para dejar un margen simétrico de actuación para las rotaciones.

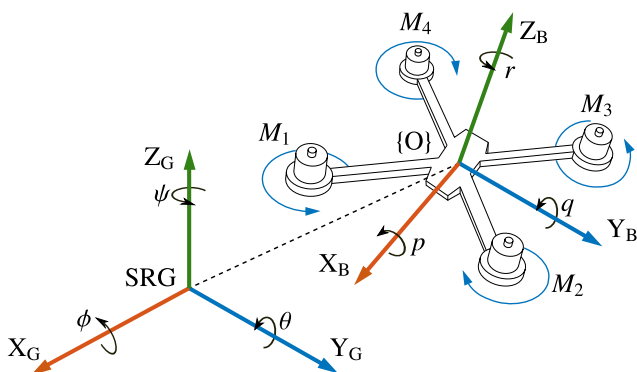


Figura 2: Sistemas de referencia y variables principales.

Además, existe un sistema de alimentación ininterrumpida, que es regulable para emular la descarga de las baterías durante un vuelo libre. Así, la configuración de valores de la tensión v_{bat} en el rango $[12,5 \text{ } 16]$ V afecta al sistema de propulsión como se indica en Nájera et al. (2023).

La controladora de vuelo embarcada es de diseño propio (Rico et al., 2022) y tiene unas prestaciones similares a las existentes actualmente en el mercado para UAVs de altas prestaciones; destacaremos las que atañen al presente trabajo. Su microcontrolador STM32F767 puede trabajar hasta 216 MHz y presenta una arquitectura Cortex-M7 que incorpora una unidad de coma flotante de doble precisión, lo que resulta fundamental para una adecuada implementación tanto de los controladores discretos como de los estimadores de estado. En cuanto a su paquete de sensores, incorpora cuatro IMUs ($2 \times$ ICM20689, ICM20602, MPU6000), dos magnetómetros (IST8310) y dos

barómetros (MS5611). Las medidas de los acelerómetros, giroscopios y magnetómetros se fusionan empleando un filtro Madgwick (Madgwick et al., 2011) que estima la orientación del UAV $[\phi, \theta, \psi]$. Las velocidades de rotación $[p, q, r]$, empleadas para cerrar los lazos internos en el control de cada ángulo, se estiman filtrando las medidas aportadas por los giroscopios con un filtro pasa-bajos de primer orden y frecuencia de corte de 100 Hz. El tiempo de ejecución de todo este subsistema de estimación y del sistema de control es configurable por el usuario, admitiendo diferentes tiempos de muestreo para cada uno de los niveles del sistema de control jerárquico. En este trabajo se empleará una frecuencia de trabajo de 1 kHz, común a los dos lazos en cascada (velocidad angular y ángulo rotado); esta frecuencia se considera adecuada al ancho de banda de control de la actitud.

El UAV mantiene una comunicación constante con la estación de tierra empleando dos enlaces de comunicación. Por un lado, la telemetría y todos los datos generados por el sistema de control se envían empleando un enlace USB, que permite transmitir datos a 500 Hz. Por otro lado, un enlace ST-Link configurado en modo SWD (*Serial Wire Debug*) permite programar el dispositivo y depurar en tiempo real su estado. Esta última opción es especialmente interesante en la etapa de desarrollo de nuevas arquitecturas de control, dado que permite analizar el estado de todas las variables internas del sistema y del flujo del programa. Además, una emisora radio control permite gobernar las referencias de la aeronave. Esta emisora se emplea para activar o desactivar los rotores y para simular vuelos en modo RPAS (*Remotely Piloted Aircraft System*).

Finalmente, se dispone de una serie de herramientas software desarrolladas en MATLAB-Simulink® tanto para la simulación del control del sistema, como para la recepción de datos de telemetría durante las pruebas reales. El simulador incluye un modelo no lineal completo del sistema a controlar, que engloba al sistema de propulsión y actuación, el del movimiento del sólido rígido, el estimador del estado y el software empleado en la controladora de vuelo. Para su desarrollo se han seguido unas pautas similares a las descritas en Rico-Azagra et al. (2021), incorporándose las nuevas características de los rotores (Nájera et al., 2023), eliminándose el par de giro debido al desplazamiento entre el centro de giro en la estructura (corte de los tres ejes físicos) y el centro de gravedad del cuerpo, y finalmente incorporándose los algoritmos de estimación y control con la nueva controladora. Hay que destacar que en este simulador se incluye el código empleado en el *firmware* en la controladora de vuelo, de manera que se simula de forma precisa el comportamiento de la misma.

3. Arquitectura de Control

Tradicionalmente, el control de actitud en este tipo de aeronaves se realiza empleando sistemas de control independientes, uno para el ángulo *roll* (ϕ) y otro para el ángulo *pitch* (θ), dado que el acoplamiento entre las dos variables debido a los pares giroscópicos es muy pequeño. A su vez, lo más frecuente es que cada ángulo se gobierne empleando lazos anidados en cascada (Mahony et al., 2012). En este trabajo, se propone el empleo de la arquitectura de control discreto de la Figura 3, donde cada ángulo se controla de forma independiente mediante lazos

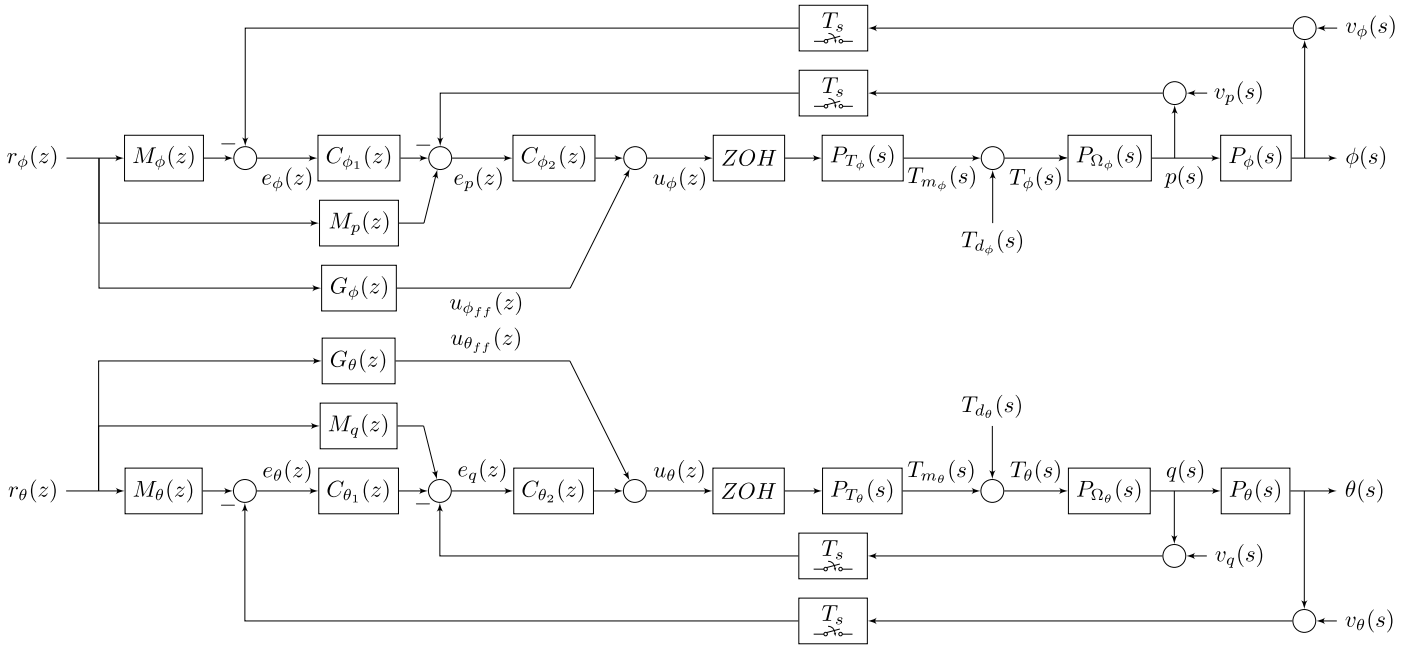


Figura 3: Estructura de control propuesta para gobernar los ángulos de roll (ϕ) y pitch (θ).

de realimentación anidados y también cadenas de prealimentación, estructura que de forma simplificada designaremos como arquitectura *model-matching* cascada.

La arquitectura *model-matching* cascada fue introducida en Rico-Azagra and Gil-Martínez (2023) para sistemas genéricos donde fueran accesibles medidas internas susceptibles de ser realimentadas, y aquí se aplica al control de la actitud de un multirroto. Su novedad con respecto a una arquitectura de control clásica con realimentación en cascada y solo un prefiltro en las referencias (r_ϕ y r_θ) es la sustitución del prefiltro por los bloques M_ϕ , M_p y G_ϕ para el control de ϕ , y por los bloques M_θ , M_q y G_θ para el control de θ . Los modelos M_ϕ y M_θ se corresponden con los modelos de comportamiento dinámico deseado para los ángulos, ϕ y θ , respectivamente. Los modelos M_p y M_q determinan el comportamiento de las velocidades de rotación, p y q , respectivamente. Los bloques G_ϕ y G_θ son controladores de prealimentación a diseñar para completar el seguimiento de referencias deseado en cada eje. El sistema de control está concebido para que ante un cambio en las referencias, r_ϕ y r_θ , los controladores de prealimentación, G_ϕ y G_θ , inyecten señales directamente en la entrada de la planta para que las variables realimentadas se comporten según los modelos, $M_\phi - M_p$ y $M_\theta - M_q$, respectivamente a cada grado de libertad. Los controladores de realimentación, $C_{\phi_1} - C_{\phi_2}$ y $C_{\theta_1} - C_{\theta_2}$, son los encargados de rechazar las perturbaciones y que los errores en el seguimiento de referencias, debidos a la incertidumbre en los modelos de las plantas, estén acotados según se especifique. Posteriormente se detallan estos requisitos de control de acuerdo a los postulados de la Teoría de Realimentación Cuantitativa (QFT), así como la metodología de diseño de los tres grados de libertad de cada eje (C_{ϕ_1} , C_{ϕ_2} y G_ϕ ; C_{θ_1} , C_{θ_2} y G_θ).

La arquitectura de control se implementa en tiempo discreto, por lo que sus señales y bloques se muestran en el dominio de la variable z . Así, en la Figura 3 también se incorporan los bloques retenedor de orden cero (ZOH) y los muestreadores,

siendo el tiempo de muestreo $T_s = 0,001$ s. El diseño de los elementos de control también se realizará en el dominio discreto. Para ello, primero se describen las plantas en la variable s , y posteriormente se calculan sus equivalentes discretos.

En la aplicación que nos ocupa, la función de transferencia que modela el sistema ubicado en el lazo de realimentación interno, que relaciona la acción de control, u_ϕ o u_θ , con la velocidad de rotación, p o q , se ha dividido en dos: P_{T_ϕ} y P_{Ω_ϕ} para el ángulo ϕ , y P_{T_θ} y P_{Ω_θ} para el ángulo θ . Así, las plantas P_{T_ϕ} y P_{T_θ} modelan la relación entre las acciones de control, u_ϕ y u_θ , y el par desarrollado por los rotores en cada uno de los ejes, que designaremos como T_{m_ϕ} para el eje X_B y T_{m_θ} para el eje Y_B . Después, las plantas P_{Ω_ϕ} y P_{Ω_θ} representan la relación entre el par total resultante en cada eje (compuesto por el par desarrollado por los rotores, T_{m_ϕ} y T_{m_θ} , y los pares debidos a las perturbaciones, T_{d_ϕ} y T_{d_θ}) y la velocidad de rotación en los ejes del cuerpo. Esta disposición de plantas es adecuada para modelar cómo las perturbaciones actúan en forma de par sobre el UAV. Entonces, respecto al método general propuesto en Rico-Azagra and Gil-Martínez (2023), la planta interna equivalente para el control de ϕ es $P_{\phi_2} = P_{T_\phi} P_{\Omega_\phi}$ para todas las señales externas excepto T_{d_ϕ} ; no obstante, las adaptaciones de las funciones para el rechazo de perturbaciones son fácilmente extrapolables. Estas equivalencias se repiten para el control de θ , donde $P_{\theta_2} = P_{T_\theta} P_{\Omega_\theta}$.

Los modelos de las plantas P_{T_ϕ} y P_{T_θ} están determinados por la dinámica asociada a la respuesta de los motores, la geometría del UAV, las hélices empleadas y el nivel de carga de la batería (Nájera et al., 2023). Tal como se ilustra en Rico-Azagra et al. (2021), todos estos fenómenos pueden aproximarse por sistemas de primer orden con incertidumbre paramétrica, que en este caso responden a

$$P_{T_\phi}(s) = \frac{4d_\phi k}{(\tau s + 1)}, \quad (1)$$

y

$$P_{T_\theta}(s) = \frac{4d_\theta k}{(\tau s + 1)}; \quad (2)$$

siendo: d_ϕ y d_θ las distancias del eje de giro de los motores a los ejes de rotación del cuerpo, X_B y Y_B , respectivamente; τ la constante de tiempo asociada a la dinámica de los *drivers* que gobiernan los motores; y k la ganancia que relaciona la acción de control en un motor, M_i , con la fuerza de propulsión generada por su hélice. La constante de tiempo τ y las distancias d_ϕ - d_θ son constantes ($\tau = 0,05$ s, $d_\phi = 0,09$ m y $d_\theta = 0,0675$ m), por lo que toda la incertidumbre paramétrica de los modelos es debida a la ganancia del sistema de propulsión, k . La relación obtenida experimentalmente entre la acción de control y el empuje de los rotores (Nájera et al., 2023) aquí se modela con polinomios de tercer grado, frente a los de segundo grado explicitados en el citado trabajo, para una mayor precisión. Y, finalmente, la ganancia k se corresponde con la derivada de dichos polinomios particularizada para el punto de operación, que depende de u_z y de la tensión de la batería, v_{bat} . La incertidumbre identificada es

$$k \in [6,8170, 11,3616], \quad (3)$$

medida en N/p.u. y contempla tensiones v_{bat} entre 12,5 V y 15 V, así como acciones u_z entre 0,25 p.u. y 0,75 p.u.

El modelo que relaciona el par resultante con la velocidad de rotación suele aproximarse por el término diagonal correspondiente de la matriz de inercias y un integrador. En este caso, dado que el UAV puede transportar diversas cargas que afectan a la inercia del mismo, se opta por emplear los modelos

$$P_{\Omega_\phi}(s) = \frac{180/\pi}{I_{xx}s}; \quad I_{xx} \in [0,75, 1,25] \times 0,0014, \quad (4)$$

y

$$P_{\Omega_\theta}(s) = \frac{180/\pi}{I_{yy}s}; \quad I_{yy} \in [0,75, 1,25] \times 0,025; \quad (5)$$

donde la incertidumbre de los parámetros de la inercia, I_{xx} e I_{yy} , se expresa como una variación porcentual ($\pm 25\%$) con respecto de los valores nominales: $I_{xx,o} = 0,0014$ kg m² e $I_{yy,o} = 0,025$ kg m². El factor $180/\pi$ se emplea para expresar la velocidad angular en °/s, en lugar de en rad/s.

Por último, la relación entre las velocidades angulares y los ángulos que definen la actitud del UAV se modela mediante integradores puros:

$$P_\phi(s) = \frac{1}{s}, \quad P_\theta(s) = \frac{1}{s}. \quad (6)$$

Para abordar los diseños de control en QFT, se discretiza el dominio de incertidumbre paramétrica. En este caso, se emplean dos vectores independientes para cada eje, \mathbf{q}_ϕ y \mathbf{q}_θ , que contienen los parámetros con incertidumbre: $\mathbf{q}_\phi = [k, I_{xx}]$ y $\mathbf{q}_\theta = [k, I_{yy}]$. Considerando un conjunto finito de posibles valores de los dos parámetros en cada eje, se determinan los conjuntos \mathcal{Q}_ϕ y \mathcal{Q}_θ en \mathbb{R}^2 . Entonces, el diseño de control robusto deberá garantizar que, en cada eje, todas las especificaciones se cumplen para todas las posibles plantas en el dominio de incertidumbre. En concreto, para el control del ángulo *roll*, el conjunto de plantas se designa: $P_{T_\phi}(s; \mathbf{q}_\phi)$, $P_{\Omega_\phi}(s; \mathbf{q}_\phi)$, $P_\phi(s)$;

$\forall \mathbf{q}_\phi \in \mathcal{Q}_\phi$, $\mathcal{Q}_\phi \subset \mathbb{R}^2$. Y el conjunto homólogo para el control del ángulo *pitch*: $P_{T_\theta}(s; \mathbf{q}_\theta)$, $P_{\Omega_\theta}(s; \mathbf{q}_\theta)$, $P_\theta(s)$; $\forall \mathbf{q}_\theta \in \mathcal{Q}_\theta$, $\mathcal{Q}_\theta \subset \mathbb{R}^2$.

Para el diseño de los controladores se consideran los equivalentes discretos del sistema a controlar. A continuación se detallan los correspondientes al ángulo *pitch*, obteniéndose de manera homóloga los del ángulo *roll*. La Figura 4 ilustra la arquitectura de control equivalente en el dominio discreto, donde la planta $P_{T_\theta}(z)$ se calcula tal que

$$P_{T_\theta}(z; \mathbf{q}_\theta) = \mathcal{Z}\{ZOH(s)P_{T_\theta}(s; \mathbf{q}_\theta)\}; \quad \mathbf{q}_\theta \in \mathcal{Q}_\theta, \quad (7)$$

siendo

$$ZOH(s) = \frac{1 - e^{-sT_s}}{s}; \quad (8)$$

lo que da lugar a

$$P_{T_\theta}(z; \mathbf{q}_\theta) = \frac{4d_\theta k \left(1 - e^{-\frac{T_s}{\tau}}\right)}{\left(z - e^{-\frac{T_s}{\tau}}\right)}; \quad \mathbf{q}_\theta = [k, I_{yy}] \in \mathcal{Q}_\theta. \quad (9)$$

Los modelos discretos de las plantas $P_{\Omega_\theta}(z)$ y $P_\theta(z)$ se corresponden con

$$P_{\Omega_\theta}(z; \mathbf{q}_\theta) = \frac{180/\pi}{I_{xx}} \frac{zT_s}{z-1}; \quad \mathbf{q}_\theta = [k, I_{yy}] \in \mathcal{Q}_\theta, \quad (10)$$

y

$$P_\theta(z) = \frac{T_s z}{z-1}. \quad (11)$$

El uso de un solo grado de libertad en la prealimentación, G_θ , condiciona el modelo deseado para la velocidad de rotación tal que $M_q = M_\theta/P_\theta$. Sustituyendo esta restricción y el valor (11) de la planta en el bloque $M_q(z)$ de la Figura 3, y después agrupando el factor común a dos de las ramas de prealimentación, $M_q(z)$, se obtiene la estructura de bloques de prealimentación equivalente mostrada en la Figura 4. Esta misma arquitectura de control se replica para el gobierno del ángulo ϕ .

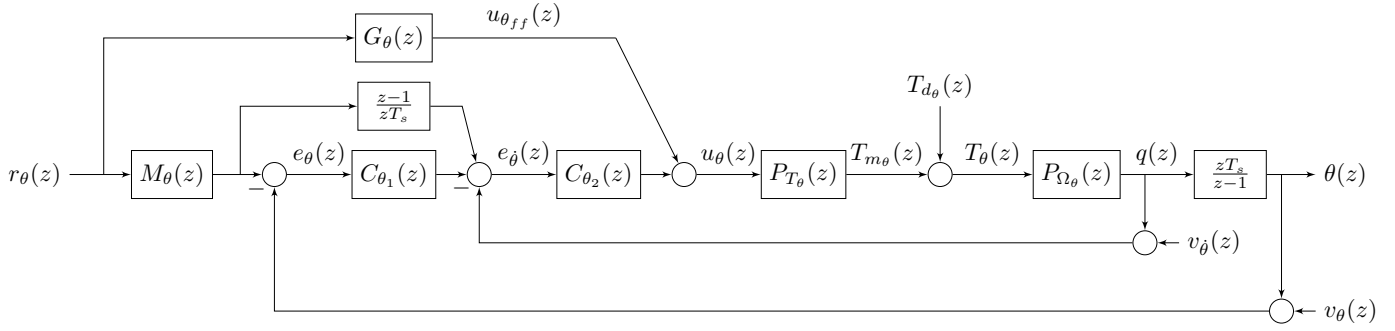
4. Diseño de controladores robustos

En esta sección se aborda el diseño de los controladores C_{ϕ_1} , C_{ϕ_2} , G_ϕ , C_{θ_1} , C_{θ_2} y G_θ empleando la metodología de diseño propuesta en ?. Esta metodología se fundamenta en las premisas del control robusto cuantitativo o QFT, por lo que permite garantizar las especificaciones de control a pesar de la incertidumbre. Las especificaciones se establecen en el dominio de la frecuencia discreta $\omega \in \left[0, \frac{\pi}{T_s}\right]$, acotándose la magnitud de la respuesta frecuencial de las funciones de lazo cerrado de interés.

Se elige el siguiente modelo discreto de comportamiento deseado para ϕ/r_ϕ y θ/r_θ :

$$M_\phi(z) = M_\theta(z) = \frac{3,384e - 05}{(z^2 - 1,988z + 0,9884)}, \quad (12)$$

que busca respuestas críticamente amortiguadas con un tiempo de establecimiento $t_{s2\%} = 1$ s. Se desea evitar respuestas subamortiguadas conforme a un modo de vuelo poco agresivo.

Figura 4: Sistema de control digital equivalente para gobernar el ángulo pitch (θ).

Después, la dispersión del error de seguimiento (*tracking*) debido a la incertidumbre se acota imponiendo una tolerancia superior a la magnitud de las respuestas frecuenciales de e_ϕ/r_ϕ

$$\left| \frac{M_\theta(z) - G_\theta P_{T_\theta} P_{\Omega_\theta} P_\theta(z)}{1 + C_{\phi_2} P_{T_\phi} P_{\Omega_\phi}(z) + C_{\phi_1} C_{\phi_2} P_{T_\phi} P_{\Omega_\phi} P_\phi(z)} \right| \leq B_r(\omega), \forall \mathbf{q}_\phi \in \mathbf{Q}_\phi, z = e^{j\omega T_s}, \omega \in \left[0, \frac{\pi}{T_s}\right], \quad (13)$$

y de e_θ/r_θ

$$\left| \frac{M_\theta(z) - G_\theta P_{T_\theta} P_{\Omega_\theta} P_\theta(z)}{1 + C_{\theta_2} P_{T_\theta} P_{\Omega_\theta}(z) + C_{\theta_1} C_{\theta_2} P_{T_\theta} P_{\Omega_\theta} P_\theta(z)} \right| \leq B_r(\omega), \forall \mathbf{q}_\theta \in \mathbf{Q}_\theta, z = e^{j\omega T_s}, \omega \in \left[0, \frac{\pi}{T_s}\right], \quad (14)$$

eligiéndose

$$B_r(\omega) = \left| \frac{0,0969s(0,0125s + 1)}{(0,125s + 1)(0,375s + 1)} \right|_{s=j\omega}. \quad (15)$$

Esta tolerancia consigue que, para un cambio en la referencia de tipo escalón, la desviación máxima de la salida con respecto del modelo se produzca a los 0,2 segundos y sea como máximo del $\pm 13\%$.

La estabilidad robusta se define acotando la magnitud de la respuesta frecuencial de las funciones de sensibilidad complementaria de los lazos externos, T_{ϕ_1} y T_{θ_1} , respectivamente, tal que

$$\left| \frac{C_{\phi_1} C_{\phi_2} P_{T_\phi} P_{\Omega_\phi} P_\phi(z)}{1 + C_{\phi_2} P_{T_\phi} P_{\Omega_\phi}(z) + C_{\phi_1} C_{\phi_2} P_{T_\phi} P_{\Omega_\phi} P_\phi(z)} \right| \leq B_{s_1}(\omega), \forall \mathbf{q}_\phi \in \mathbf{Q}_\phi, z = e^{j\omega T_s}, \omega \in \left[0, \frac{\pi}{T_s}\right], \quad (16)$$

$$\left| \frac{C_{\theta_1} C_{\theta_2} P_{T_\theta} P_{\Omega_\theta} P_\theta(z)}{1 + C_{\theta_2} P_{T_\theta} P_{\Omega_\theta}(z) + C_{\theta_1} C_{\theta_2} P_{T_\theta} P_{\Omega_\theta} P_\theta(z)} \right| \leq B_{s_1}(\omega), \forall \mathbf{q}_\theta \in \mathbf{Q}_\theta, z = e^{j\omega T_s}, \omega \in \left[0, \frac{\pi}{T_s}\right], \quad (17)$$

y de los lazos internos, T_{ϕ_2} y T_{θ_2} , tal que

$$\left| \frac{C_{\phi_2} P_{T_\phi} P_{\Omega_\phi}(z)}{1 + C_{\phi_2} P_{T_\phi} P_{\Omega_\phi}(z)} \right| \leq B_{s_2}(\omega), \forall \mathbf{q}_\phi \in \mathbf{Q}_\phi, z = e^{j\omega T_s}, \omega \in \left[0, \frac{\pi}{T_s}\right], \quad (18)$$

$$\left| \frac{C_{\theta_2} P_{T_\theta} P_{\Omega_\theta}(z)}{1 + C_{\theta_2} P_{T_\theta} P_{\Omega_\theta}(z)} \right| \leq B_{s_2}(\omega), \forall \mathbf{q}_\theta \in \mathbf{Q}_\theta, z = e^{j\omega T_s}, \omega \in \left[0, \frac{\pi}{T_s}\right]. \quad (19)$$

Y eligiendo las cotas $B_{s_1}(\omega) = B_{s_2}(\omega) = 1,46$ se persigue que el margen de fase sea como mínimo de 40° en ambos lazos (Rico-Azagra et al., 2018) de los dos ejes de giro.

Por último, el rechazo robusto de perturbaciones se establece acotando las magnitudes de las respuestas frecuenciales de e_ϕ/T_{ϕ_d} tal que

$$\left| \frac{P_{\Omega_\phi} P_\phi(z)}{1 + C_{\phi_2} P_{T_\phi} P_{\Omega_\phi}(z) + C_{\phi_1} C_{\phi_2} P_{T_\phi} P_{\Omega_\phi} P_\phi(z)} \right| \leq B_d(\omega), \forall \mathbf{q}_\phi \in \mathbf{Q}_\phi, z = e^{j\omega T_s}, \omega \in \left[0, \frac{\pi}{T_s}\right], \quad (20)$$

y de e_θ/T_{θ_d} tal que

$$\left| \frac{P_{\Omega_\theta} P_\theta(z)}{1 + C_{\theta_2} P_{T_\theta} P_{\Omega_\theta}(z) + C_{\theta_1} C_{\theta_2} P_{T_\theta} P_{\Omega_\theta} P_\theta(z)} \right| \leq B_d(\omega), \forall \mathbf{q}_\theta \in \mathbf{Q}_\theta, z = e^{j\omega T_s}, \omega \in \left[0, \frac{\pi}{T_s}\right], \quad (21)$$

eligiéndose

$$B_d(\omega) = \left| \frac{k_d \omega_n^2 s}{(s + \omega_n)^2} \right|_{s=j\omega} = \left| \frac{32258s}{(s + 8)^2} \right|_{s=j\omega}. \quad (22)$$

Esta especificación persigue que un par de perturbación constante de 0,01 Nm produzca una desviación máxima del ángulo de 15° . Esto es equivalente a que al aplicar una carga de 5 g en el extremo de uno de los brazos del dron, la desviación angular máxima sea de 5° .

El vector de frecuencias ω discretas

$$\Omega = [0,1, 0,3, 0,5, 0,8, 1, 2, 3, 5, 8, 10, 20, 50, 100] \text{ rad/s}, \quad (23)$$

se emplea para el cálculo de los *bounds* QFT tal y como se describe en Rico-Azagra and Gil-Martínez (2023); se utilizan funciones en la herramienta CAD (Borghesani et al., 2002), y funciones desarrolladas en (Rico-Azagra and Gil-Martínez, 2021) para la especificación del error de seguimiento.

Los *bounds*, característicos de QFT, son acotaciones para las funciones de lazo abierto en cada frecuencia (23) representadas en un diagrama magnitud-fase, que sustituyen a las especificaciones de lazo cerrado (12)-(22). Así, estos *bounds* guiarán primero el diseño (*loopshaping*) de las funciones de lazo de la realimentación interna, $L_{\theta_2}(j\omega)$, y externa, $L_{\theta_1}(j\omega)$, y después de la función de prealimentación, $G_{\theta}(j\omega)$; de manera análoga se procede en el otro grado de libertad de giro con las funciones $L_{\phi_2}(j\omega)$, $L_{\phi_1}(j\omega)$ y $G_{\phi}(j\omega)$. Considérense las funciones de los lazos de realimentación interna en sendos ejes:

$$L_{\phi_2} = C_{\phi_2} P_{T_{\phi}} P_{\Omega_{\phi}}, \quad (24)$$

$$L_{\theta_2} = C_{\theta_2} P_{T_{\theta}} P_{\Omega_{\theta}}; \quad (25)$$

y las funciones de los lazos de realimentación externa en sendos ejes:

$$L_{\phi_1} = C_{\phi_1} C_{\phi_2} P_{T_{\phi}} P_{\Omega_{\phi}} P_{\phi}, \quad (26)$$

$$L_{\theta_1} = C_{\theta_1} C_{\theta_2} P_{T_{\theta}} P_{\Omega_{\theta}} P_{\theta}. \quad (27)$$

Existirán infinitas combinaciones $C_{\theta_1} - C_{\theta_2}$ que satisfacen las especificaciones robustas (12)-(22) representadas por los *bounds* para $L_{\theta_1}(j\omega)$ y $L_{\theta_2}(j\omega)$; lo mismo ocurre para la rotación ϕ , que por simplicidad se omite en el siguiente razonamiento. Entonces, es preciso establecer previamente la banda frecuencial de trabajo de cada lazo, eligiendo una frecuencia de conmutación ω_{sw} entre ambos. Así L_{θ_2} aportará la realimentación demandada por los *bounds* en la banda $\omega \geq \omega_{sw}$ y $L_{\theta_1}(j\omega)$ en la banda $\omega < \omega_{sw}$. Rico-Azagra and Gil-Martínez (2023) aboga por la elección de ω_{sw} en base a lograr una menor amplificación global en u_{θ} de los ruidos de medida v_{θ} y v_q inherentes a las variables estimadas (ángulo y velocidad de rotación). Sin desatender este objetivo, en este trabajo se considera que $\omega_{sw} = 1$ rad/s proporciona un reparto adecuado del ancho de banda de control demandado por las especificaciones ($\omega_{BW} = 10$ rad/s), siendo el lazo interno 10 veces más rápido que el externo.

Entonces, siguiendo el procedimiento de diseño propuesto en Rico-Azagra and Gil-Martínez (2023) se realiza el *loopshaping* de $L_{\theta_2}(j\omega)$ y $L_{\theta_1}(j\omega)$, primero, y de $G_{\theta}(j\omega)$, después; de manera análoga se diseñan los grados de libertad de la rotación ϕ . En el Apéndice A se incluyen las figuras que muestran la apariencia final de dichos diseños en el marco de QFT, y un breve resumen del procedimiento de diseño. Finalmente, para la rotación θ , se obtienen los controladores de realimentación

$$C_{\theta_1}(z) = \frac{k_1 z(z - c_1)(z - c_2)}{(z - 1)(z - p_1)(z - p_2)}, \quad (28)$$

$$C_{\theta_2}(z) = \frac{k_2(z - c_3)}{(z - p_3)(z - p_4)}; \quad (29)$$

y el controlador de prealimentación

$$G_{\theta}(z) = \frac{k_3(z - 1)^2(z - \alpha_1 + j\beta_1)(z - \alpha_1 - j\beta_1)}{(z - p_5)(z - p_6)(z - \alpha_2 + j\beta_2)(z - \alpha_2 - j\beta_2)}. \quad (30)$$

Para la rotación ϕ , se obtienen los controladores de realimentación

$$C_{\phi_1}(z) = \frac{k_4 z(z - c_4)(z - c_5)}{(z - 1)(z - p_7)(z - p_8)}, \quad (31)$$

$$C_{\phi_2}(z) = \frac{k_5 z^2(z - c_6)}{(z - p_9)(z - \alpha_3 + j\beta_3)(z - \alpha_3 - j\beta_3)}; \quad (32)$$

y el controlador de prealimentación

$$G_{\phi}(z) = \frac{k_6(z - 1)^2}{(z - \alpha_4 + j\beta_4)(z - \alpha_4 - j\beta_4)}. \quad (33)$$

Los parámetros: ganancia (k_i), ceros (c_i) y polos (p_i) reales, y parte real (α_i) e imaginaria (β_i) de los polos y ceros complejos conjugados, se proporcionan en la Tabla B.1 del Apéndice B. Varios detalles relativos a su implementación se discuten en el citado apéndice.

La fase de diseño robusto se completa con la verificación de las especificaciones en un mayor número de frecuencias que las empleadas para el cálculo de *bounds* (23) y para distintos casos $\mathbf{q}_{\theta} = [k, I_{yy}]$ en el espacio de incertidumbre $\mathcal{Q}_{\theta} \subset \mathbb{R}^2$, así como distintos casos $\mathbf{q}_{\phi} = [k, I_{xx}]$ en \mathcal{Q}_{ϕ} . Así, las Figuras 5(a)-(b) muestran cómo la magnitud frecuencial del error en cada grado de libertad (ϕ o θ), tanto en el seguimiento de referencias como en el rechazo de perturbaciones, se mantiene por debajo de las cotas $B_r(\omega)$ y $B_d(\omega)$, respectivamente. El análisis de estas figuras revela también cómo la especificación de rechazo de perturbaciones domina el comportamiento en baja frecuencia donde las respuestas de lazo cerrado se ubican junto a la cota $B_d(\omega)$ (hasta $\omega \approx 1$ para θ y hasta $\omega \approx 6$ para ϕ). Sin embargo, en medias-altas frecuencias domina la especificación de seguimiento de referencias (respuestas cerca de la cota $B_r(\omega)$ de error máximo). Comparando ambos grados de libertad, puede observarse cómo las respuestas en magnitud del error para θ se acercan más a las cotas de especificación que para ϕ , y hay una menor dispersión entre las respuestas para los distintos casos de plantas posibles. Esto es indicativo de que en este grado de libertad, θ , se satisface la especificación incurriendo en un menor sobre-diseño de los controladores de realimentación, lo que deriva en un controlador de prealimentación más complejo.

La Figura 5(c) muestra la respuesta frecuencial en magnitud de la sensibilidad complementaria del lazo interno (T_{ϕ_2} y T_{θ_2} , respectivamente, para cada grado de libertad) y externo (T_{ϕ_1} y T_{θ_1} , para cada grado de libertad), situándose todas ellas por debajo de $B_{s,1,2}(\omega)$, lo que garantiza un margen de fase de estabilidad mínimo de 40° . Nótese cómo el ancho de banda de lazo cerrado en el control de ϕ es algo mayor que para θ , corroborando el empleo de una mayor cantidad de realimentación en el primero.

Después, las Figuras 5(e) y (f) muestran la respuesta frecuencial de la magnitud de las funciones de lazo abierto, ilustrando cómo, para cada grado de libertad, se reparte frecuencialmente la cantidad de realimentación total, $|L_{\phi_1}(j\omega)|$ o $|L_{\theta_1}(j\omega)|$, entre sus respectivos lazos interno y externo. Así, por ejemplo para *pitch*, L_{θ_1} domina en baja frecuencia y a partir de $\omega_{sw} \approx 1$ rad/s comienza la desconexión de este lazo. Después, L_{θ_2} domina el control hasta el ancho de banda $\omega_{BW} \approx 10$ rad/s; este último, estrictamente, debe medirse en $|T_{\theta_2}(j\omega)|$ de la Figura 5(c). Un razonamiento paralelo puede aplicarse a las funciones de ϕ .

Finalmente, la Figura 5(d) presenta las respuestas frecuenciales de $|u_{\theta}/v_{\theta}|$ y $|u_{\phi}/v_{\phi}|$ para el ángulo *pitch* y de $|u_{\phi}/v_p|$ y $|u_{\theta}/v_{\phi}|$ para el ángulo *roll*, que muestran cómo afectan los ruidos de medida a la acción de control para el movimiento en cada grado de libertad. En cada uno de estos, las respuestas frecuenciales de lazo cerrado del lazo interno y externo presentan magnitud negativa, denotando una atenuación, no solo del

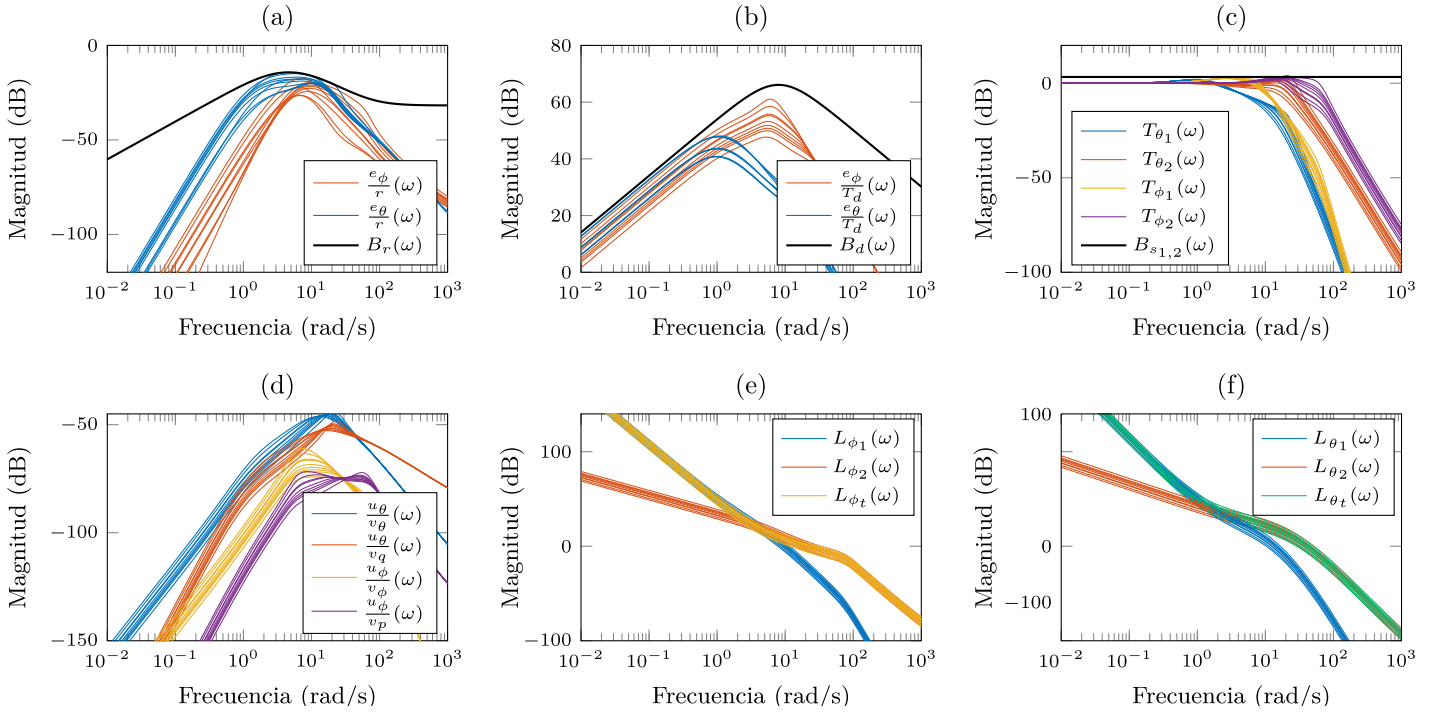


Figura 5: Respuestas frecuenciales en magnitud: (a) error en el seguimiento del modelo para referencias, (b) desviación de la salida para perturbaciones, (c) estabilidad, (d) transmisión de ruidos de medidas angulares y rotacionales a la acción de control, (e) reparto de la realimentación entre lazos para *roll*, (f) *idem* para *pitch*.

ruido propio de los sensores inerciales de bajo coste, sino fundamentalmente del capturado por estos debido a las vibraciones originadas por los rotores. Se observa cómo en alta frecuencia $|u_\theta/v_q|$ presenta mayor magnitud que $|u_\theta/v_\theta|$, dado que el lazo L_{θ_2} es el que trabaja en dichas frecuencias; lo mismo ocurre para las variables que afectan a ϕ . Las soluciones alcanzadas ofrecen una ganancia de realimentación que siempre es menor que si se empleará un solo controlador de realimentación, cuya $|u_\theta/v_\theta|$ (o $|u_\phi/v_\phi|$) sería mayor que la reflejada en la figura ya que en el caso cascada parte de esta ganancia se transfiere al lazo interno, resultando una menor amplificación total de ruidos de medida.

La Figura 6 muestra los resultados arrojados por el simulador no lineal del sistema cuando se emplea la arquitectura de control propuesta. En concreto, se ilustra un experimento dinámico en el que se configura la tensión de la batería a 13 V y se aplican cambios no simultáneos en las referencias de los ángulos *roll* y *pitch* con amplitudes de $\pm 40^\circ$. En la primera fila de gráficos puede comprobarse cómo los dos ángulos siguen la referencia según el modelo propuesto en la especificación, dando lugar a respuestas temporales que se encuentran dentro de las dos bandas de tolerancia. En la segunda fila de gráficos se muestran las velocidades angulares, advirtiéndose cómo el comportamiento del sistema es muy similar al marcado por los modelos de comportamiento M_p y M_q , que actúan como referencias para el lazo interno. Finalmente, la última fila de gráficos muestra las acciones de control, comprobándose cómo la prealimentación marca la tendencia de la acción de control total. Esto es debido a que en la simulación no se aplican perturbaciones que distorsionarían el comportamiento de forma significativa, mientras que en el seguimiento de referencias los controladores de realimentación únicamente actúan para combatir la incertidumbre paramétrica en los modelos de las plantas. El ruido aprecia-

do es debido a las fuentes de ruido, presentes en el simulador; ruidos que son transmitidos a la acción de control total por los controladores de realimentación.

5. Resultados en el sistema real

La Figura 7 muestra el comportamiento temporal del giro en *pitch* para el seguimiento de referencias en el sistema real. Durante el experimento se estimula la referencia r_θ con cambios de tipo escalón y amplitud $\pm 40^\circ$ en diferentes instantes de tiempo. Téngase en cuenta que este es el ángulo máximo que puede tomar el UAV cuando se desea un vuelo poco agresivo. La figura muestra el comportamiento del UAV cuando este es alimentado a 13, 14 y 15 V, emulando las condiciones de vuelo para diferentes niveles de carga de la batería. Se observa cómo las tres respuestas $\theta(t)$ se constriñen entre una cota superior e inferior; estas se corresponden con la respuesta temporal del modelo nominal M_θ (12) aumentada y minorada, respectivamente, con la respuesta de la función de transferencia B_r (15), que acotaba el error alrededor del modelo nominal debido a la incertidumbre. Las pequeñas violaciones de las cotas se atribuyen a la no correspondencia exacta tiempo-frecuencia, siendo este último dominio en el que estrictamente se cumplen las especificaciones (ver Figura 5). Además, las vibraciones del UAV provocan pequeñas desviaciones del ángulo con respecto de la consigna. En la Figura 7 también se muestran las tres respuestas $q(t)$, que se aglutinan en torno a la respuesta del modelo M_q ; nótese que para la variable interna no se planteaban especificaciones. Por último, se muestra la evolución temporal de la acción de control total, $u_\theta(t)$, en los tres experimentos, concluyéndose que el ruido de medida observado en $q(t)$ no se transmite significativamente a la acción de control y, por tanto, la inclusión del lazo

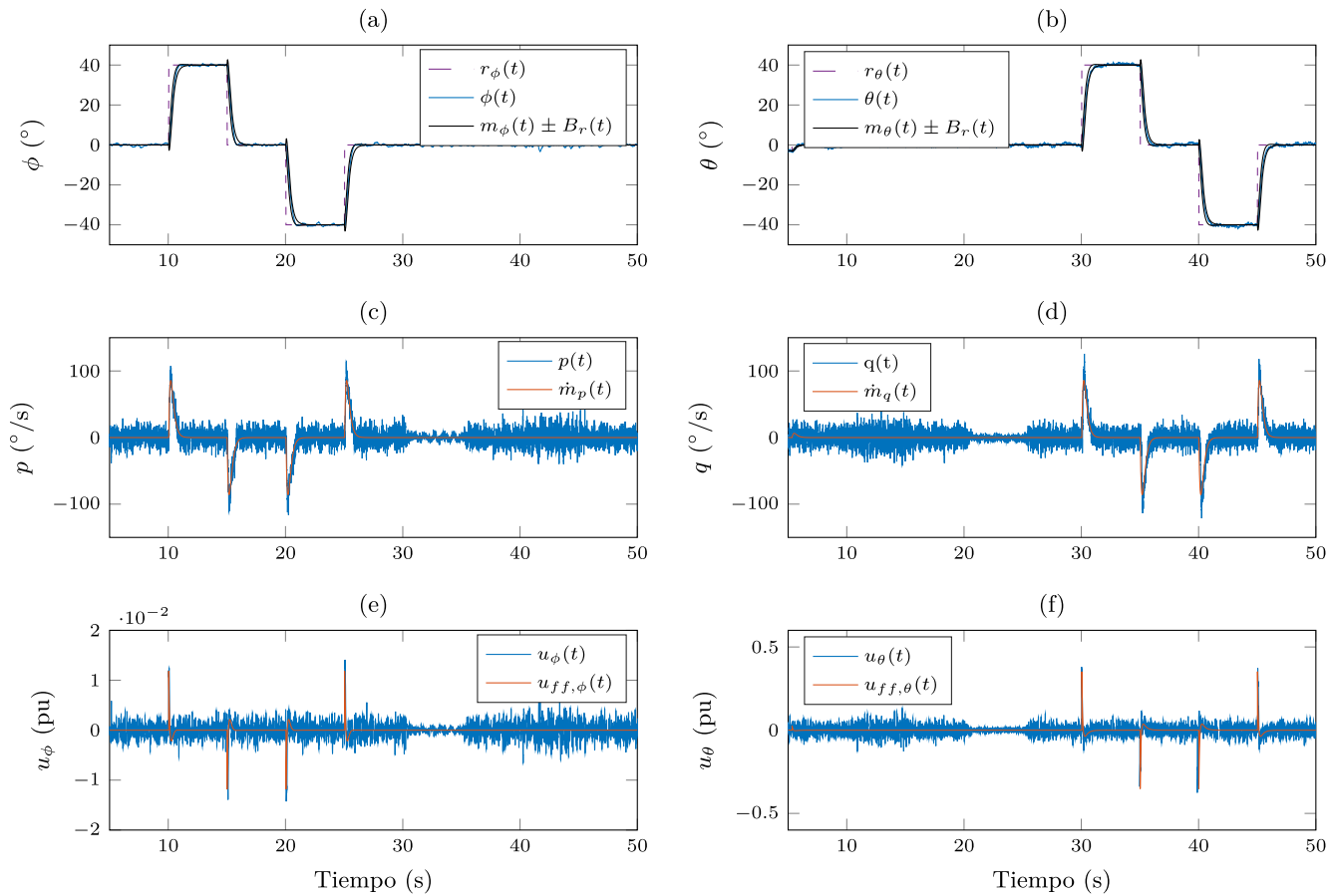


Figura 6: Respuestas temporales obtenidas en el simulador no lineal: ángulos de (a) *pitch* y (b) *roll*, velocidades angulares de (c) *pitch* y (d) *roll*, acciones de control para (e) *pitch* y (f) *roll*.

de realimentación interno, lejos de ser pernicioso, ha permitido el diseño de controladores más sencillos y de mucha menor ganancia que si se usara un solo lazo de realimentación. Junto a la acción de control $u_\theta(t)$, se muestra también la acción de control aportada exclusivamente por la prealimentación, $u_{ff,\theta}(t)$, que es común a los tres experimentos. Puede interpretarse que esta define la tendencia de la acción de control que es necesaria para lograr el comportamiento del modelo, M_θ , cuando no existe incertidumbre, y esta última es corregida con la acción realimentada, diferente para los tres experimentos.

Para verificar el comportamiento del sistema frente a perturbaciones se configura un experimento en el que se mantiene la referencia constante, $r_\theta(t) = 0^\circ$, y se aplica una perturbación en forma de par a los 15 segundos del inicio del experimento. Esta perturbación se genera colocando una masa de 30 g en el extremo más alejado del eje Y_B del aro interno de la estructura que soporta al UAV. Esto se traduce en la aplicación de un par de 0,0736 Nm. Los resultados de este experimento para tres configuraciones de tensión en la batería, v_{bat} , se muestran en la Figura 8. Como cabía esperar, en el experimento realizado con una tensión de alimentación más baja ($v_{bat} = 12,5$ V) se advierte una mayor desviación del ángulo respecto a su consigna. Este hecho es debido a que para esta configuración el sistema presenta menor ganancia. Por último, reseñar cómo, al igual que en el experimento de *tracking*, los ruidos de medida que se aprecian en la acción de control u_θ son muy pequeños.

6. Conclusiones

Se ha llevado a cabo el control de actitud (ángulos de *roll* y *pitch*) de un cuadricóptero de acuerdo a una arquitectura de control con lazos anidados de realimentación y caminos de prealimentación. Se han diseñado de acuerdo a los postulados de la Teoría de Realimentación Cuantitativa (QFT) dos controladores de realimentación y uno de prealimentación para cada eje de giro y son, por tanto, robustos. Se busca robustez frente a posibles cambios en la carga útil transportada por el UAV y frente a la pérdida de propulsión debida a la descarga progresiva de las baterías durante un vuelo. Las especificaciones robustas planteadas han sido de estabilidad, rechazo de perturbaciones de par y seguimiento de referencias angulares. Los diseños se han realizado en el dominio de la frecuencia discreta, lo que aproxima la fase de diseño a la de implementación en la controladora de vuelo. Esta última se embarca en un cuadricóptero que gira sin desplazarse dentro de una estructura diseñada a tal efecto. Los resultados han sido satisfactorios, observándose cómo el seguimiento de referencias para diferentes plantas dentro del espacio de la incertidumbre se acota entre las bandas de tolerancia establecidas en las especificaciones de diseño. Del mismo modo, el rechazo robusto de perturbaciones en forma de par muestra una desviación máxima inferior a la contemplada en la especificación de diseño.

Algunas singularidades de la arquitectura de control se especifican a continuación. En los lazos de prealimentación,

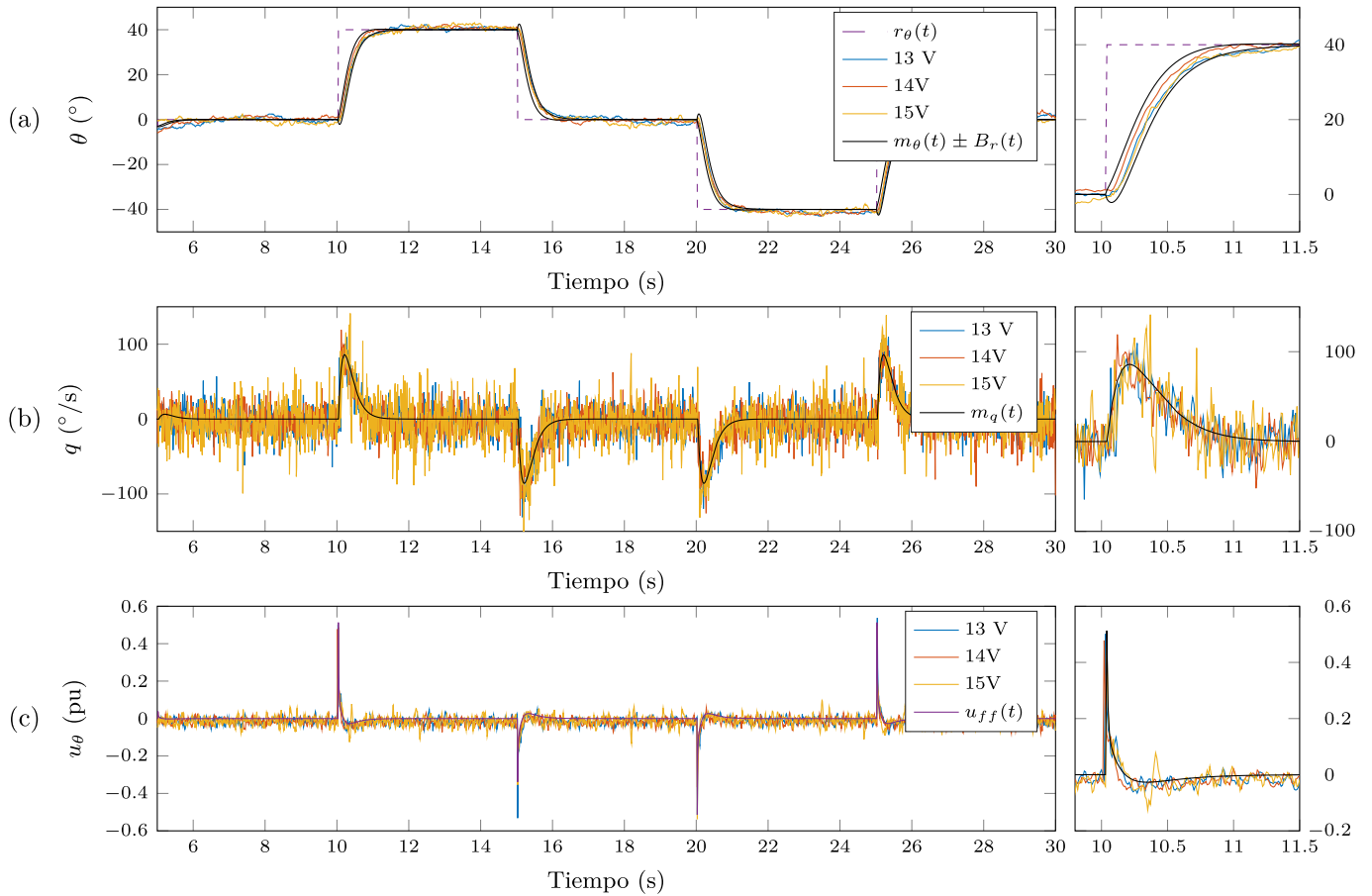


Figura 7: Respuestas temporales en el sistema real para cambios en la referencia: (a) ángulo *pitch*, (b) velocidad angular en *pitch*, (c) acción de control.

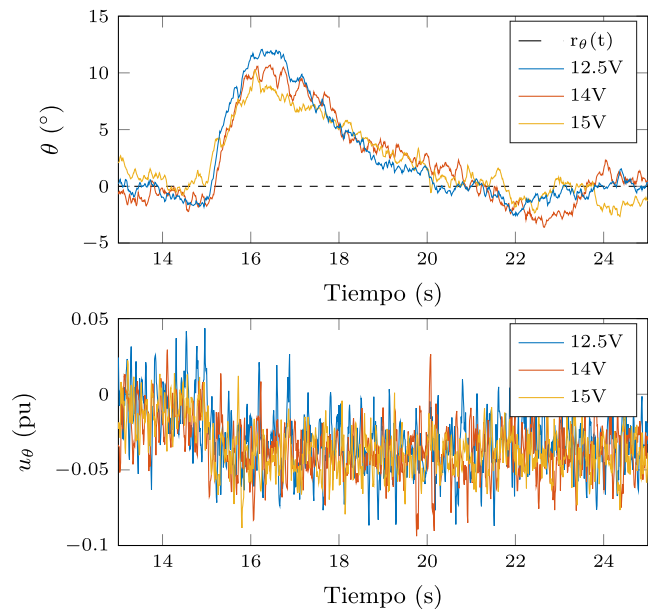


Figura 8: Respuestas temporales frente a perturbaciones: (arriba) ángulo *pitch*, (abajo) acción de control, en el sistema real.

además del elemento de control a diseñar, se incluyen los modelos de comportamiento deseado para el ángulo y la velocidad de rotación ante un cambio en la referencia. Como se demuestra en trabajos anteriores, estos caminos de prealimentación reducen la cantidad de realimentación necesaria para cumplir las es-

pecificaciones. Más aún, esta se reparte convenientemente entre dos controladores de realimentación de menor ganancia que si se empleara uno solo. Así es posible lograr un control agresivo del ángulo sin que los ruidos de medida se amplifiquen peligrosamente en la acción de control.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias a la Unión Europea (ERDF Operational Programme for La Rioja 2014-2020) y la Agencia de Desarrollo Económico para La Rioja (ADER) a través de la ayuda 2017-I-IDD-00035, y también gracias a la Universidad de La Rioja a través de la ayuda REGI 22/40.

Referencias

- Borghesani, C., Chait, Y., Yaniv, O., 2002. Quantitative Feedback Theory Toolbox. For use with Matlab. 2nd Ed. Terasoft: San Diego, CA, USA.
- Chávez-Gudiño, M. A., Concha-Sánchez, A., Maciel-Barboza, F. M., Gadi, S. K., Thenozhi, S., Jiménez Betancourt, R., 2023. Development and control of a low cost 2 dof laboratory helicopter. RIAI - Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 20. DOI: 10.4995/riai.2023.18942
- Elso, J., Ostolaza, J. X., 2021. Automatic synthesis of feedforward elements in quantitative feedback theory. International Journal of Robust and Nonlinear Control 31 (12), 5525 – 5540. DOI: 10.1002/rnc.5515
- Emran, B. J., Najjaran, H., 2018. A review of quadrotor: An underactuated mechanical system. Annual Reviews in Control 46, 165 – 180. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2018.10.009

- García-Sanz, M., 2017. Robust Control Engineering: Practical QFT Solutions. CRC Press.
DOI: 10.4324/9781315394985
- González-Morgado, A., Álvarez Cía, C., Heredia Benot, G., Ollero Baturone, A., 2023. UAV fully-actuated: modelo, control y comparación con configuración coplanaria. Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 2023 (4), 401–411.
DOI: 10.4995/riai.2023.19348
- Han, X., Chen, Z., Feng, Y., Xie, J., Wei, X., Wei, L., 2023. Cascade active disturbance rejection control of single-rod electrohydrostatic actuator. Asian Journal of Control 25 (3), 1888 – 1904.
DOI: 10.1002/asjc.2815
- Horowitz, I., Sidi, M., 1973. Synthesis of cascaded multiple-loop feedback systems with large plant parameter ignorance. Automatica 9 (5), 589–600.
DOI: 10.1016/0005-1098(73)90044-7
- Madgwick, S. O., Harrison, A. J., Vaidyanathan, R., 2011. Estimation of imu and marg orientation using a gradient descent algorithm.
DOI: 10.1109/ICORR.2011.5975346
- Mahony, R., Kumar, V., Corke, P., 2012. Multirotor aerial vehicles: Modeling, estimation, and control of quadrotor. IEEE Robotics & Automation Magazine 19 (3), 20–32.
DOI: 10.1109/MRA.2012.2206474
- Mandali, A., Dong, L., 2022. Modeling and cascade control of a pneumatic positioning system. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME 144 (6).
DOI: 10.1115/1.4053966
- Mandra, S., 2014. Comparison of automatically tuned cascade control systems of servo-drives for numerically controlled machine tools. Elektronika ir Elektrotechnika 20 (3), 16 – 23.
DOI: 10.5755/j01.eee.20.3.2788
- Mirtaba, M., Jeddi, M., Nikoofard, A., Shirmohammadi, Z., 2023. Design and implementation of a low-complexity flight controller for a quadrotor uav. International Journal of Dynamics and Control 11 (2), 689 – 700.
DOI: 10.1007/s40435-022-01016-1
- Nájera, S., Zambrano, F., Rico, R., Rico-Azagra, J., Gil-Martínez, M., 2023. Improved gyroscopic platform for control engineering labs. In: Actas de las XLIV Jornadas de Automática'. pp. 259–264.
DOI: 10.17979/spudc.9788497498609.259
- Ogata, K., 1996. Sistemas de control en tiempo discreto. Pearson Educación.
- Rico, R., Rico-Azagra, J., Gil-Martínez, M., 2022. Hardware and rtds design of a flight controller for professional applications. IEEE Access 10, 134870 – 134883.
DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3232749
- Rico-Azagra, J., Gil-Martínez, M., 2021. Feedforward for robust reference tracking in multi-input feedback control. IEEE Access 9, 92553–92567.
DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3092558
- Rico-Azagra, J., Gil-Martínez, M., Rico, R., Maisterra, P., 2018. QFT bounds for robust stability specifications defined on the open-loop function. International Journal of Robust and Nonlinear Control 28 (3), 1116–1125.
DOI: 10.1002/rnc.3908
- Rico-Azagra, J., Gil-Martínez, M., Rico, R., Nájera, S., Elvira, C., 2021. A benchmark for orientation control of a multirotor in a three degrees-of-freedom rotation structure. RIAI - Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 18 (3), 265–276.
DOI: 10.4995/riai.2021.14356
- Rico-Azagra, J., Gil-Martínez, M., 2023. Robust cascade control inside a new model-matching architecture. Mathematics 11 (11), 2523.
DOI: 10.3390/math11112523
- Roza, A., Maggiore, M., 2014. A class of position controllers for underactuated vtol vehicles. IEEE Transactions on Automatic Control 59 (9), 2580 – 2585.
DOI: 10.1109/TAC.2014.2308609
- Sidi, M. J., 2001. Design of Robust Control Systems: From classical to modern practical approaches. Krieger Publishing Company, Malabar, FL, USA.
- Visioli, A., 2006. Practical PID control. Springer Science & Business Media: Berlin, Germany.

Apéndice A. Loop-Shaping de controladores

La Figura A.9 muestran la apariencia final del *loop-shaping* de los elementos de control. En particular, la fila inferior de gráficas muestra como las funciones de lazo nominal, $L_{\theta_{1o}}(j\omega)$ y $L_{\theta_{2o}}(j\omega)$, y la función del controlador de prealimentación,

$G_{\theta}(j\omega)$, satisfacen sus respectivos *bounds* en las frecuencias discretas de diseño (23); de manera análoga ocurre para la rotación ϕ , tal cual muestra la fila superior de gráficas. El procedimiento iterativo completo, tanto para el cálculo de los *bounds* representativos de las especificaciones en términos de la planta nominal, como para el diseño de los elementos de control por *loop-shaping*, se muestran en Rico-Azagra and Gil-Martínez (2023). De forma simplificada, replicaremos el proceso de diseño para la rotación θ .

Considérese $P_{\theta_{2o}}$ como la planta nominal interna, que se elige entre los casos posibles para $P_{T_o}P_{\Omega_o}$, y considérese $P_{\theta_{1o}}$ como la planta nominal externa, que se corresponde con el integrador P_{θ} . El proceso de diseño comienza con el *loop-shaping* del lazo interno $L_{\theta_{2o}} = C_{\theta_2}P_{\theta_{2o}}$, asumiéndose que $C_{\theta_1} = 0$. Para ello, calculados los L_{θ_2} -*bounds*, se moldea $L_{\theta_{2o}}(j\omega)$ añadiendo ganancia/polos/ceros en C_{θ_2} ; el objetivo es satisfacer solo aquellos *bounds* a partir de la frecuencia de conmutación entre lazos, es decir, a partir de $\omega \geq 1$, violándose momentáneamente los L_{θ_2} -*bounds* en $\omega < 1$, que serán las frecuencias de trabajo del otro lazo. Una vez obtenido C_{θ_2} , se calculan los L_{θ_1} -*bounds*, y se realiza el *loop-shaping* del lazo externo $L_{\theta_{1o}} = C_{\theta_1}C_{\theta_2}P_{\theta_{1o}}P_{\theta_{2o}}$, cumpliendo esta vez los L_{θ_1} -*bounds* en todas las frecuencias. Obtenido C_{θ_1} , se recalculan los L_{θ_2} -*bounds*, que deben reflejar que ahora $L_{\theta_{2o}}(j\omega)$ satisface sus L_{θ_2} -*bounds* en todas las frecuencias, ya que ambos controladores han aportado la ganancia debida en la banda frecuencial especificada. El procedimiento iterativo entre lazos puede requerir más iteraciones, tanto para corregir posibles violaciones de *bounds*, como para ajustar las funciones más cerca de sus *bounds*, y así conseguir menos sobre-diseño (el óptimo sería aportar la mínima ganancia en cada frecuencia sin violar los *bounds*); téngase en cuenta también que un mejor ajuste a los *bounds* conlleva también una mayor complejidad del controlador, lo cual puede no ser deseable. Así, con el controlador recalculado en el *loop-shaping* anterior, se actualizan los *bounds* del otro lazo y se modifica el ajuste de este a dichos *bounds*, lo que genera un nuevo controlador, que afectará a la apariencia de los *bounds* del otro lazo. Finalizados los diseños de C_{θ_1} y C_{θ_2} , se afronta el diseño del controlador de prealimentación $G_{\theta}(j\omega)$, para lo que previamente deben calcularse los G_{θ} -*bounds* que debe satisfacer. Los diseños $C_{\theta_1} - C_{\theta_2}$ afectan considerablemente a la forma de los G_{θ} -*bounds* y la dificultad para satisfacerlos con un número moderado de elementos en $G_{\theta}(j\omega)$. De hecho, en el límite, es decir, si los L_{θ} -*bounds* se satisficieran por la mínima, los G_{θ} -*bounds* se reducirían a un punto en el plano Magnitud-Fase. En el presente caso, $C_{\theta_1} - C_{\theta_2}$ se han sobrediseñado convenientemente para ampliar las zonas delimitadas por los G_{θ} -*bounds* y así, facilitar el *loop-shaping* de $G_{\theta}(j\omega)$ y reducir su complejidad (número de polos y ceros).

Apéndice B. Implementación de controladores

La Tabla B.1 muestra los parámetros de los elementos de control: C_{θ_1} (28), C_{θ_2} (29), G_{θ} (30), C_{ϕ_1} (31), C_{ϕ_2} (32), G_{ϕ} (33). La implementación discreta de los controladores requiere el empleo de valores numéricos precisos que eviten errores de redondeo. Así, los parámetros de la Tabla B.1 se expresan con un número elevado de decimales, tal cual se han implementado en el *hardware* de control. Además, se recomienda el empleo de la

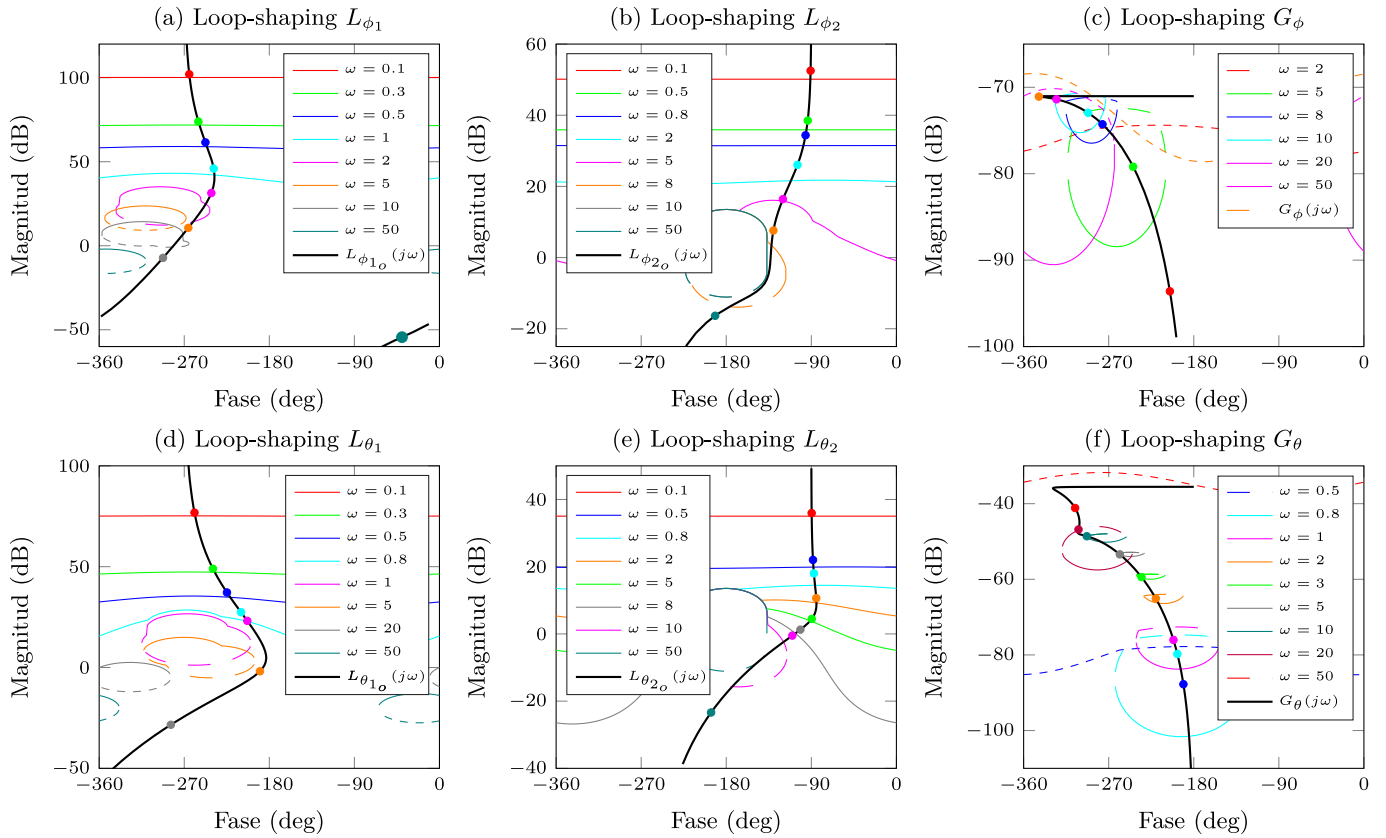


Figura A.9: *Bounds* y *Loopshaping* para el ángulo de roll: (a) lazo de realimentación externo, (b) lazo de realimentación interno, (c) prealimentación; e *idem* para el ángulo de pitch: (d), (e), (f).

unidad de coma flotante de doble precisión del microcontrolador STM32F767 para mantener la precisión en los cálculos.

Tabla B.1: Valores de los parámetros de los elementos de control

k_1	0,046804980158302	c_1	0,984242865068363
k_2	$1,020300000 \times 10^{-4}$	c_2	0,996485004825556
k_3	0,016089297004325	c_3	0,996137478799238
k_4	0,001805239997062	c_4	0,998809824734537
k_5	$6,005806934 \times 10^{-07}$	c_5	0,000434195700525
k_6	$2,793371955 \times 10^{-04}$	c_6	0,980710690909585
p_1	0,994233796933332	α_1	0,988875330286148
p_2	0,984242865068363	α_2	0,993281905393519
p_3	0,992162310736934	α_3	0,959573104677240
p_4	0,949139020054844	α_4	0,994234591346865
p_5	0,996927522580997	β_1	0,010257251253081
p_6	0,921176938469268	β_2	0,006818731650028
p_7	0,986652589209957	β_3	0,063650355795812
p_8	0,966039979762838	β_4	0,004367810236879
p_9	0,994222709989974		

Durante el diseño se han buscado controladores de orden reducido para evitar los problemas de implementación expuestos en Ogata (1996) y relativos a controladores discretos de alto orden. Véase como ejemplo los controladores empleados para gobernar el ángulo θ . En este caso, el controlador del lazo interno, C_{θ_2} , es una red de adelanto de fase a la que se le añade un

polo de alta frecuencia para mitigar la amplificación de ruidos de alta frecuencia. El controlador del lazo externo, C_{θ_1} , es el equivalente a un PI acompañado por una red de adelanto de fase. Por último, el controlador de prealimentación, G_{θ} , presenta una arquitectura con cuatro ceros y cuatro polos, no pudiéndose reducir su orden sin incurrir en un mayor sobrediseño en los controladores de realimentación. Este es un problema clásico cuando se abordan estructuras de control *model-matching* sintonizadas bajo el paradigma QFT, tal como se expone en Elso and Ostolaza (2021). Entonces, para paliar los problemas de implementación discreta de controladores de alto orden, el controlador de prealimentación se implementa empleando una arquitectura serie, $G_{\theta} = G_{\theta_1}G_{\theta_2}$, donde

$$G_{\theta_1}(z) = \frac{k_3(z - \alpha_1 + j\beta_1)(z - \alpha_1 - j\beta_1)}{(z - \alpha_2 + j\beta_2)(z - \alpha_2 - j\beta_2)} \quad (\text{B.1})$$

incorpora los polos/ceros complejo conjugados, y

$$G_{\theta_2}(z) = \frac{(z - 1)^2}{(z - p_5)(z - p_6)} \quad (\text{B.2})$$

los derivadores y los polos reales.

Los controladores de realimentación empleados para gobernar el ángulo ϕ , presentan una estructura similar a los anteriores. Sin embargo, el controlador de prealimentación G_{ϕ} es de menor orden que G_{θ} , y no es necesario implementarlo empleando una estructura serie.