FÍSICA TÉCNICA

Dinámica del punto y de los sistemas

V. 1.00.00

Marcos H. Giménez

Isabel Salinas

Vanesa P. Cuenca

Juan A. Monsoriu

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

ETSI Aeroespacial y Diseño Industrial

Créditos

Título:
Física Técnica

Subtítulo:
Dinámica del punto y de los sistemas

Autores:
Marcos H. Giménez, Isabel Salinas, Vanesa P. Cuenca y Juan A. Monsoriu

Editorial:
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial y Diseño Industrial

Valencia 2024

ISBN: 978-84-09-58857-2
Versión digital

Índice

Pulsando sobre el número de página de una diapositiva, se regresa a este índice.

Dinámica

Antecedentes

Primera ley de Newton

Segunda ley de Newton

Tercera ley de Newton

La síntesis de Newton

Punto material y sistema

Densidad

Densidad lineal

Densidad superficial

Densidad de un cuerpo homogéneo

Centro de masas

Fuerzas exteriores e interiores

Teorema del centro de masas

Diagrama de cuerpo libre

Peso y aceleración de la gravedad

Masa inerte y masa gravitatoria

Centro de gravedad

Mareas

Reacción normal

Índice (2)

Fuerza de rozamiento

Un inciso

Deslizamiento inminente

Coeficientes de rozamiento

Elementos ideales

Fuerzas de inercia

Momento lineal

Impulso

Momento angular

Campo de momentos angulares

Teorema del momento angular

Relación entre momentos lineales y fuerzas

Momento lineal y momento angular

Índice ejercicios

Ejercicio 1

El vector de posición de un móvil de masa $m = 3$ kg es $\vec{r} = (t^2; t^4 - 2t; 3\,\mathrm{sen}(2t))$ (SI). ¿Qué fuerza neta está actuando sobre él?

Ejercicio 2

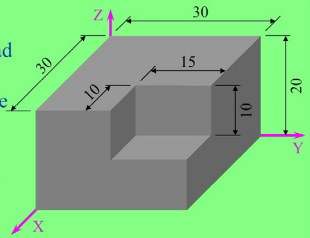
Un móvil de masa $m = 0{,}25$ kg se encuentra en el instante $t = 0$ s en la posición $(-1; 1; 4)$ m con una velocidad $(-1; 1; 0)$ m/s. Sobre él va a actuar una fuerza neta variable $\vec{F} = (3t; 0{,}5\cos t\,; \mathrm{e}^t)$ (SI). ¿Cuál será su vector de posición?

Ejercicio 3

Tres partículas de masas 1 kg, 2 kg y 3 kg se encuentran en las posiciones $(0; 0)$ m, $(-2; 1)$ m y $(3; -1)$ m, respectivamente. ¿En qué posición se debe situar una partícula de 4 kg para que el centro de masas del conjunto de las cuatro se halle en el punto $(1; 1)$ m?

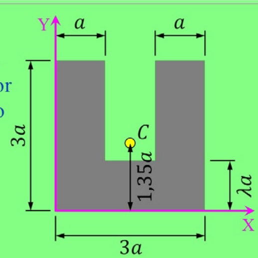
Ejercicio 4

Un bloque de hormigón (densidad $2500\,\mathrm{kg/m^3}$) tiene la forma y dimensiones (cotas en cm) que se muestran en la figura. Determínese la posición de su centro de masas en el sistema de referencia indicado.



Ejercicio 5

Sea la placa homogénea y plana de la figura. ¿Qué valor ha de tener el factor λ para que la coordenada Y del centro de masas sea $y_C = 1{,}35a$?

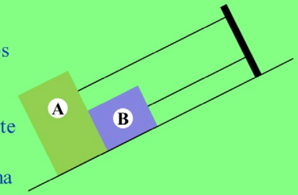


Ejercicio 6

El vector de posición de un punto material, de masa $m_1 = 2$ kg, es $\vec{r}_1 = (5t^4; t^3; 2t)$ (SI). El de un segundo punto material, de masa $m_2 = 3$ kg, es $\vec{r}_2 = (0; t^3; -t^2)$ (SI). ¿Cuál es la resultante de las fuerzas exteriores que están actuando sobre el sistema formado por ambos puntos?

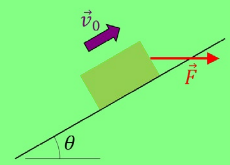
Ejercicio 7

Dos bloques A y B están apoyados en el suelo y en contacto entre sí. Ambos están sujetos a una pared mediante sendas cuerdas. No existe rozamiento entre los bloques, ni con el suelo. Realícese el diagrama de cuerpo libre del bloque A.



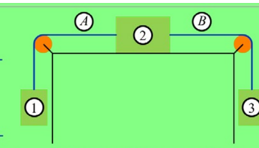
Ejercicio 8

Un bloque de masa $m = 3$ kg asciende inicialmente a $v_0 = 2$ m/s a lo largo de un plano inclinado un ángulo $\theta = 27°$, con el que tiene un coeficiente de rozamiento $\mu = 0{,}2$. Del bloque tira una fuerza horizontal de módulo $F = 30$ N. ¿Cuál es el módulo de la velocidad del bloque después de recorrer 10 m?



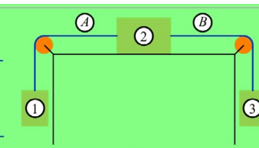
Ejercicio 9

El sistema de la figura se halla inicialmente en reposo. Las masas de los bloques son $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 20$ kg y $m_3 = 20$ kg. El coeficiente de rozamiento entre el bloque 2 y el suelo es $\mu_2 = 0{,}2$. Los hilos y poleas son ideales. Obténgase: los módulos de las tensiones en los dos hilos, A y B, de la fuerza de rozamiento, y de la aceleración de los bloques; la distancia que debe recorrer el bloque 3 para que el módulo de su velocidad sea 1,4 m/s.



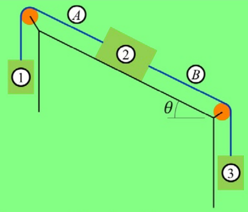
Ejercicio 10

El sistema de la figura se halla inicialmente en reposo. Las masas de los bloques son $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 20$ kg y $m_3 = 20$ kg. El coeficiente de rozamiento entre el bloque 2 y el suelo es $\mu_2 = 0{,}8$. Los hilos y poleas son ideales. Obténgase: los módulos de las tensiones en los dos hilos, A y B, de la fuerza de rozamiento, y de la aceleración de los bloques; la distancia que debe recorrer el bloque 3 para que el módulo de su velocidad sea 1,4 m/s.



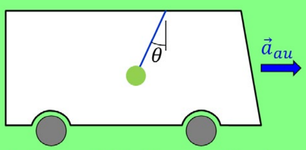
Índice ejercicios (2)

Ejercicio 11



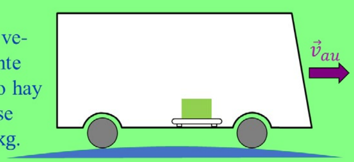
El sistema de la figura se halla inicialmente en reposo. Las masas de los bloques son $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 20$ kg y $m_3 = 20$ kg. El coeficiente de rozamiento entre el bloque 2 y el suelo es $\mu_2 = 0{,}2$. En el plano inclinado, es $\theta = 26°$. Los hilos y poleas son ideales. Obténgase: los módulos de las tensiones en los dos hilos, A y B, de la fuerza de rozamiento, y de la aceleración de los bloques; la distancia que debe recorrer el bloque 3 para que el módulo de su velocidad sea $1{,}4\ \mathrm{m/s}$.

Ejercicio 12



Un autobús arranca con una aceleración $\vec{a}_{au}$ constante de módulo $2\ \mathrm{m/s^2}$. De su techo cuelga un hilo ideal con una bola de 0,3 kg en su extremo inferior. Cuando la situación se estabiliza, el hilo forma un ángulo θ con la vertical. Determínese el valor de ese ángulo, así como el módulo de la tensión en el hilo.

Ejercicio 13



Un autobús se mueve con velocidad de módulo constante $v_{au} = 28\ \mathrm{m/s}$. En el suelo hay una báscula sobre la que se encuentra una caja de 20 kg. En el instante en que el autobús se encuentra en el punto más elevado de un cambio de rasante, la báscula marca 12 kg. ¿Cuál es en ese punto el radio de curvatura de la carretera?
Considérese que las dimensiones del autobús son despreciables con respecto al radio buscado.

Ejercicio 14

Una polea circular y homogénea gira alrededor de su eje a un ritmo constante de 100 vueltas por segundo. ¿Cuál es su momento lineal?

Ejercicio 15

Una bola de billar de 0,3 kg se dirige a $2\ \mathrm{m/s}$ directamente hacia otra de 0,5 kg que se encuentra en reposo. Tras el choque, la segunda se mueve a $1{,}47\ \mathrm{m/s}$. ¿Cuál es la velocidad de la primera?

Ejercicio 16

Dos objetos, de masas $m_1 = 3$ kg y m_2, chocan en el aire. Inmediatamente antes del choque, sus velocidades eran $\vec{v}_1 = (2; 3; -1)\ \mathrm{m/s}$ y $\vec{v}_2 = (-3; 0; 6)\ \mathrm{m/s}$. Inmediatamente después, esas velocidades pasaron a ser $\vec{v}'_1 = (1; v'_{1y}; 0)$ (SI) y $\vec{v}'_2 = (-1{,}5; 1{,}5; v'_{2z})$ (SI). Obténgase los valores de m_2, v'_{1y} y v'_{2z}.

Ejercicio 17

Sobre una partícula de 2 kg actúa una fuerza $\vec{F} = (5; 4t; 3t^2)$ (SI). ¿Cuál será su velocidad en el instante $t = 3$ s, sabiendo que en el instante $t = 1$ s es $(2; 5; 4)\ \mathrm{m/s}$?

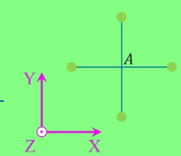
Ejercicio 18

Una partícula de masa m se mueve sobre el eje X de un sistema de referencia con velocidad constante $\vec{v}$, siendo su vector de posición $\vec{r} = (vt; 0; 0)$ $(t \in (-\infty; \infty))$. ¿Cuáles son sus momentos angulares respecto a los puntos $A(0; b; 0)$ y $B(0; -b; 0)$?

Ejercicio 19

Una partícula de masa m se mueve sobre el plano XY de un sistema de referencia con velocidad de módulo constante v, siguiendo una trayectoria circular de radio R y centro en el origen de coordenadas. Su vector de posición es $\vec{r} = (R\cos(vt/R)\,; R\,\mathrm{sen}(vt/R)\,; 0)$. ¿Cuál es su momento angular respecto al origen de coordenadas?

Ejercicio 20



Un molinillo está constituido por dos varillas (longitud 0,4 m; masa despreciable) soldadas entre sí, y cuatro esferas (masa 2 kg; radio despreciable), una en cada extremo. El molinillo gira en su plano en sentido horario, alrededor del punto A, con una velocidad angular de módulo $10\ \mathrm{rad/s}$. En la posición representada en la figura, ¿cuáles son el momento lineal del molinillo, y su momento angular respecto a A?

Ejercicio 21

Un sistema está constituido por tres puntos materiales, de masas $m_1 = 4$ kg, $m_2 = 3$ kg y $m_3 = 2$ kg. Bajo la acción de sus fuerzas mutuas y de las exteriores, sus respectivos vectores de posición en el SI son $\vec{r}_1 = (2; 5; -3)$, $\vec{r}_2 = (t^2; 2; 3 - 5t)$ y $\vec{r}_3 = (2t; t^3; 2t^2)$. ¿Cuáles son el momento lineal del sistema, y su momento angular respecto al punto $O(0; 0; 0)$ m? ¿Cuál es la resultante del conjunto de fuerzas exteriores que están actuando sobre el sistema, y su momento respecto al punto O?

Dinámica

La dinámica es la rama de la Física que trata del movimiento de los cuerpos en relación con las causas que lo originan.

Se denomina fuerza a la acción capaz de modificar el estado de reposo o de movimiento de un cuerpo, o de originar una deformación en él.

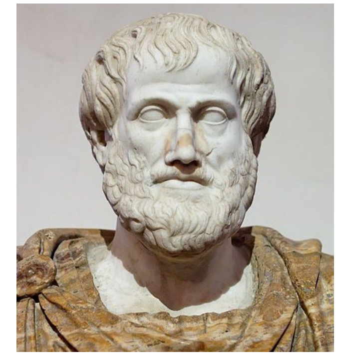
Aquí se va a analizar la relación existente entre el conjunto de fuerzas que se aplica a un cuerpo y las variables cinemáticas que describen su movimiento.

La relación entre fuerza y deformación se tratará en el tema "Elasticidad".

Antecedentes

Aristóteles

¿Qué afirma su filosofía natural?



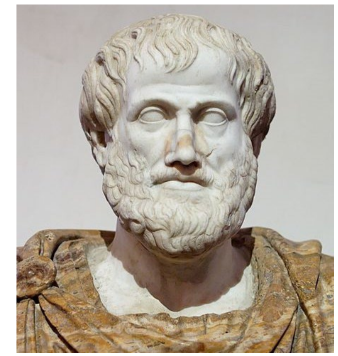
Fuente: After Lysippos, Public domain, via Wikimedia Commons

- Todo en la Tierra está compuesto por los cuatro elementos de Empédocles: tierra (fría y seca), agua (fría y húmeda), fuego (caliente y seco) y aire (caliente y húmedo).
- Los cielos están formados por un quinto elemento, el éter o quintaesencia, que es inmutable y perfecto.
- La tendencia de los elementos de la Tierra es moverse en línea recta (tierra y agua hacia abajo; fuego y aire hacia arriba) en busca de su lugar natural, donde se detendrán. Las fuerzas perturban esta tendencia mientras actúan.

Antecedentes

Aristóteles

¿Qué afirma su filosofía natural?



Fuente: After Lysippos, Public domain, via Wikimedia Commons

- El estado natural de un cuerpo es el reposo. Cuando sobre él dejan de actuar fuerzas, se detiene.

  Aquí se está ignorando la existencia de las fuerzas de rozamiento.

- La tendencia del éter es moverse en círculos.

  Aquí se está ignorando la fuerza de la gravedad.

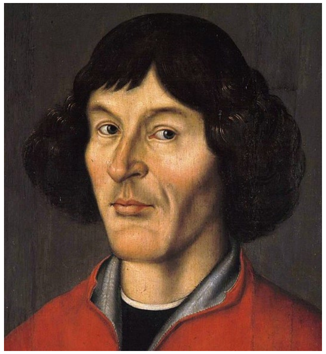
- Los cuerpos más pesados caen más deprisa.

  Aquí se está ignorando la fuerza debida a la viscosidad del aire.

Antecedentes

Copérnico

¿Qué afirma su modelo heliocéntrico?



Fuente: Toruń Regional Museum, Public domain, via Wikimedia Commons

- No todos los cuerpos celestes se mueven alrededor del mismo centro.
- La Tierra no es el centro del Universo, sino solo de la órbita de la Luna.
- El Sol es el centro del sistema planetario.
- La revolución diaria aparente del firmamento se debe a la rotación de la Tierra sobre su propio eje.

Si la Tierra es un planeta más, debe estar constituida por las mismas sustancias que el cielo.

Antecedentes

Kepler

Fuente: Unidentified painter, Public domain, via Wikimedia Commons

- Las leyes de Kepler son revolucionarias por tratarse de “leyes de la naturaleza”: afirmaciones precisas y verificables, expresables matemáticamente, de las relaciones que gobiernan un fenómeno.
- Se basó en las precisas observaciones astronómicas de Tycho Brahe, fundamentalmente en las de Marte.

Antecedentes

Kepler

Fuente: Unidentified painter, Public domain, via Wikimedia Commons

- Su primera ley establece que las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en uno de sus focos.

  Esto refuerza el modelo heliocéntrico, y acaba con el dogma del movimiento circular de los cuerpos celestes.

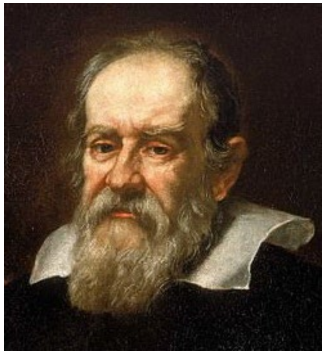
- Postuló la gravedad como una tendencia de los cuerpos a unirse, que es proporcional a la masa.

  Estuvo cerca de descubrir la ley de la gravitación universal.

- Sin embargo, aunque justificó las mareas por la atracción del Sol y la Luna, ignoró la gravedad como posible causa del movimiento de los planetas.

Antecedentes

Galileo



Fuente: Justus Sustermans, Public domain, via Wikimedia Commons

- Descubrió las fases de Venus, que por tanto gira alrededor del Sol. También descubrió los satélites de Júpiter, que giran alrededor de este.

  Esto refuerza el modelo heliocéntrico.

- Como otros coetáneos, observó las manchas solares y las irregularidades de la superficie de la Luna.

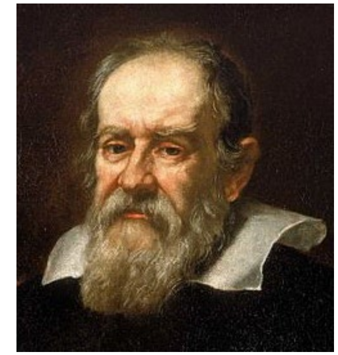
  Los cielos no son inmutables ni perfectos.

- Razonó que suponer que los cuerpos más pesados caen más deprisa conduce a una contradicción. ¿Cómo lo hizo?

Antecedentes

Galileo

Admitamos que es cierto que el yunque, más pesado, cae más deprisa que el martillo, más ligero.



Fuente: Justus Sustermans, Public domain, via Wikimedia Commons

Razonamiento A

Razonamiento B

Consecuencias contradictorias

El martillo frena al yunque

El conjunto cae más despacio que el yunque solo.

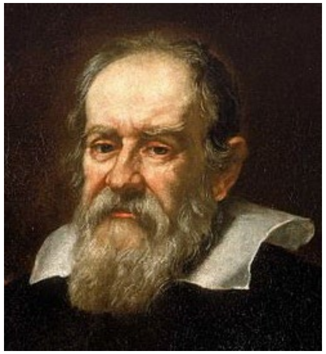
Yunque más martillo pesa más que yunque solo

El conjunto cae más deprisa que el yunque solo.

Antecedentes

Galileo

- Comprobó experimentalmente que, si el efecto de la fricción es despreciable, los cuerpos caen con la misma aceleración constante.



Fuente: Justus Sustermans, Public domain, via Wikimedia Commons

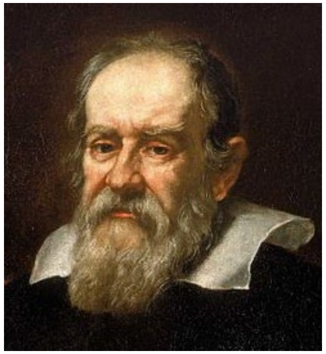
En la Luna, sin aire, un martillo y una pluma, soltados simultáneamente a la misma altura, llegan al suelo a la vez.

Vídeo completo y con audio: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Apollo_15_feather_and_hammer_drop.ogv

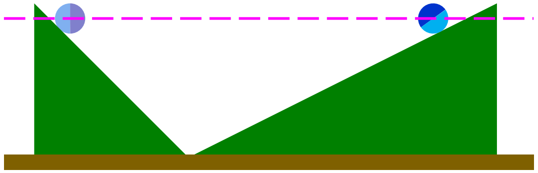
Fuente: NASA, Public domain, via Wikimedia Commons

Antecedentes

Galileo


Fuente: Justus Sustermans, Public domain, via Wikimedia Commons

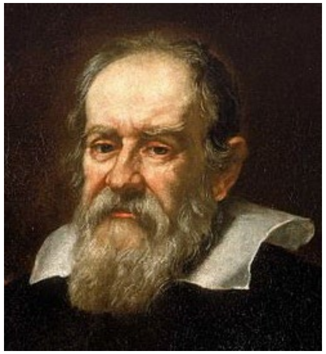
- Comprobó experimentalmente que, si el efecto de la fricción es despreciable, los cuerpos caen con la misma aceleración constante.
- Comprobó experimentalmente que, en esas condiciones, también es constante la aceleración al descender o ascender por un plano inclinado.
- Comprobó experimentalmente que, en esas condiciones, la altura desde la que desciende un objeto por un plano es la misma a la que asciende por un segundo plano.



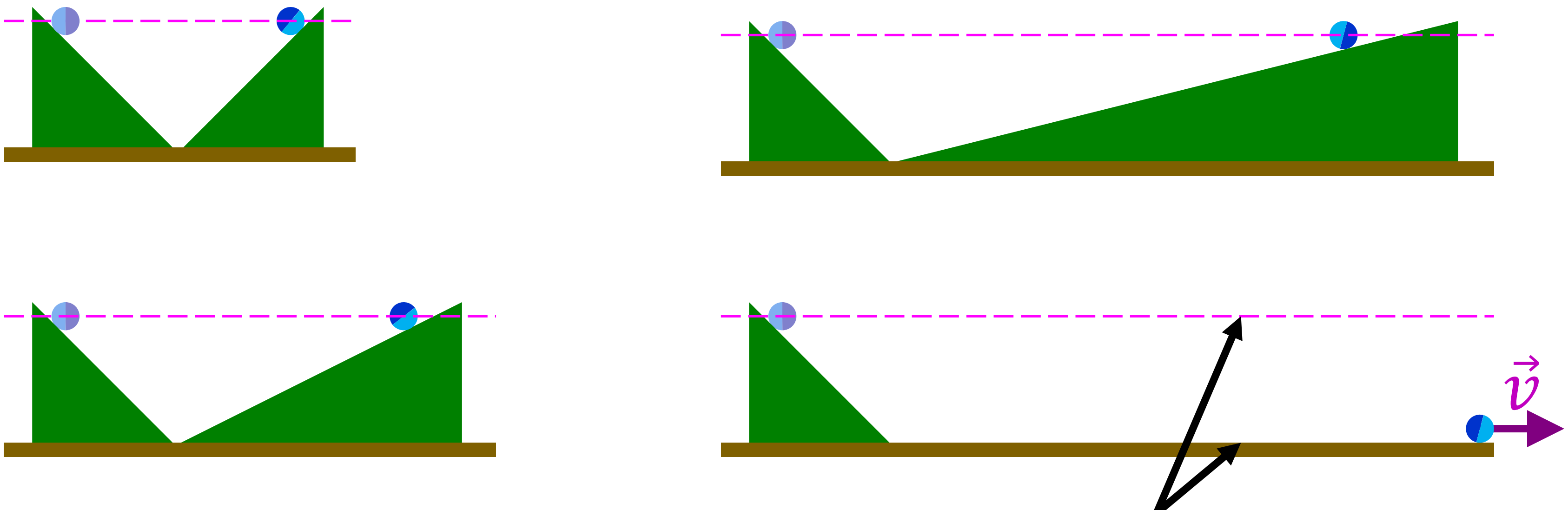
Antecedentes

Galileo

- A partir de ello dedujo que un cuerpo que se mueve sobre una superficie horizontal conservará el módulo de su velocidad si ninguna fuerza lo perturba.



Fuente: Justus Sustermans, Public domain, via Wikimedia Commons

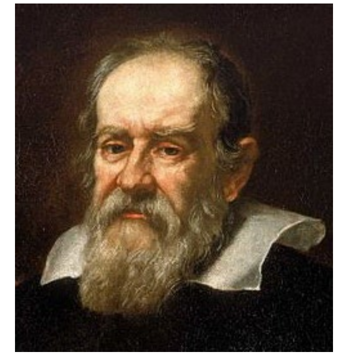


Líneas paralelas. Por tanto, se encuentran en el infinito.

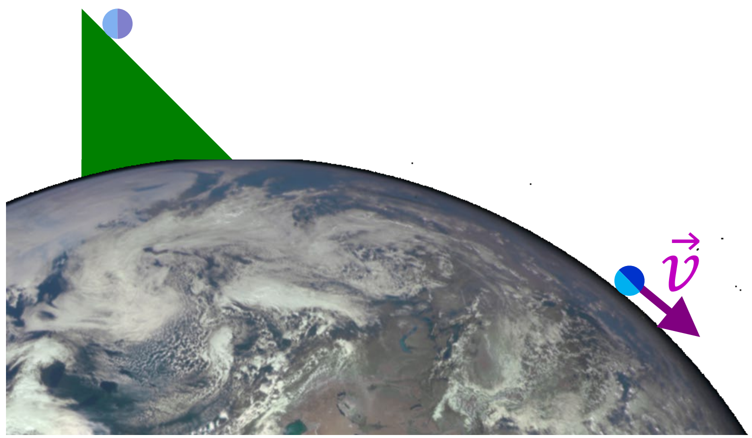
Antecedentes

Galileo

- A partir de ello dedujo que un cuerpo que se mueve sobre una superficie horizontal conservará el módulo de su velocidad si ninguna fuerza lo perturba.



Fuente: Justus Sustermans, Public domain, via Wikimedia Commons



Fuente fotografía: NASA, Public domain, via Wikimedia Commons

Estuvo por tanto cerca de formular el principio de inercia, pero se equivocó con su requisito de que la superficie fuera horizontal, y que ello implicaba dar vueltas a la Tierra. Además, no tuvo en cuenta que en esa situación sí actúa una fuerza, la gravitatoria.

Antecedentes

Descartes

Fuente: After Frans Hals, Public domain, via Wikimedia Commons

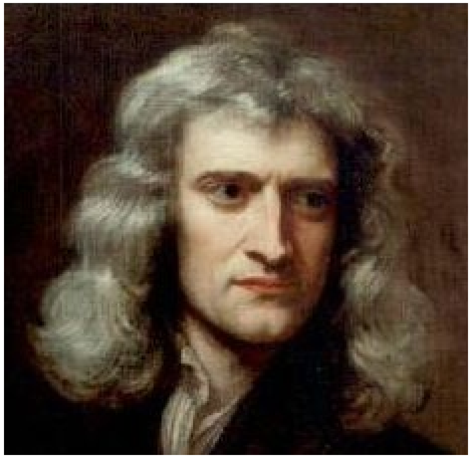
- Realizó la primera formulación del teorema de conservación del momento lineal.
- A partir de este teorema concluyó que, si sobre un cuerpo no actúan fuerzas, su movimiento será rectilíneo y uniforme.

La tendencia natural de un cuerpo no es el reposo ni el movimiento circular, sino mantener su velocidad.

Se trata de la primera formulación del principio de inercia, la actual primera ley de Newton.

Antecedentes

Situación: cielos gobernados por las leyes de Kepler; Tierra regida por las de Galileo.



Fuente: Godfrey Kneller, Public domain, via Wikimedia Commons

Alexander Pope: *Nature and nature's laws lay hid in night;*

God said 'Let Newton be' and all was light.

Primera ley de Newton

Primera ley de Newton (principio de inercia).
Si no actúa una fuerza neta sobre un cuerpo, este permanece en su estado inicial de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme.

La "fuerza neta" es la resultante del conjunto de fuerzas que actúa sobre el cuerpo.

No es necesario que no actúen fuerzas. Si las hay, pero con resultante nula, el cuerpo también permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.

La primera ley de Newton también puede expresarse diciendo que, si no actúa una fuerza neta sobre un cuerpo, la aceleración de este es nula.

Segunda ley de Newton

Segunda ley de Newton (principio de acción de las fuerzas). La relación que existe entre la fuerza neta que se aplica a un cuerpo y la aceleración que este adquiere es un coeficiente característico del cuerpo, que recibe el nombre de masa inerte.

La expresión analítica de esta ley recibe el nombre de ecuación fundamental de la Dinámica.

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

$\vec{F}$: fuerza neta (resultante) aplicada al cuerpo.

m: masa del cuerpo.

$\vec{a}$: aceleración adquirida por el cuerpo.

Segunda ley de Newton

Como se indicó, fuerza es una acción capaz de modificar el estado de reposo o de movimiento de un cuerpo. La segunda ley de Newton pone de manifiesto cuál es esa modificación.

Si la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es nula, resulta

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{0}}{m} = \vec{0}$$

Segunda ley de Newton

La masa inerte (simplemente masa a partir de aquí) es una magnitud escalar. Se trata de una magnitud básica del SI, y su unidad SI coherente es el kilogramo (kg).

La fuerza es una magnitud vectorial. De acuerdo con la ecuación fundamental de la Mecánica, su producto dimensional es

$$\dim F = \mathsf{M} \dim a = \mathsf{M}(\mathsf{T}^{-2}\mathsf{L}) = \mathsf{T}^{-2}\mathsf{L}\mathsf{M}$$

La unidad SI coherente de fuerza se define a partir de la ecuación fundamental de la Mecánica.

Definición: el newton (símbolo N) es el módulo de la fuerza que, aplicada a una masa de 1 kg, hace que esta adquiera una aceleración de módulo $1\,\mathrm{m/s^2}$.

Por tanto, $\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2}$.

Ejercicio 1

El vector de posición de un móvil de masa $m = 3$ kg es $\vec{r} = (t^2; t^4 - 2t; 3\,\mathrm{sen}(2t))$ (SI). ¿Qué fuerza neta está actuando sobre él?

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2t; 4t^3 - 2; 6\cos(2t))\ (\mathrm{SI})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (2; 12t^2; -12\,\mathrm{sen}(2t))\ (\mathrm{SI})$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = 3(2; 12t^2; -12\,\mathrm{sen}(2t)) = (6; 36t^2; -36\,\mathrm{sen}(2t))\ (\mathrm{SI})$$

El móvil tiene ese vector de posición precisamente porque actúa esa fuerza neta sobre él. Si la fuerza neta fuera diferente, el vector de posición también sería otro.

Ejercicio 2

Un móvil de masa $m = 0{,}25$ kg se encuentra en el instante $t = 0$ s en la posición $(-1; 1; 4)$ m con una velocidad $(-1; 1; 0)$ m/s. Sobre él va a actuar una fuerza neta variable $\vec{F} = (3t; 0{,}5\cos t\,; \mathrm{e}^t)$ (SI). ¿Cuál será su vector de posición?

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{(3t; 0{,}5\cos t\,;\ \mathrm{e}^t)}{0{,}25} = (12t; 2\cos t\,; 4\mathrm{e}^t)\ (\mathrm{SI})$$

$$\vec{v} = \int \vec{a}\,dt = \int (12t; 2\cos t\,; 4\mathrm{e}^t)\,dt = (6t^2; 2\,\mathrm{sen}\,t\,; 4\mathrm{e}^t) + \vec{C}$$

$$(-1; 1; 0) = \vec{v}(0) = (6 \times 0^2; 2\,\mathrm{sen}\,0\,; 4\mathrm{e}^0) + \vec{C} = (0; 0; 4) + \vec{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{C} = (-1; 1; 0) - (0; 0; 4) = (-1; 1; -4)\ \mathrm{m/s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v} = (6t^2 - 1; 2\,\mathrm{sen}\,t + 1; 4\mathrm{e}^t - 4)\ (\mathrm{SI})$$

$$\vec{r} = \int \vec{v}\,dt = \int (6t^2 - 1; 2\,\mathrm{sen}\,t + 1; 4\mathrm{e}^t - 4)dt =$$

$$= (2t^3 - t; -2\cos t + t; 4\mathrm{e}^t - 4t) + \vec{C}'$$

$$(-1; 1; 4) = \vec{r}(0) = (2 \times 0^3 - 0; -2\cos 0 + 0; 4\mathrm{e}^0 - 4 \times 0) + \vec{C}' =$$

$$= (0; -2; 4) + \vec{C}' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{C}' = (-1; 1; 4) - (0; -2; 4) = (-1; 3; 0)\ \mathrm{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r} = (2t^3 - t - 1; -2\cos t + t + 3; 4\mathrm{e}^t - 4t)\ (\mathrm{SI})$$

Tercera ley de Newton

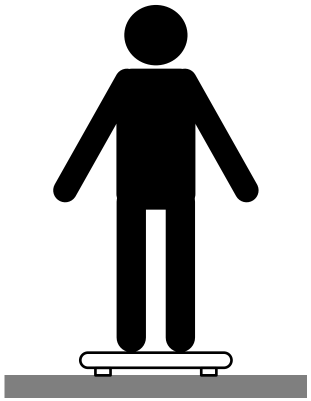
Tercera ley de Newton (principio de acción y reacción).
Si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, este responde con una fuerza sobre el primero de igual módulo y dirección, pero sentido contrario.

Por tanto, la fuerza $\vec{F}_{AB}$ que un cuerpo A ejerce sobre otro B, y la fuerza $\vec{F}_{BA}$ que B ejerce sobre A, son opuestas.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Es relevante añadir que además ambas fuerzas tienen la misma línea de acción.

Tercera ley de Newton

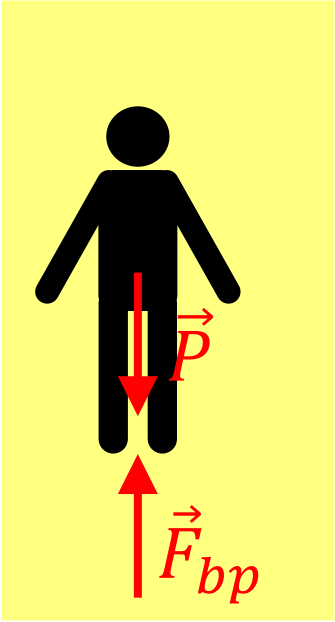


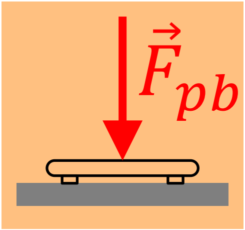
Una báscula no mide pesos, sino la fuerza que se ejerce sobre ella.

$\vec{P}$: peso de la persona.

$\vec{F}_{bp}$: fuerza ejercida por la báscula sobre la persona.

$\vec{F}_{pb}$: fuerza ejercida por la persona sobre la báscula.





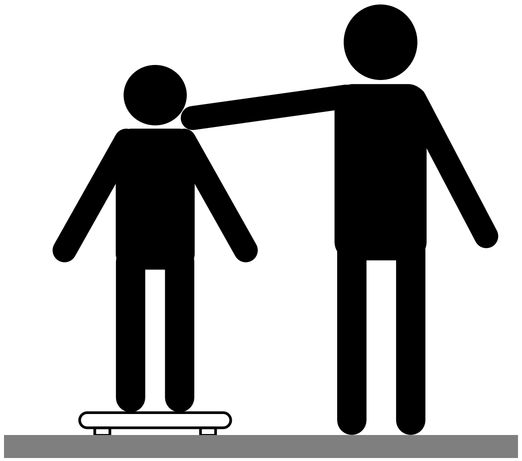
Primera ley de Newton, aplicada a la persona:

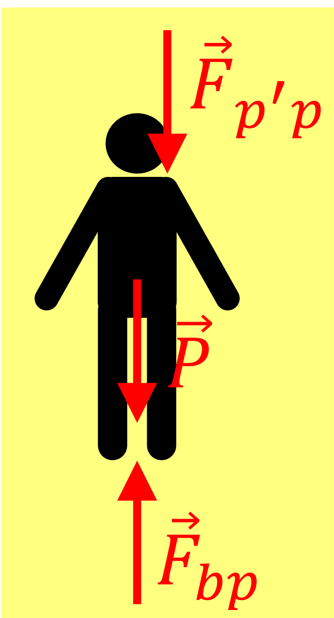
$$\vec{P} + \vec{F}_{bp} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{bp} = -\vec{P}$$

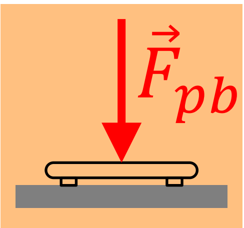
Tercera ley de Newton, aplicada entre la persona y la báscula:

$$\vec{F}_{pb} = -\vec{F}_{bp} = -\left(-\vec{P}\right) = \vec{P}$$

Tercera ley de Newton







Una báscula no mide pesos, sino la fuerza que se ejerce sobre ella.

$\vec{P}$: peso de la persona.

$\vec{F}_{bp}$: fuerza ejercida por la báscula sobre la persona.

$\vec{F}_{pb}$: fuerza ejercida por la persona sobre la báscula.

$\vec{F}_{p'p}$: fuerza ejercida por la segunda persona sobre la primera.

Primera ley de Newton, aplicada a la persona:

$$\vec{P} + \vec{F}_{bp} + \vec{F}_{p'p} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{bp} = -\vec{P} - \vec{F}_{p'p}$$

Tercera ley de Newton, aplicada entre la persona y la báscula:

$$\vec{F}_{pb} = -\vec{F}_{bp} = -\left(-\vec{P} - \vec{F}_{p'p}\right) = \vec{P} + \vec{F}_{p'p}$$

Tercera ley de Newton

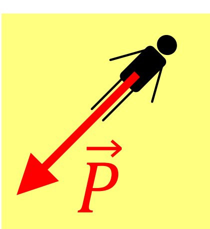
Fuente fotografía: NASA, Public domain, via Wikimedia Commons

$\vec{P}$: peso de la persona (fuerza de atracción gravitatoria ejercida por la Tierra sobre la persona).

$\vec{F}_T$: fuerza de atracción gravitatoria ejercida por la persona sobre la Tierra.

Tercera ley de Newton, aplicada entre la persona y la Tierra:

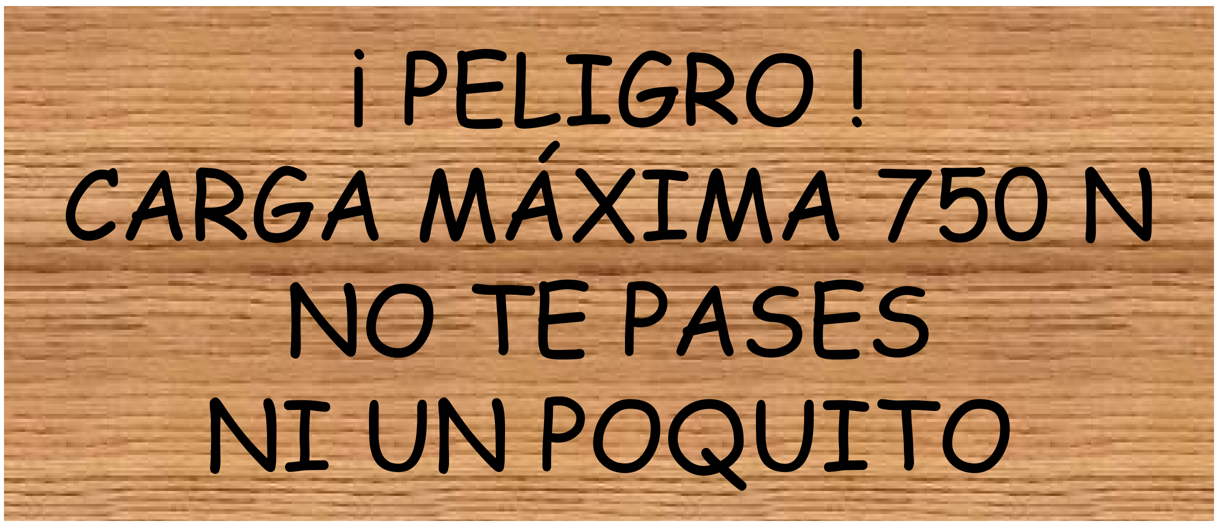
$$\vec{F}_T = -\vec{P}$$



De la misma forma que la Tierra atrae a un objeto, este también atrae a la Tierra. Y el módulo de ambas fuerzas gravitatorias es el mismo.

Tercera ley de Newton

Acertijo: Un agricultor, de peso de módulo 700 N, cargando con dos sandías de 50 N cada una, se acerca a un puente ante el que hay un cartel.



¿Cómo puede cruzar el puente una sola vez con las dos sandías?

Tercera ley de Newton

Solución oficial del acertijo: cruzar haciendo malabares.

$\vec{a}_s$: aceleración de la sandía A para lanzarla o recogerla.

$\vec{P}_s$: peso de la sandía A, de masa m_s.

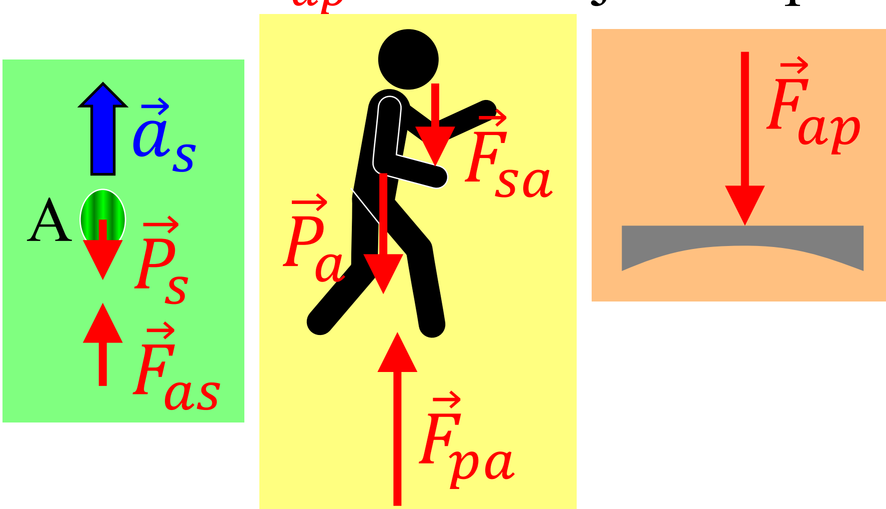
$\vec{F}_{as}$: fuerza ejercida por el agricultor sobre la sandía A.

$\vec{F}_{sa}$: fuerza ejercida por la sandía A sobre el agricultor.

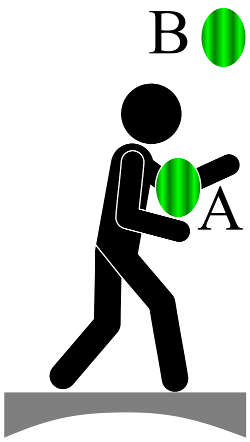
$\vec{P}_a$: peso del agricultor.

$\vec{F}_{pa}$: fuerza ejercida por el puente sobre el agricultor.

$\vec{F}_{ap}$: fuerza ejercida por el agricultor sobre el puente.



Tercera ley de Newton



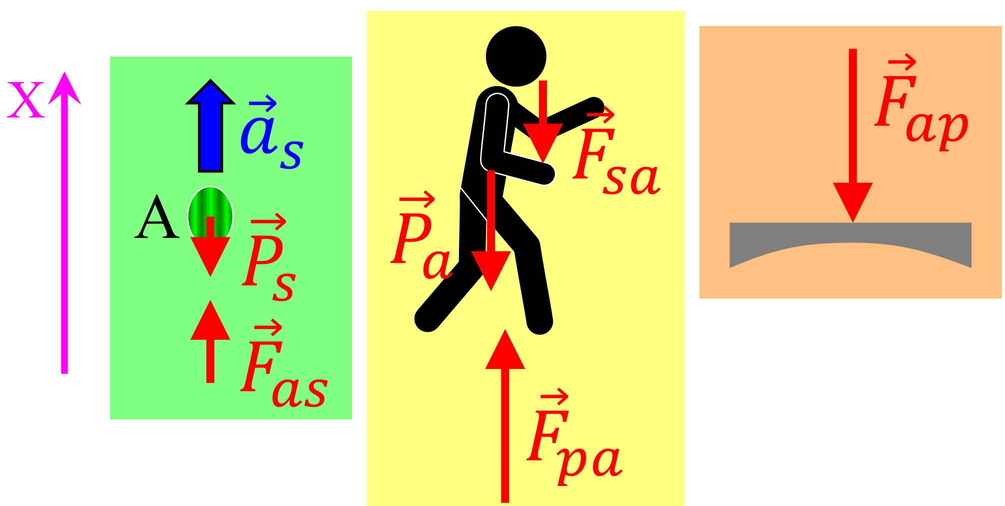
Segunda ley de Newton, aplicada a la sandía A:

$$\vec{P}_s + \vec{F}_{as} = m_s \vec{a}_s \Rightarrow (-P_s) + F_{as} = m_s a_s \Rightarrow$$

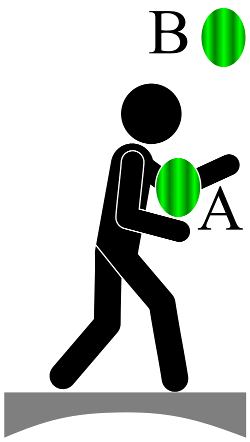
$$\Rightarrow F_{as} = P_s + m_s a_s$$

Tercera ley de Newton, aplicada entre la sandía A y el agricultor:

$$\vec{F}_{sa} = -\vec{F}_{as} \Rightarrow F_{sa} = F_{as} = P_s + m_s a_s$$



Tercera ley de Newton



Primera ley de Newton, aplicada al agricultor:

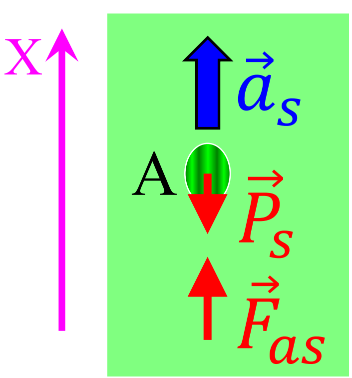
$$\vec{P}_a + \vec{F}_{sa} + \vec{F}_{pa} = \vec{0} \Rightarrow (-P_a) + (-F_{sa}) + F_{pa} = 0 \Rightarrow$$

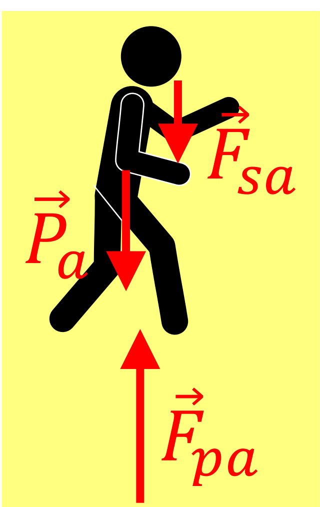
$$\Rightarrow F_{pa} = P_a + F_{sa} = P_a + P_s + m_s a_s$$

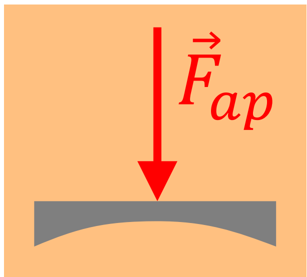
Tercera ley de Newton, aplicada entre el agricultor y el puente:

$$\vec{F}_{ap} = -\vec{F}_{pa} \Rightarrow F_{ap} = F_{pa} = P_a + P_s + m_s a_s =$$

$$= 700 + 50 + m_s a_s$$







$$\boxed{F_{ap} > 750 \text{ N}}$$

El puente se romperá cuando el agricultor impulse una sandía, o cuando frene una que cae para recogerla.

Tercera ley de Newton

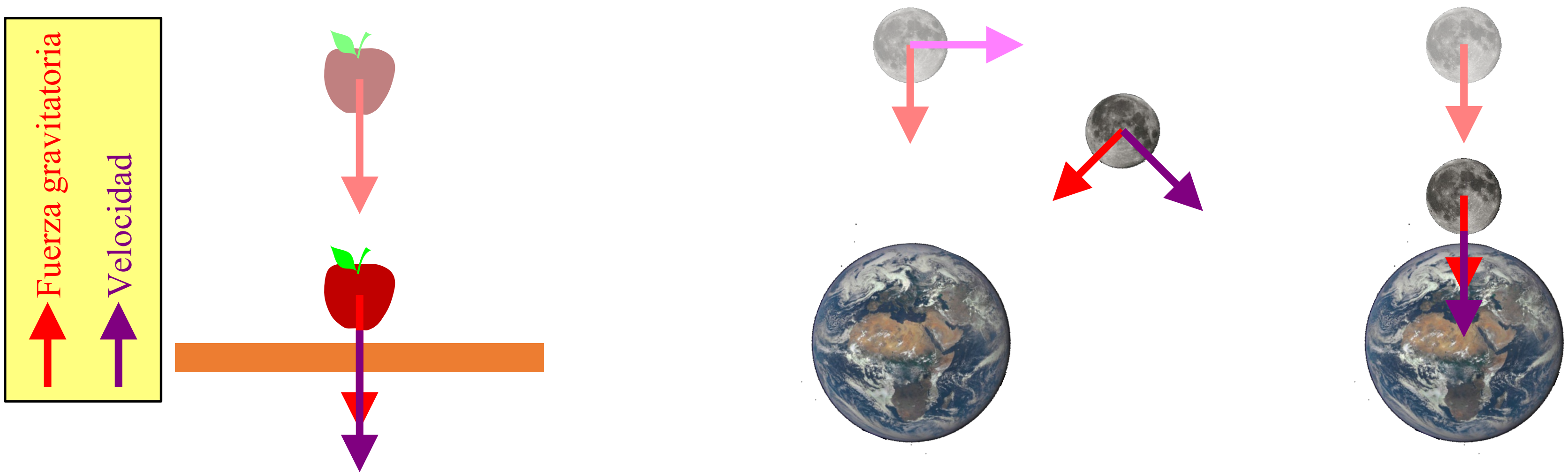
La síntesis de Newton

La atracción gravitatoria de la Tierra hace que los cuerpos aceleren hacia ella.

La aceleración de una manzana en reposo aumenta el módulo de su velocidad.

La aceleración de la Luna cambia la orientación de su velocidad.

Si la Luna partiera del reposo (respecto a la Tierra)…



Fuente fotografía Tierra: NASA, Public domain, via Wikimedia Commons
Fuente fotografía Luna: Luc Viatour, CC BY-SA 3.0, Public domain, via Wikimedia Commons

De las leyes de Newton se deducen las de Galileo y las de Kepler. Abarcan la Tierra y el cielo. Rigen el Universo.

(Hasta la llegada de las mecánicas relativista y cuántica).

Punto material y sistema

Se denomina punto material a un ente abstracto dotado de masa (material) y sin dimensiones (punto).

Los cuerpos reales no son puntos materiales, pero se puede considerar que están formados por un conjunto de ellos, esto es, constituyen un sistema de puntos materiales.

Estrictamente hablando, un punto material tiene masa dm y volumen dV, no nulo.

Por tanto, su densidad es $\rho = dm/dV$, no infinita como parece sugerir la definición.

Densidad

Como se acaba de indicar, se denomina densidad (también densidad de masa, cuando se requiere diferenciarla de la denominada densidad de carga eléctrica) en un punto al cociente entre la masa diferencial, dm, de un diferencial de volumen, dV, alrededor de dicho punto, y el propio dV.

Por tanto, la densidad es $\rho = dm/dV$.

En ocasiones, la densidad recibe los nombres de densidad volúmica o densidad volumétrica, para diferenciarla de las densidades lineal y superficial, descritas más adelante.

Densidad

De acuerdo con su definición, la densidad es una magnitud escalar, y su producto dimensional es

$$\dim \rho = \mathsf{M}(\dim V)^{-1} = \mathsf{M}(\mathsf{L}^3)^{-1} = \mathsf{L}^{-3}\mathsf{M}$$

La unidad SI coherente de la densidad es el $\mathrm{kg/m^3}$.

Densidad lineal

Sea un elemento prácticamente unidimensional (por ejemplo un alambre), o que tiene sección constante (por ejemplo un tubo). En estos casos, puede resultar más cómodo utilizar la masa, no por unidad de volumen, sino de longitud.

Se denomina densidad lineal (también densidad lineal de masa, cuando se requiere diferenciarla de la denominada densidad lineal de carga eléctrica) en un punto al cociente entre la masa diferencial, dm, de un diferencial de longitud, dl, alrededor de dicho punto, y el propio dl.

Por tanto, la densidad lineal es $\lambda = dm/dl$.

Densidad lineal

De acuerdo con su definición, la densidad lineal es una magnitud escalar, y su producto dimensional es

$$\dim \lambda = \mathsf{L}^{-1}\mathsf{M}$$

La unidad SI coherente de la densidad lineal es el kg/m.

Densidad superficial

Sea un elemento prácticamente bidimensional (por ejemplo una hoja de papel), o que tiene grosor constante (por ejemplo una placa). En estos casos, puede resultar más cómodo utilizar la masa, no por unidad de volumen, sino de superficie.

Se denomina densidad superficial (también densidad superficial de masa, cuando se requiere diferenciarla de la denominada densidad superficial de carga eléctrica) en un punto al cociente entre la masa diferencial, dm, de un diferencial de área, dS, alrededor de dicho punto, y el propio dS.

Por tanto, la densidad superficial es $\sigma = dm/dS$.

Densidad superficial

De acuerdo con su definición, la densidad superficial es una magnitud escalar, y su producto dimensional es

$$\dim \sigma = \mathsf{M}(\dim S)^{-1} = \mathsf{M}(\mathsf{L}^2)^{-1} = \mathsf{L}^{-2}\mathsf{M}$$

La unidad SI coherente de la densidad superficial es el $\mathrm{kg/m^2}$.

Densidad de un cuerpo homogéneo

En el contexto del presente tema, se dice que un cuerpo es homogéneo si su densidad es la misma en todos sus puntos. En tal caso, se puede hablar simplemente de densidad del cuerpo.

En el caso de cuerpos homogéneos, su densidad es igual al cociente entre su masa y su volumen, $\rho = m/V$.

Análogamente, se puede hablar de densidad lineal del cuerpo y densidad superficial del cuerpo cuando estas no cambian de un punto a otro. Así, dichas densidades son respectivamente $\lambda = m/l$ y $\sigma = m/S$.

Centro de masas

Se denomina centro de masas (abreviado c.d.m.) de un sistema de puntos materiales al punto cuyas coordenadas son

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}}$$

$\vec{r}_C$: vector de posición (coordenadas) del centro de masas del sistema.

$\vec{r}_i$: vector de posición (coordenadas) del i-ésimo punto material del sistema.

m_i: masa del i-ésimo punto material del sistema.

$m = \sum m_i$: masa total del sistema.

Centro de masas

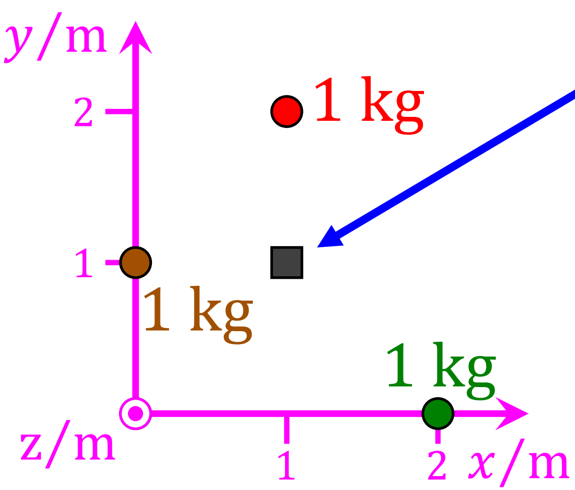
De la definición de centro de masas se deduce que

$$(x_C; y_C; z_C) = \frac{\sum m_i (x_i; y_i; z_i)}{m} \Rightarrow \begin{cases} x_C = \dfrac{\sum m_i x_i}{m} \\[2ex] y_C = \dfrac{\sum m_i y_i}{m} \\[2ex] z_C = \dfrac{\sum m_i z_i}{m} \end{cases}$$

Centro de masas

¿Cuál es la posición media de tres masas de 1 kg situadas en los puntos $(1; 2; 0)$ m, $(2; 0; 0)$ m y $(0; 1; 0)$ m?

$$\frac{(1;2;0) + (2;0;0) + (0;1;0)}{3} = (1;1;0)\ \mathrm{m}$$



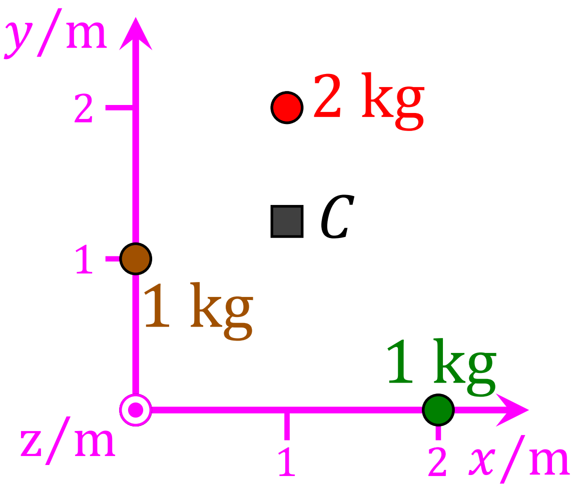
Centro de masas

¿Y si la masa en el punto (1; 2; 0) m es de 2 kg?

$$\frac{(1;2;0)+(1;2;0)+(2;0;0)+(0;1;0)}{4}=(1;1{,}25;0)\ \mathrm{m}$$

Más sencillo:

$$\frac{2(1;2;0)+1(2;0;0)+1(0;1;0)}{2+1+1}=(1;1{,}25;0)\ \mathrm{m}$$



$$\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+m_3\vec{r}_3}{m}=\vec{r}_C$$

Centro de masas

El centro de masas no es sino la posición media de los puntos materiales del sistema, ponderada con las masas correspondientes.

Se trata de una definición de tipo geométrico, pero interviniendo los valores de las masas. Junto con otros conceptos del mismo tipo (como el de momento de inercia, sobre el que se tratará en el tema "Dinámica del sólido rígido"), constituyen la denominada geometría de masas.

Ejercicio 3

Tres partículas de masas 1 kg, 2 kg y 3 kg se encuentran en las posiciones $(0; 0)$ m, $(-2; 1)$ m y $(3; -1)$ m, respectivamente. ¿En qué posición se debe situar una partícula de 4 kg para que el centro de masas del conjunto de las cuatro se halle en el punto $(1; 1)$ m?

Nótese que en este ejercicio se trabaja únicamente en dos dimensiones.

Sea $\vec{r}_4$ la posición de la cuarta partícula. Se tiene que

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \Rightarrow m\vec{r}_C = \sum m_i \vec{r}_i \Rightarrow$$

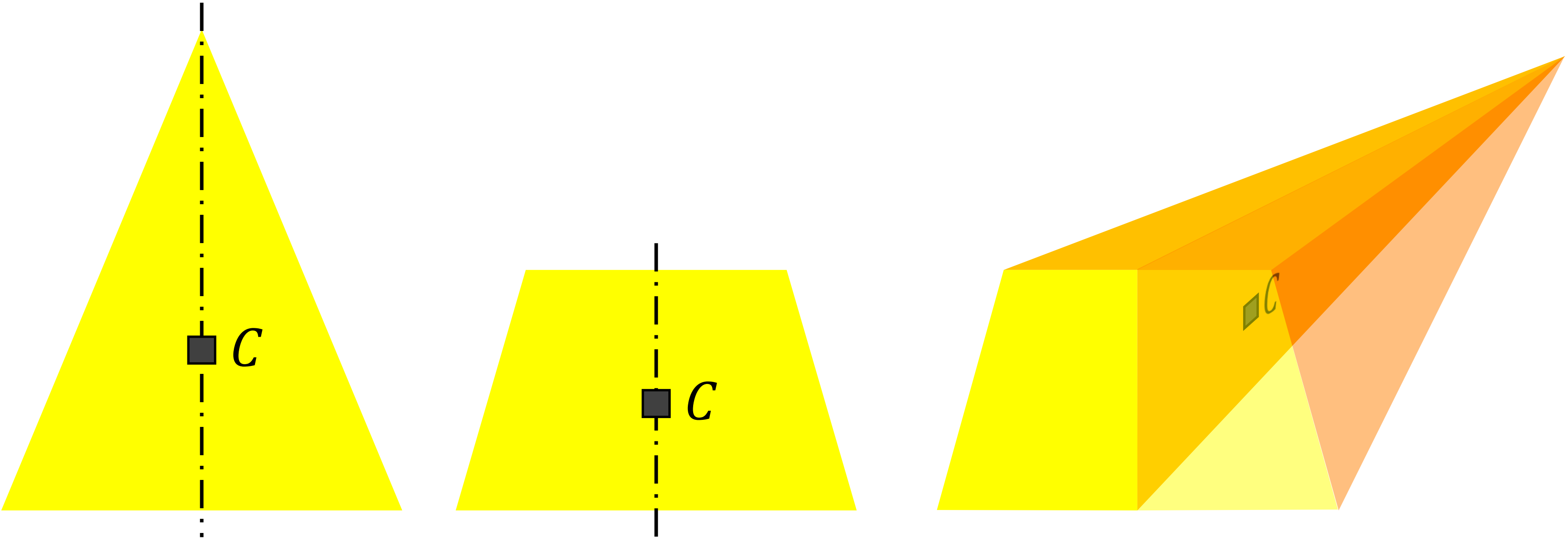
$$\Rightarrow [1 + 2 + 3 + 4](1;\ 1) = 1(0; 0) + 2(-2; 1) + 3(3; -1) + 4\vec{r}_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (10; 10) = (0; 0) + (-4; 2) + (9; -3) + 4\vec{r}_4 = (5; -1) + 4\vec{r}_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\vec{r}_4 = (10; 10) - (5; -1) = (5; 11) \Rightarrow \vec{r}_4 = (1{,}25; 2{,}75)\ \mathrm{m}$$

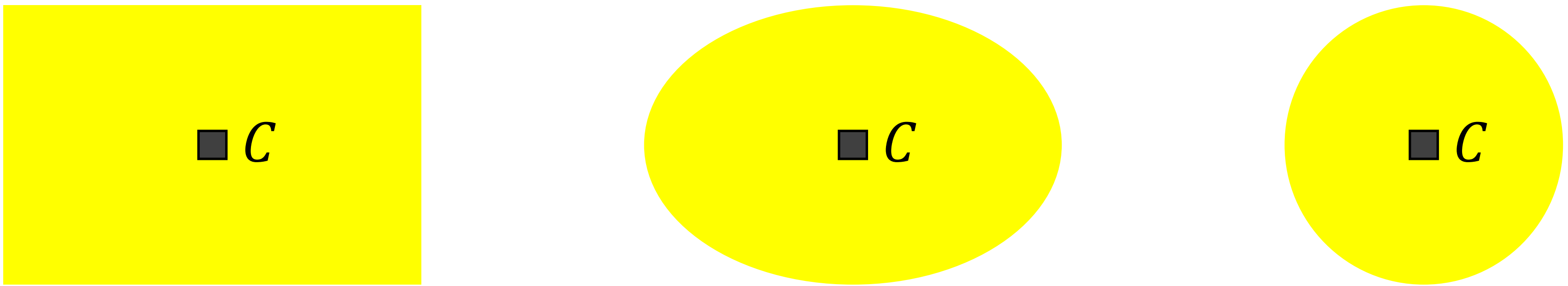
Centro de masas

Al tratarse de la posición media, los cuerpos que poseen un eje o plano de simetría tienen su centro de masas sobre el mismo.

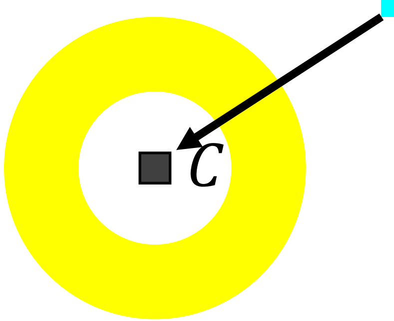


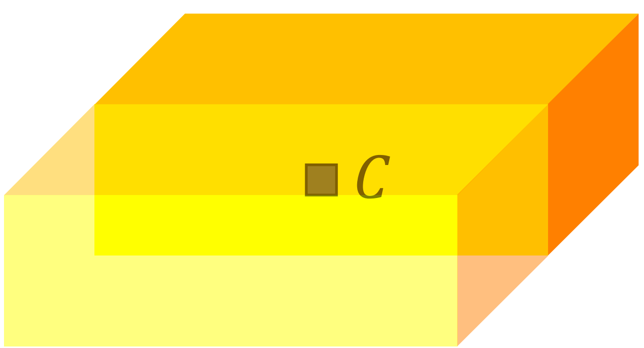
Centro de masas

Si el cuerpo posee un centro de simetría, en él se encuentra el centro de masas.



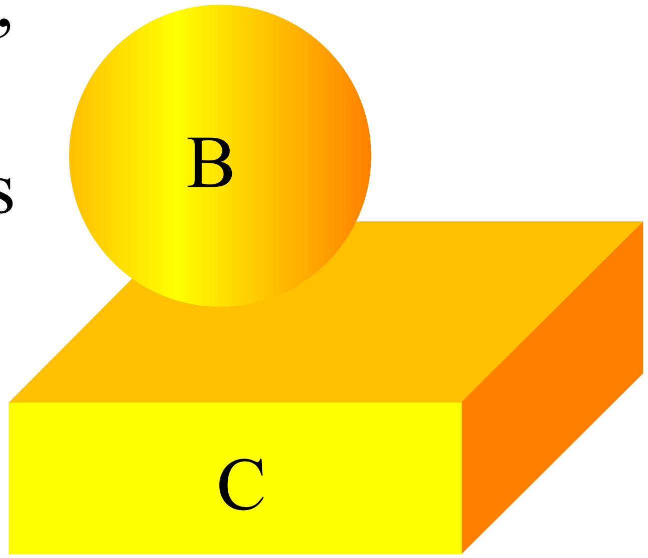
El centro de masas no tiene por qué encontrarse en un punto en el que exista masa.





Centro de masas

Sea un sistema A de puntos materiales, de masa m_A y centro de masas $\vec{r}_{C_A}$. Lo vamos a considerar constituido por dos subsistemas B y C, de masas m_B y m_C y centros de masa $\vec{r}_{C_B}$ y $\vec{r}_{C_C}$. Es:



$$m_B\vec{r}_{C_B} = \sum_B m_i\vec{r}_i$$

$$m_C\vec{r}_{C_C} = \sum_C m_i\vec{r}_i$$

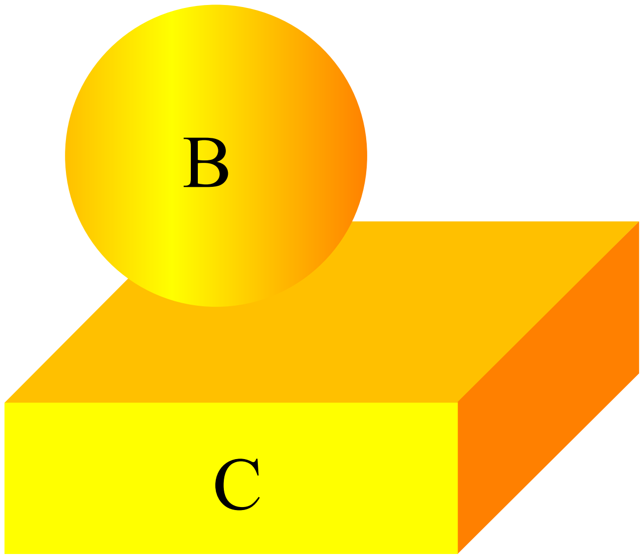
$$m_A\vec{r}_{C_A} = \sum_A m_i\vec{r}_i = \sum_B m_i\vec{r}_i + \sum_C m_i\vec{r}_i = m_B\vec{r}_{C_B} + m_C\vec{r}_{C_C}$$

Centro de masas

Por tanto,

$$\vec{r}_{C_A} = \frac{m_B \vec{r}_{C_B} + m_C \vec{r}_{C_C}}{m_A}$$

$$(m_A = m_B + m_C)$$



Generalización

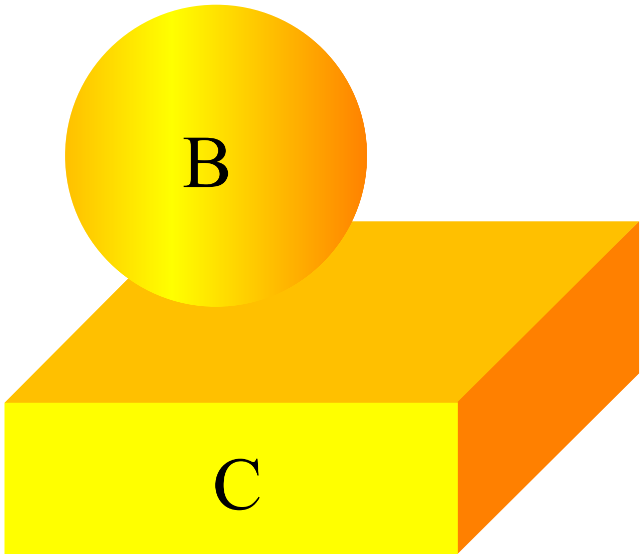
El centro de masas de un sistema compuesto por cualquier cantidad de otros más simples, se encuentra en la posición media de los centros de masas de los mismos, ponderada con sus masas correspondientes.

Centro de masas

A partir de la relación

$$m_A \vec{r}_{C_A} = m_B \vec{r}_{C_B} + m_C \vec{r}_{C_C}$$

que apareció durante el desarrollo anterior, también se deduce que



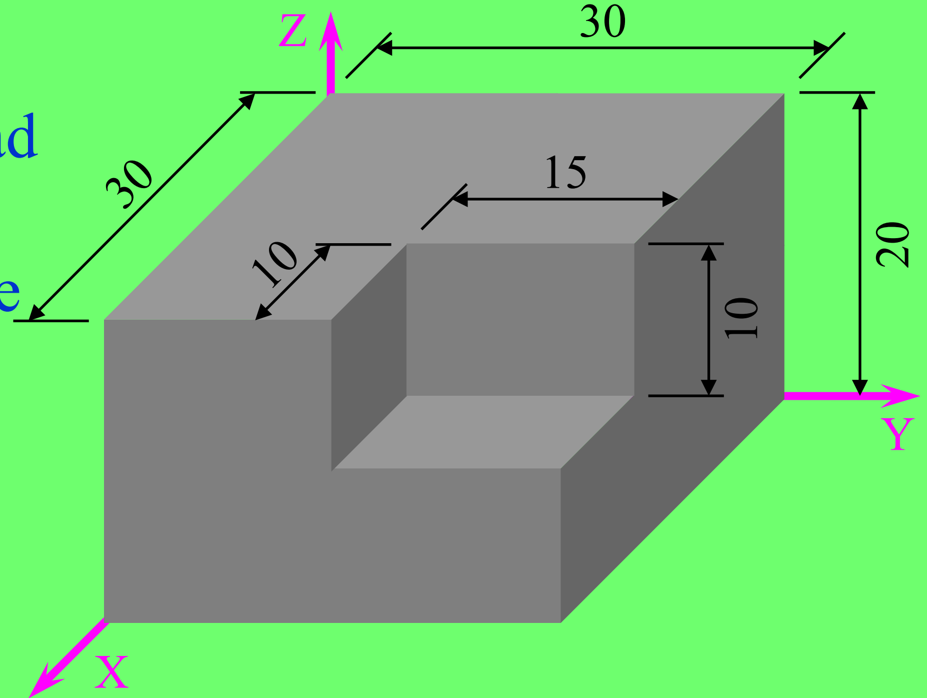
$$\vec{r}_{C_C} = \frac{m_A \vec{r}_{C_A} - m_B \vec{r}_{C_B}}{m_C}$$

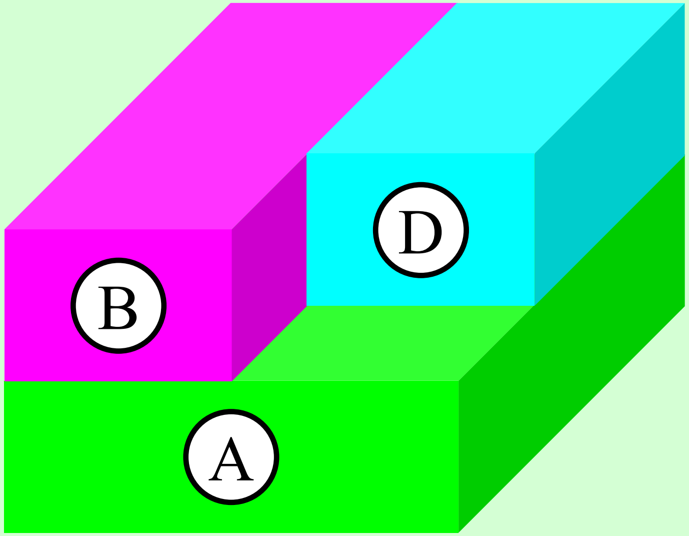
$$(m_C = m_A - m_B)$$

Por tanto, se puede obtener la posición del centro de masas de un sistema compuesto por adición y sustracción de otros más simples, a partir de las correspondientes sumas y restas de sus masas y de sus contribuciones ponderadas.

Ejercicio 4

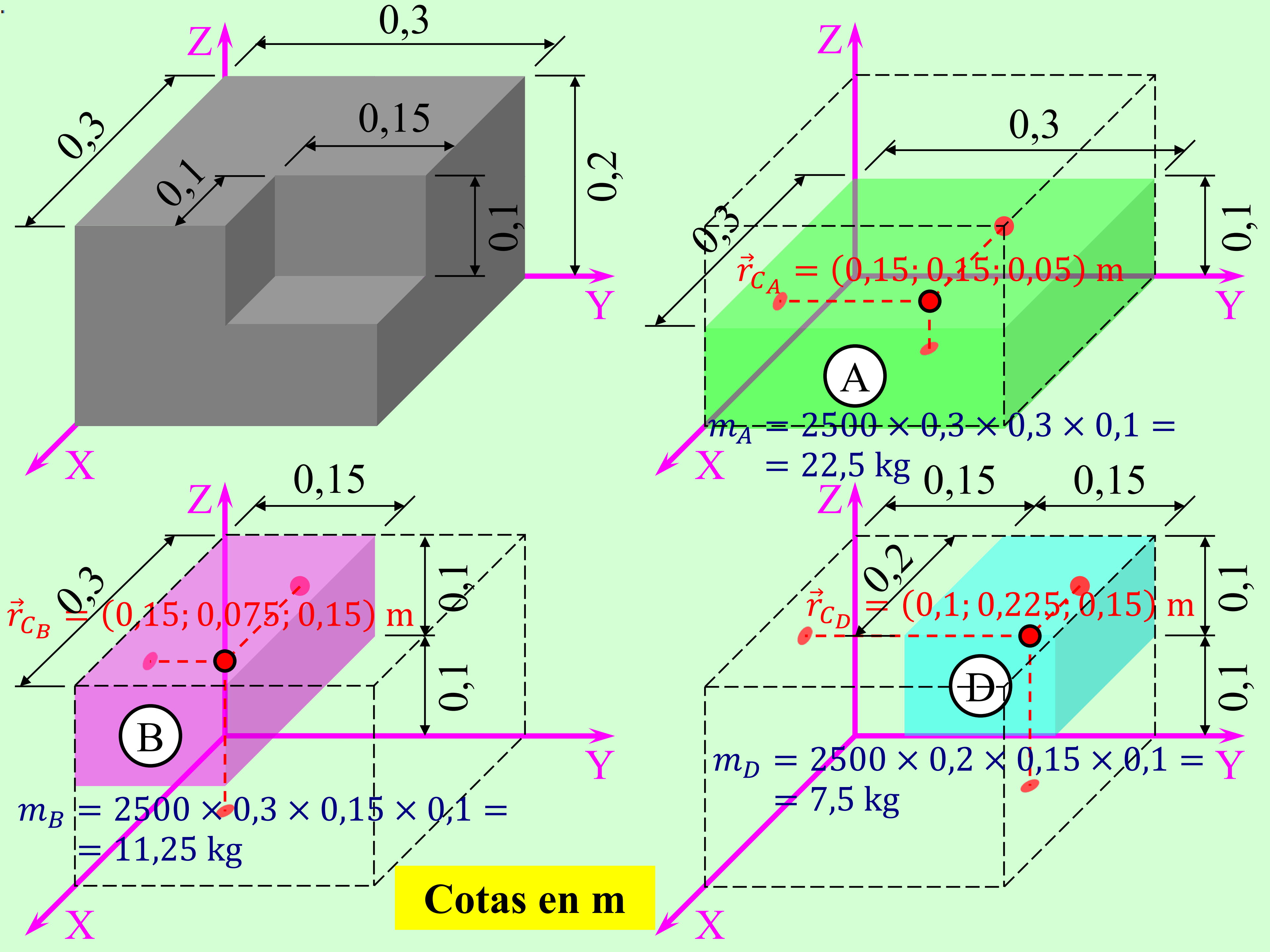
Un bloque de hormigón (densidad 2500 kg/m^3) tiene la forma y dimensiones (cotas en cm) que se muestran en la figura. Determínese la posición de su centro de masas en el sistema de referencia indicado.





Una de las formas (no la única) de descomponer el bloque, es en los tres ortoedros homogéneos indicados en la figura.

A continuación se va a obtener la masa, y las coordenadas del centro de masas, de cada ortoedro.

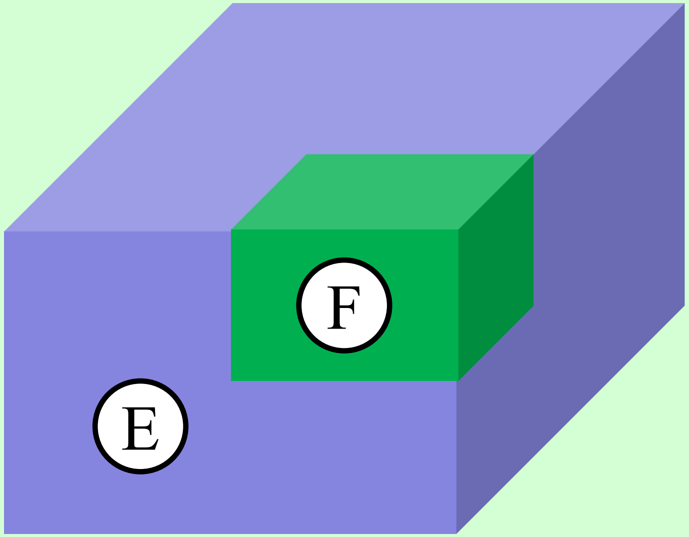


0,3
0,3
0,15
0,1
0,2
0,1
Z
Y
X
$\vec{r}_{C_A} = (0,15; 0,15; 0,05)$ m
A
$m_A = 2500 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,1 =$
$= 22,5$ kg
$\vec{r}_{C_B} = (0,15; 0,075; 0,15)$ m
B
$m_B = 2500 \times 0,3 \times 0,15 \times 0,1 =$
$= 11,25$ kg
0,15
0,15
0,2
$\vec{r}_{C_D} = (0,1; 0,225; 0,15)$ m
D
$m_D = 2500 \times 0,2 \times 0,15 \times 0,1 =$
$= 7,5$ kg
Cotas en m

$$\vec{r}_C = \frac{m_A \vec{r}_{C_A} + m_B \vec{r}_{C_B} + m_D \vec{r}_{C_D}}{m} =$$

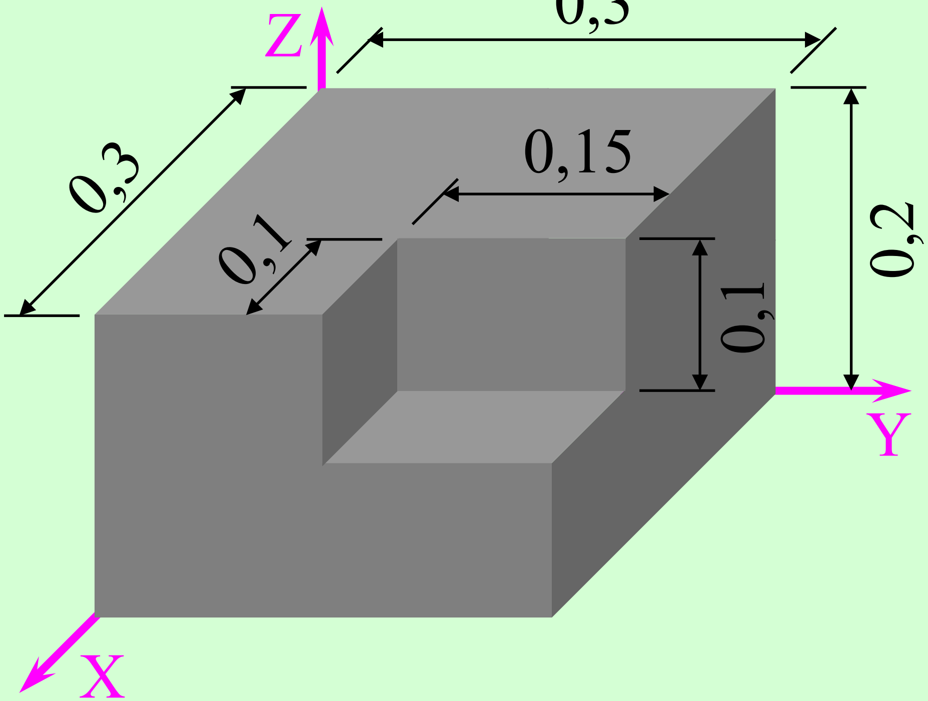
$$= \frac{22{,}5(0{,}15;0{,}15;0{,}05) + 11{,}25(0{,}15;0{,}075;0{,}15) + 7{,}5(0{,}1;0{,}225;0{,}15)}{22{,}5 + 11{,}25 + 7{,}5} =$$

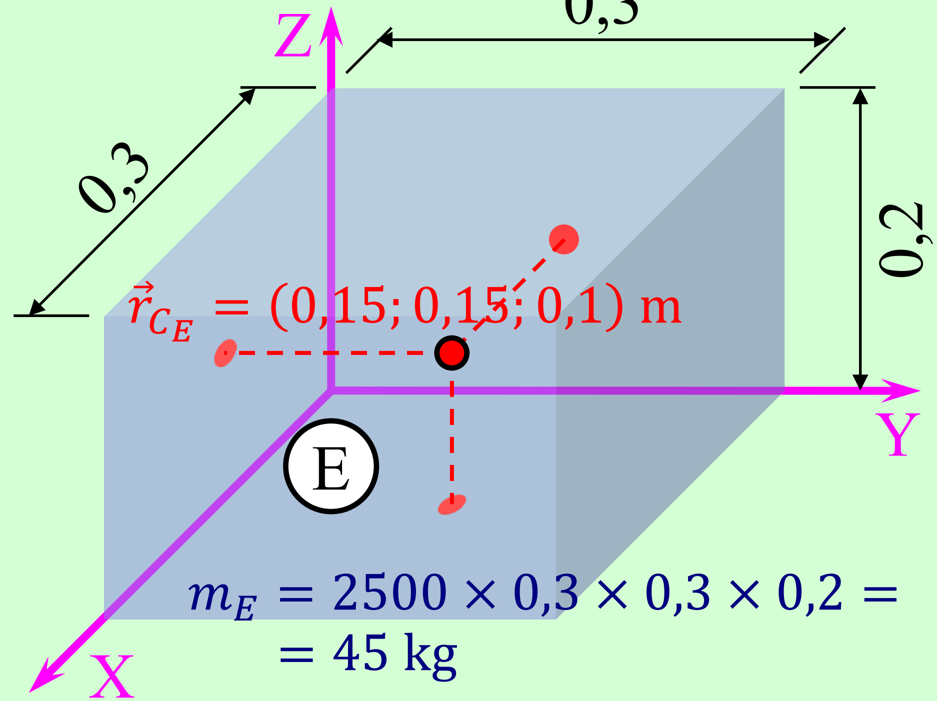
$$= (0{,}1409;0{,}1432;0{,}0955)\ \mathrm{m}$$

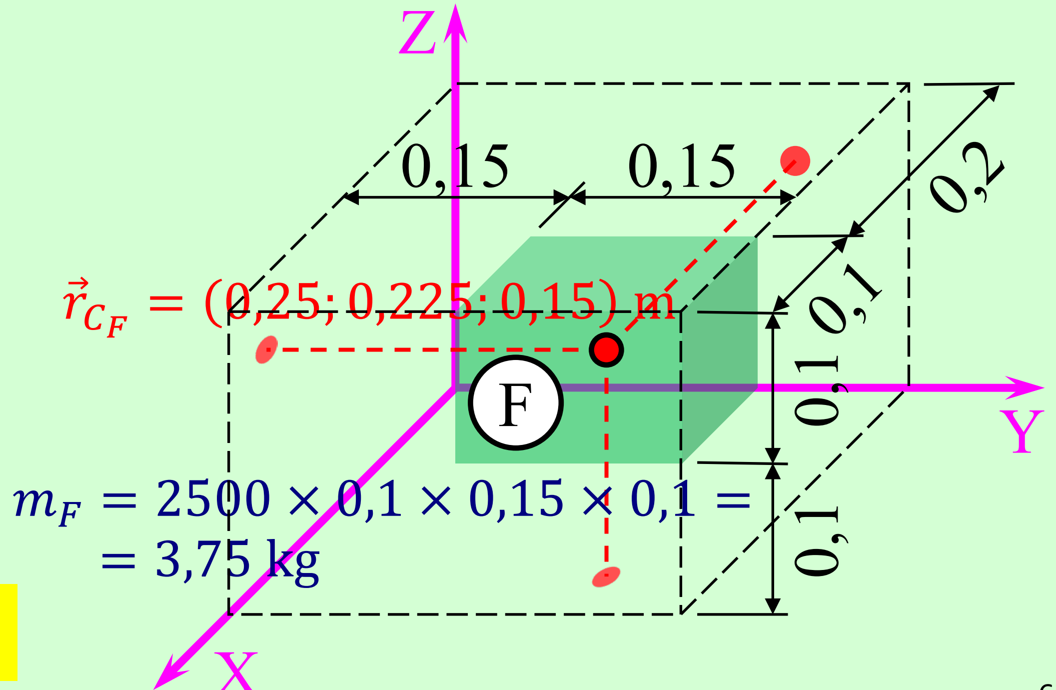


Una alternativa más sencilla, por implicar únicamente dos partes, es considerar el ortoedro E y quitarle el F, como se muestra en la figura.

A continuación se va a obtener la masa, y las coordenadas del centro de masas, de cada ortoedro.


Z
Y
X
0,3
0,3
0,15
0,1
0,1
0,2


Z
Y
X
0,3
0,3
0,2
$\vec{r}_{C_E} = (0{,}15;\, 0{,}15;\, 0{,}1)$ m
E
$m_E = 2500 \times 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}2 =$
$= 45$ kg


Z
Y
X
0,15
0,15
0,2
0,1
0,1
0,1
$\vec{r}_{C_F} = (0{,}25;\, 0{,}225;\, 0{,}15)$ m
F
$m_F = 2500 \times 0{,}1 \times 0{,}15 \times 0{,}1 =$
$= 3{,}75$ kg

Cotas en m

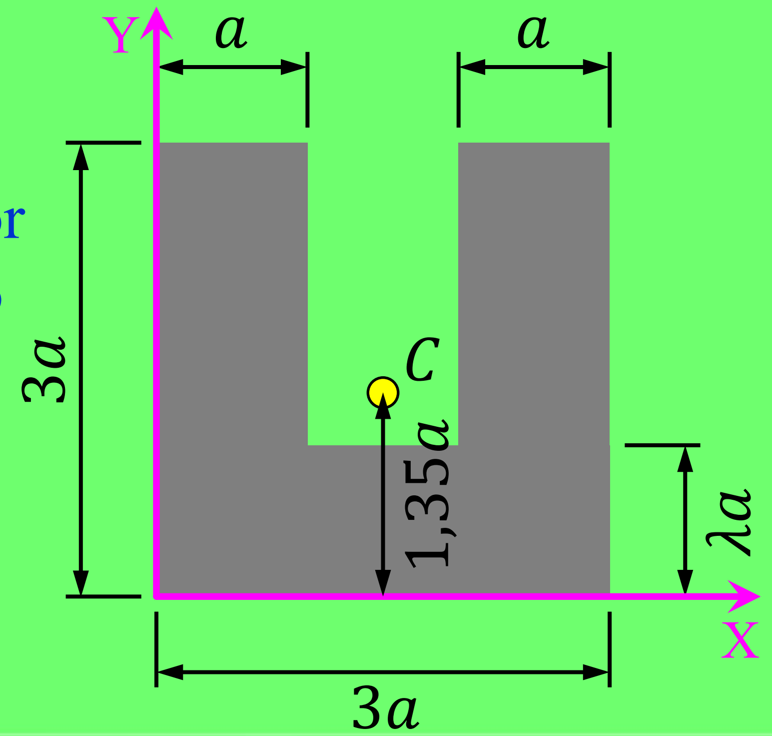
$$\vec{r}_C = \frac{m_E \vec{r}_{C_E} - m_F \vec{r}_{C_F}}{m} =$$

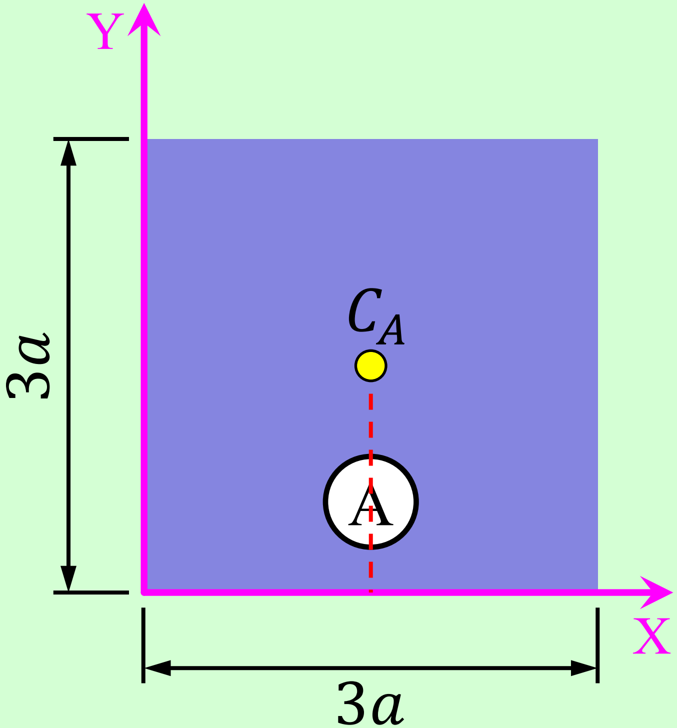
$$= \frac{45(0{,}15; 0{,}15; 0{,}1) - 3{,}75(0{,}25; 0{,}225; 0{,}15)}{45 - 3{,}75} =$$

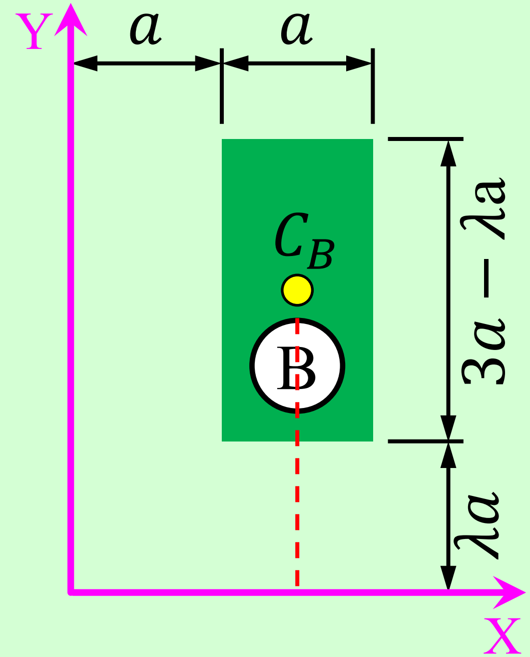
$$= (0{,}1409; 0{,}1432; 0{,}0955)\ \mathrm{m}$$

Ejercicio 5

Sea la placa homogénea y plana de la figura. ¿Qué valor ha de tener el factor λ para que la coordenada Y del centro de masas sea $y_C = 1{,}35a$?







La forma más sencilla de descomponer la placa es considerando el cuadrado A y quitando el rectángulo B, como se muestra en la figura.

Por tratarse de una placa homogénea, la densidad superficial σ es la misma en todos los puntos.

La masa y coordenada Y del centro de masas de cada parte son:

$$m_A = \sigma S_A = \sigma(3a)(3a) = 9\sigma a^2 \qquad y_{C_A} = 1{,}5a$$

$$m_B = \sigma S_B = \sigma(a)(3a - \lambda a) = \sigma a^2(3 - \lambda) \qquad y_{C_B} = \lambda a + (3a - \lambda a)/2 = (0{,}5\lambda + 1{,}5)a$$

Por tanto,

$$y_C = \frac{m_A y_{C_A} - m_B y_{C_B}}{m} =$$

$$= \frac{[9\sigma a^2][1{,}5a] - [\sigma a^2(3-\lambda)][(0{,}5\lambda + 1{,}5)a]}{[9\sigma a^2] - [\sigma a^2(3-\lambda)]} =$$

$$= \frac{\sigma a^3[13{,}5 - (3-\lambda)(0{,}5\lambda + 1{,}5)]}{\sigma a^2[9 - (3-\lambda)]} =$$

$$= \frac{13{,}5 - (1{,}5\lambda + 4{,}5 - 0{,}5\lambda^2 - 1{,}5\lambda)}{6+\lambda} a = \frac{9 + 0{,}5\lambda^2}{6+\lambda} a$$

Nótese que, en una distribución homogénea, la posición del centro de masas no depende de la densidad ni de la masa total.

Se quiere que sea $y_C = 1{,}35a$. Para ello,

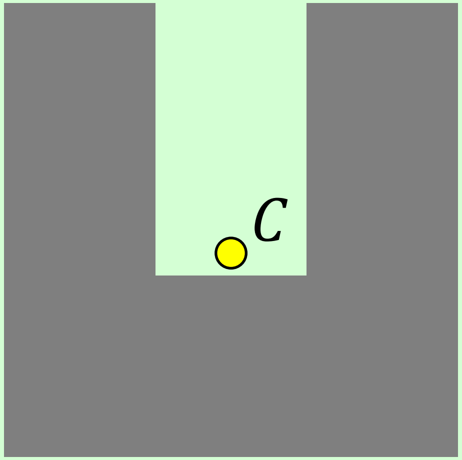
$$1{,}35a = \frac{9 + 0{,}5\lambda^2}{6 + \lambda}a \Rightarrow 1{,}35 = \frac{9 + 0{,}5\lambda^2}{6 + \lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 + 0{,}5\lambda^2 = 1{,}35(6 + \lambda) = 8{,}1 + 1{,}35\lambda \Rightarrow$$

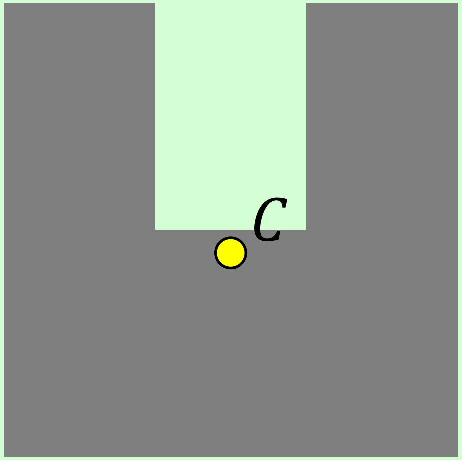
$$\Rightarrow 0{,}5\lambda^2 - 1{,}35\lambda + 0{,}9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1{,}2 \\ \lambda = 1{,}5 \end{cases}$$

Las representaciones gráficas que siguen muestran las soluciones.

$\lambda = 1{,}2$

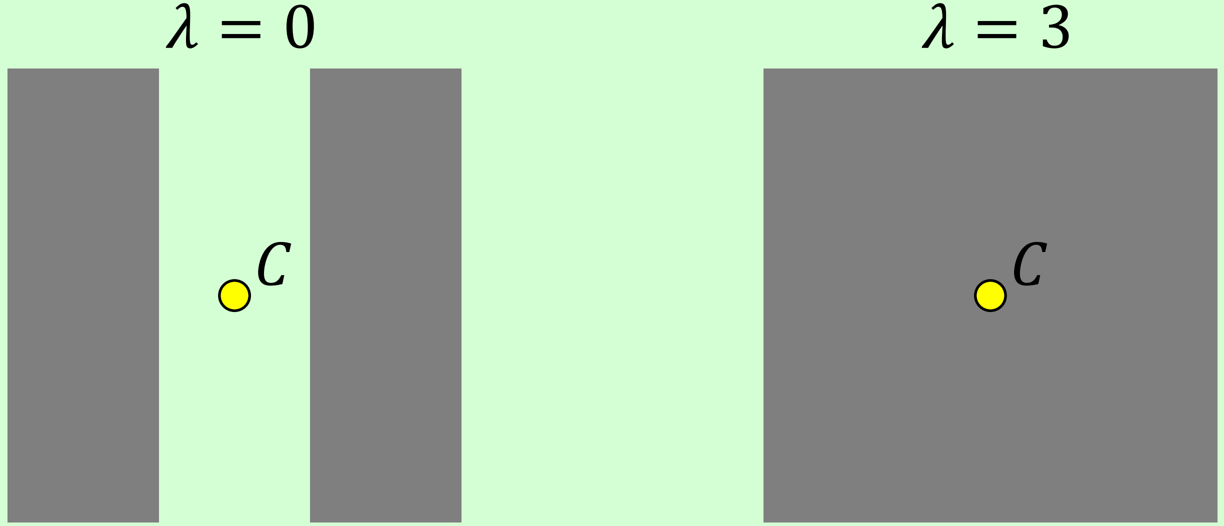


$\lambda = 1{,}5$



Tarea: Resuélvase el ejercicio para conseguir que sea $y_C = 1{,}5a$, y compruébese que en tal caso también hay dos soluciones, $\lambda = 0$ y $\lambda = 3$.

Las representaciones gráficas que siguen muestran las soluciones.

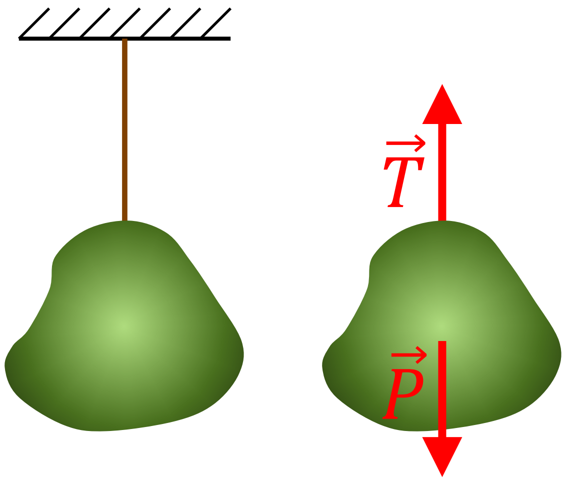


Fuerzas exteriores e interiores

Sea un sistema de puntos materiales.

- Se denomina fuerzas exteriores a las ejercidas sobre esos puntos por elementos que no forman parte del sistema.
- Se denomina fuerzas interiores a las ejercidas sobre esos puntos por otros puntos del propio sistema.

Consideremos como ejemplo un objeto colgado de un cable. Si analizamos el objeto, entonces:



- el peso $\vec{P}$ es una fuerza exterior, ya que la ejerce la Tierra, que no forma parte del objeto;
- la fuerza $\vec{T}$ ejercida por el cable es exterior, ya que dicho cable no forma parte del objeto;
- son fuerzas interiores las que los puntos del objeto se ejercen mutuamente.

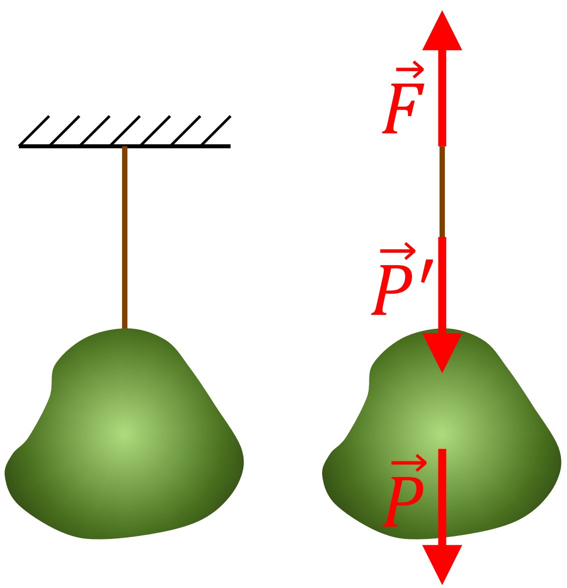
Fuerzas exteriores e interiores

Las fuerzas no son exteriores ni interiores por sí mismas, sino en relación al sistema de puntos materiales analizado.

Si se analiza un único punto material, todas las fuerzas ejercidas sobre él son exteriores.

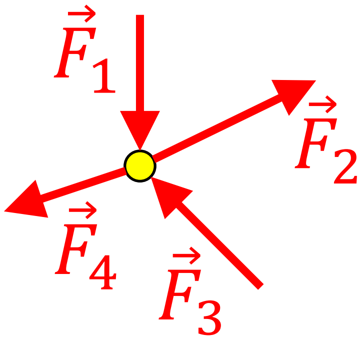
Si se analiza el Universo, todas las fuerzas que actúan son interiores.

En el ejemplo de un objeto colgado de un cable, si analizamos el conjunto objeto+cable, entonces:



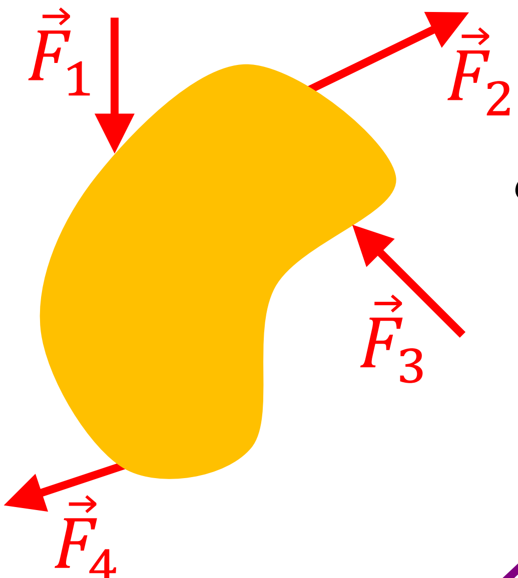
- son fuerzas exteriores los pesos $\vec{P}$ y $\vec{P}'$ del objeto y del cable, ejercidos por la Tierra, y la fuerza $\vec{F}$ ejercida por el techo;
- las fuerzas que el cable y el objeto se ejercen mutuamente (la $\vec{T}$ del diagrama anterior, de cable sobre objeto, y su opuesta, de objeto sobre cable), son interiores.

Teorema del centro de masas



Sea un punto material sobre el que actúa un conjunto de fuerzas de resultante $\vec{R}$. De acuerdo con la segunda ley de Newton, es

$$\vec{R} = m\vec{a}$$



¿Y para un sistema de puntos materiales?

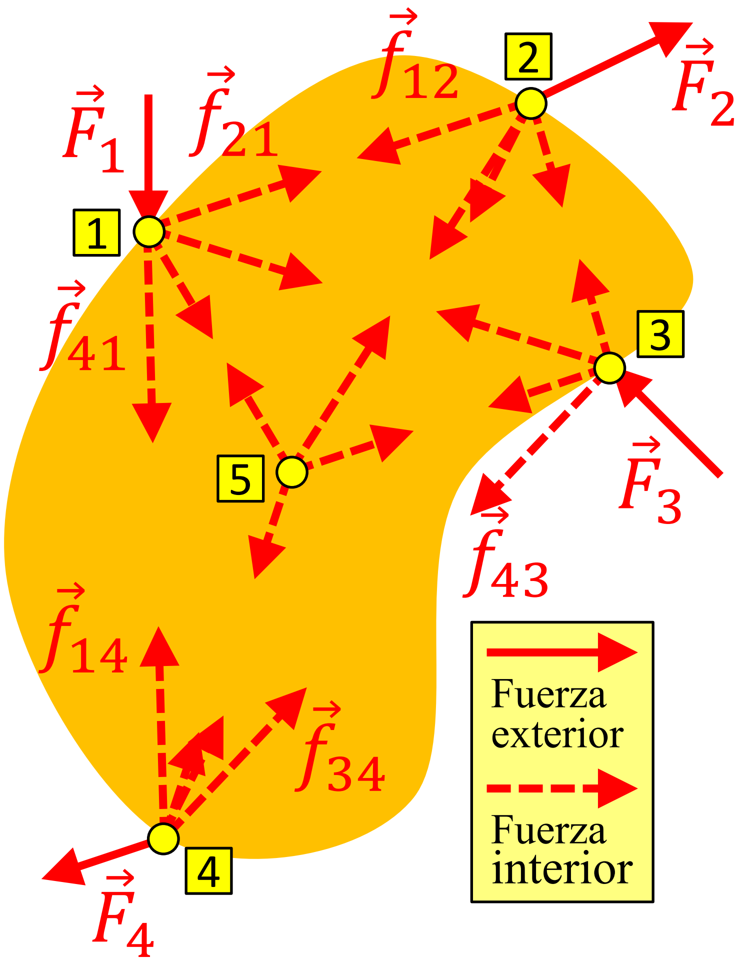
¿Masa total del sistema?

$$\vec{R} = m\vec{a}$$

¿Qué $\vec{a}$? ¡A menos que sea un sólido rígido en traslación, cada punto tiene su propia aceleración!

¿Resultante de las fuerzas exteriores? ¿O hay que incluir las interiores?

Teorema del centro de masas



Notación

$\vec{F}_i$: fuerza neta exterior que actúa sobre el punto i.

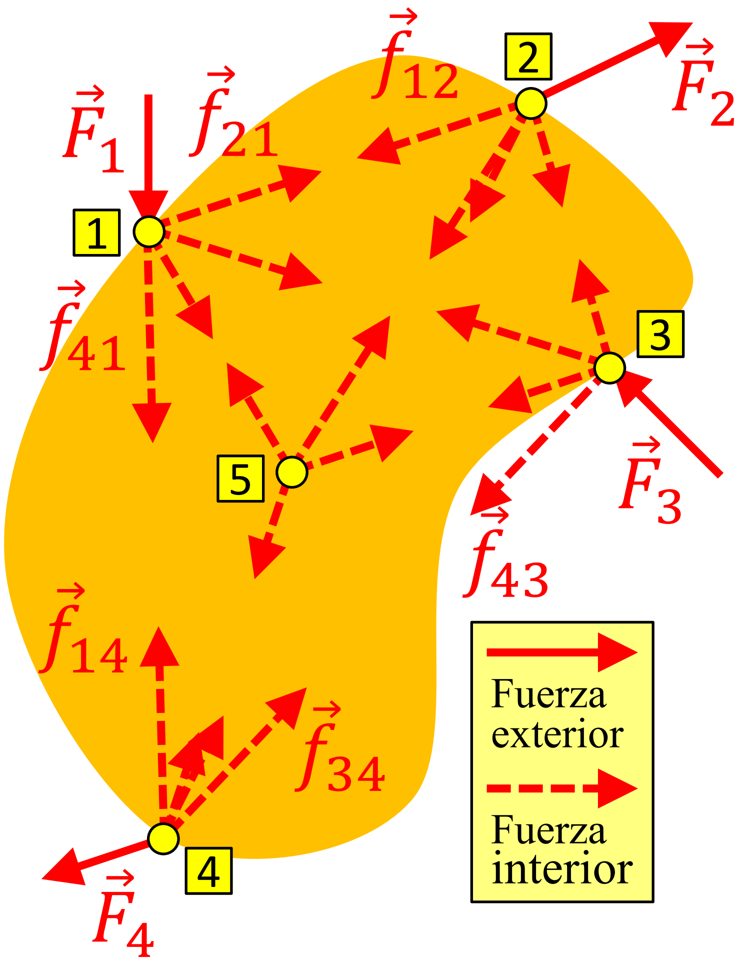
$\vec{f}_{ji}$: fuerza interior ejercida por el punto j sobre el i.

$\vec{f}_i$: fuerza neta interior ejercida sobre el punto i.

Es $\vec{f}_i = \vec{f}_{1i} + \vec{f}_{2i} + \cdots$

Por claridad, la figura solo muestra algunas fuerzas exteriores y parejas de interiores. En realidad hay que tener en cuenta todos los puntos del sistema, las fuerzas que actúan sobre ellos, y las que se ejercen mutuamente. Basta considerar $\vec{0}$ aquellas fuerzas que no estén realmente presentes.

Teorema del centro de masas



Aplicando la segunda ley de Newton al punto material i se tiene que

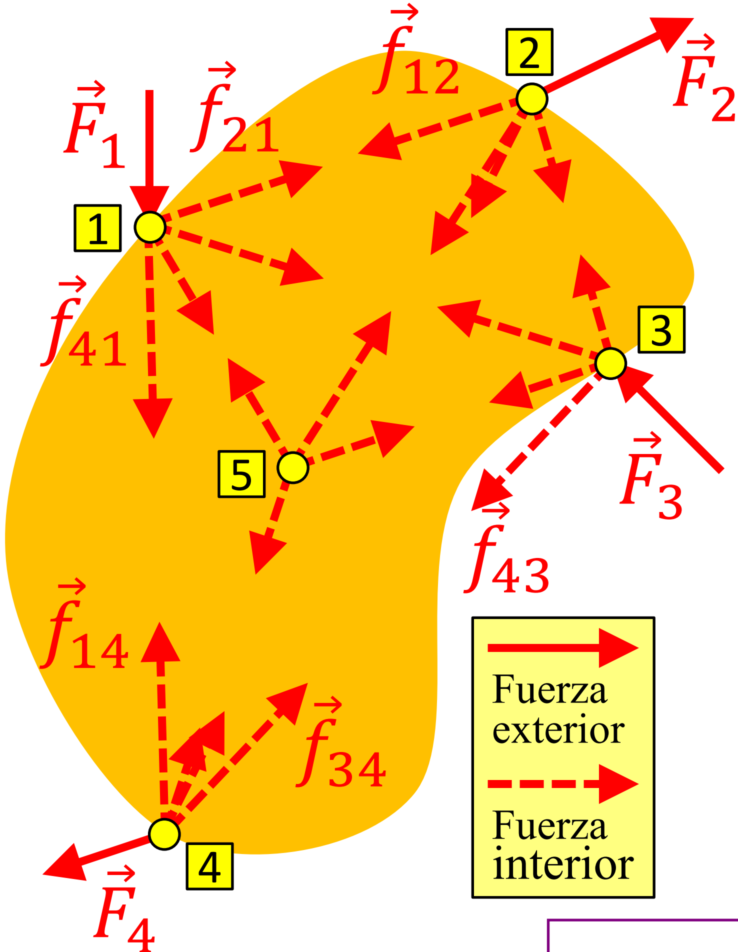
$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \vec{a}_i$$

Aquí m_i y $\vec{a}_i$ son la masa y la aceleración, respectivamente, del punto i.

Se tiene una igualdad de este tipo para cada punto i. Sumándolas todas, resulta

$$\sum \vec{F}_i + \sum \vec{f}_i = \sum m_i \vec{a}_i$$

Teorema del centro de masas



$\sum \vec{F}_i \longrightarrow$ Es la resultante $\vec{R}$ de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema.

$\sum \vec{f}_i \longrightarrow$ Es la resultante $\vec{0}$ de las fuerzas interiores que actúan entre puntos del sistema.

¿Y por qué es $\vec{0}$? Porque para cada pareja de puntos $(i;j)$ es $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ en virtud de la tercera ley de Newton.

Teorema del centro de masas

Recapitulando, a partir de la segunda y tercera leyes de Newton, hemos obtenido que

$$\vec{R} = \sum m_i \vec{a}_i$$

Aplicando la definición de aceleración, y siendo cada masa m_i constante, resulta

$$\vec{R} = \sum m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum \frac{d^2(m_i\vec{r}_i)}{dt^2} = \frac{d^2(\sum m_i\vec{r}_i)}{dt^2}$$

Utilizando la expresión del centro de masas de un sistema,

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m} \Rightarrow \sum m_i\vec{r}_i = m\vec{r}_C \Rightarrow \vec{R} = \frac{d^2(m\vec{r}_C)}{dt^2} = m\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2}$$

Teorema del centro de masas

En conclusión,

$$\boxed{\vec{R} = m\vec{a}_C}$$

Por tanto, el punto "mágico" cuya aceleración se obtiene a partir de la masa total del sistema de puntos materiales, m, y de la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre él, $\vec{R}$, es el centro de masas.

Teorema del centro de masas.

La aceleración del centro de masas de un sistema de puntos materiales sometido a un conjunto de fuerzas exteriores, es la misma que tendría un único punto con toda la masa del sistema, y sobre el que estuviera actuando la resultante de esas fuerzas exteriores.

Ejercicio 6

El vector de posición de un punto material, de masa $m_1 = 2$ kg, es $\vec{r}_1 = (5t^4; t^3; 2t)$ (SI). El de un segundo punto material, de masa $m_2 = 3$ kg, es $\vec{r}_2 = (0; t^3; -t^2)$ (SI). ¿Cuál es la resultante de las fuerzas exteriores que están actuando sobre el sistema formado por ambos puntos?

El vector de posición del centro de masas del sistema formado por los dos puntos es

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{2(5t^4; t^3; 2t) + 3(0; t^3; -t^2)}{2+3} =$$

$$= \frac{(10t^4; 2t^3; 4t) + (0; 3t^3; -3t^2)}{5} = \frac{(10t^4; 5t^3; 4t - 3t^2)}{5} =$$

$$= (2t^4;\ t^3; 0{,}8t - 0{,}6t^2) \text{ (SI)}$$

A partir de aquí, la velocidad del centro de masas, su aceleración, y la resultante de las fuerzas exteriores que están actuando sobre el sistema, se obtienen como sigue.

$$\vec{r}_C = (2t^4;\ t^3; 0{,}8t - 0{,}6t^2)(\mathrm{SI})$$

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = (8t^3; 3t^2; 0{,}8 - 1{,}2t)\ (\mathrm{SI})$$

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = (24t^2; 6t; -1{,}2)\ (\mathrm{SI})$$

$$\vec{R} = m\vec{a}_C = (2+3)(24t^2; 6t; -1{,}2) = (120t^2; 30t; -6)\ (\mathrm{SI})$$

Diagrama de cuerpo libre

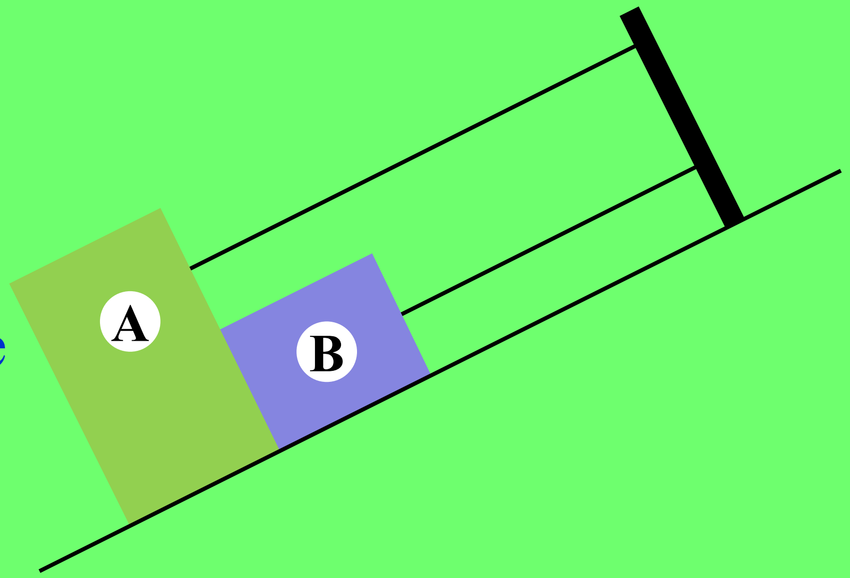
En un diagrama de cuerpo libre se representa el cuerpo analizado (ningún punto material más) y las fuerzas exteriores que actúan sobre él (ninguna que no actúe sobre él, y ninguna interior).

Se puede interpretar el diagrama de un cuerpo libre como el resultado de sustituir el resto del Universo por las fuerzas que ejerce sobre dicho cuerpo. De hecho, el movimiento del cuerpo en esta situación imaginaria sería idéntico al real.

Realizar diagramas de cuerpo libre es habitual y conveniente. Y en el contexto de esta asignatura, es obligatorio.

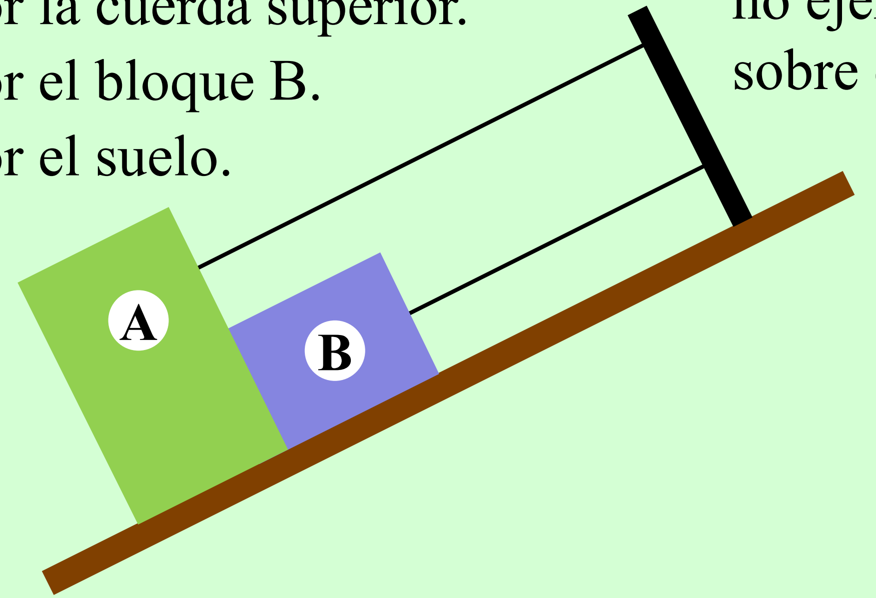
Ejercicio 7

Dos bloques A y B están apoyados en el suelo y en contacto entre sí. Ambos están sujetos a una pared mediante sendas cuerdas. No existe rozamiento entre los bloques, ni con el suelo. Realícese el diagrama de cuerpo libre del bloque A.



<u>Fuerzas actuantes sobre el bloque A</u>

$\vec{P}_A$: Ejercida por la Tierra.
$\vec{F}_{cA}$: Ejercida por la cuerda superior.
$\vec{F}_{BA}$: Ejercida por el bloque B.
$\vec{F}_{sA}$: Ejercida por el suelo.



La pared y la cuerda inferior no ejercen fuerza alguna sobre el bloque A.

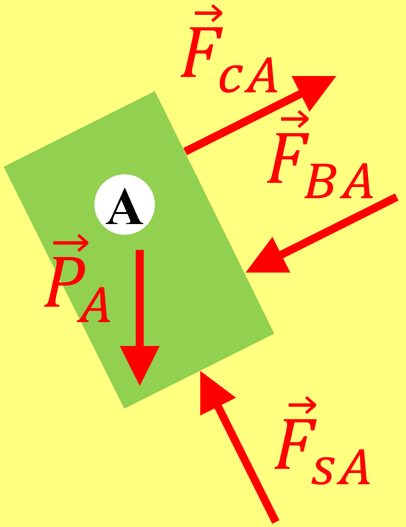
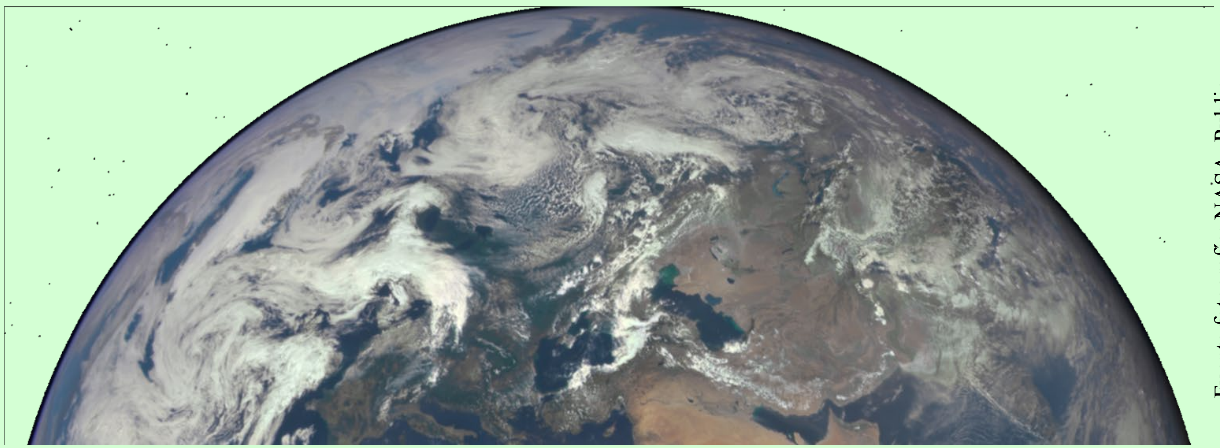


Diagrama de cuerpo libre del bloque A



Fuente fotografía: NASA, Public domain, via Wikimedia Commons

Peso y aceleración de la gravedad

La fuerza con que un objeto es atraído por la Tierra (su peso) es igual al producto de su masa por un vector llamado aceleración de la gravedad, $\vec{g}$.

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$$

El peso es una fuerza y, por tanto, se trata de una magnitud vectorial, y su unidad SI coherente es el N.

Peso y aceleración de la gravedad

El módulo g de la aceleración de la gravedad terrestre no es constante: disminuye al alejarnos de la superficie, ya sea hacia arriba o hacia abajo.

Tampoco es constante en la superficie, ya que la Tierra no es una esfera perfecta ni homogénea.

Por convenio, se considera $g = 9{,}80665\,\mathrm{m/s^2}$ (exacto) como valor estándar del módulo de la aceleración terrestre.*

En este documento se utilizará el valor $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, salvo indicación expresa en contrario.

* Este valor fue adoptado en 1901 en la tercera CGPM (*Conférence Générale des Poids et Mesures*).

Peso y aceleración de la gravedad

Por definición, la orientación de $\vec{g}$ es hacia abajo. Pero esto no es por definición de $\vec{g}$, sino por definición de "abajo" (es hacia donde se dirigen los cuerpos en caída libre, y por tanto "abajo" es la orientación de $\vec{g}$).

Aunque la diferencia sea despreciable, "abajo" no tiene por qué coincidir exactamente con la orientación en la que se encuentra el centro de la Tierra, ya que esta no es una esfera perfecta ni homogénea.

Masa inerte y masa gravitatoria

Las masas de las expresiones $\vec{F} = m\vec{a}$ y $\vec{P} = m\vec{g}$ son conceptualmente diferentes.

- La de $\vec{F} = m\vec{a}$ caracteriza la resistencia de un cuerpo a cambiar su estado de movimiento (su velocidad), y se denomina masa inerte, m_{in}.
- La de $\vec{P} = m\vec{g}$ caracteriza la respuesta de un cuerpo a un campo gravitatorio, y se denomina masa gravitatoria, m_g.

Como comparación, la carga eléctrica q de un cuerpo caracteriza su respuesta, $\vec{F}_e = q\vec{E}$, a un campo eléctrico $\vec{E}$.

Masa inerte y masa gravitatoria

Masa inerte, masa gravitatoria y carga eléctrica son a priori independientes, pues caracterizan fenómenos físicos sin relación entre sí.

De igual forma que un cuerpo con doble masa inerte que otro no tiene por qué tener (y en general no tiene) doble carga eléctrica, tampoco hay motivo a priori para que tenga doble masa gravitatoria. En otras palabras, tener doble resistencia a cambiar de velocidad no implica que se duplique la respuesta a los campos eléctrico y gravitatorio.

Sin embargo, experimentalmente se comprueba que masa inerte y masa gravitatoria no son independientes. Es más, son proporcionales y, adoptando el 1 como factor de proporcionalidad, idénticas.

Masa inerte y masa gravitatoria

Esta equivalencia desconcertaba a Newton, y ha sido muy estudiada. En la actualidad, está establecida experimentalmente con una precisión relativa de aproximadamente 10^{-12}. Esto hace de ella una de las leyes mejor establecidas de la Física.

En la Física Moderna, esta coincidencia verificada experimentalmente pasa a ser una igualdad exacta, consecuencia de la teoría de la relatividad general de Einstein.

Esta igualdad está relacionada con el hecho de que los campos gravitatorios desvíen los rayos de luz, y con las correspondientes consecuencias como la existencia de los agujeros negros.

En lo que sigue, en este documento hablaremos de masa, sin distinción entre la inerte y la gravitatoria.

Centro de gravedad

Sea un sistema de puntos materiales, cada uno de ellos de masa m_i y vector de posición $\vec{r}_i$.

Bajo la acción de un campo gravitatorio, cada punto tendrá un peso $\vec{P}_i = m_i\vec{g}_i$, donde $\vec{g}_i$ es la aceleración local de la gravedad.

Si en todos los puntos la orientación de $\vec{g}_i$ es la misma, todos los vectores $\vec{P}_i$ son paralelos.

Centro de gravedad

Por tanto, el sistema constituido por el conjunto de los pesos es equivalente a su resultante, $\vec{P} = \sum \vec{P}_i = \sum m_i \vec{g}_i$, actuando en el punto G situado en

$$\boxed{\vec{r}_G = \frac{\sum m_i g_i \vec{r}_i}{\sum m_i g_i}}$$

Ese punto recibe el nombre de centro de gravedad (abreviado c.d.g.) del sistema de puntos materiales.

Nótese que se trata de la posición media de los puntos materiales del sistema, ponderada por los módulos de los pesos correspondientes (no por sus masas, que es el caso para el centro de masas).

Centro de gravedad

En sistemas no extensos (en los que g_i se puede considerar constante g con suficiente grado de aproximación), el centro de gravedad coincide con el centro de masas.

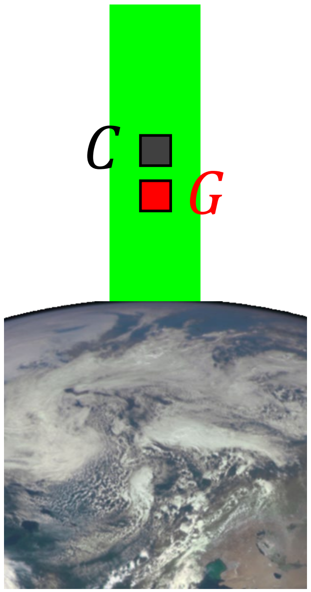
$$\vec{r}_G = \frac{\sum m_i g \vec{r}_i}{\sum m_i g} = \frac{g \sum m_i \vec{r}_i}{g \sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} = \vec{r}_C$$

Cabe insistir en que esta coincidencia no es general.

- El centro de masas es un punto caracterizado por la geometría de masas del cuerpo.
- El centro de gravedad está ligado a la existencia de un campo gravitatorio, y su posición depende de las características de dicho campo.

Centro de gravedad

Como ejemplo, sea un bloque ortoédrico homogéneo, muy alto, situado sobre la superficie terrestre.



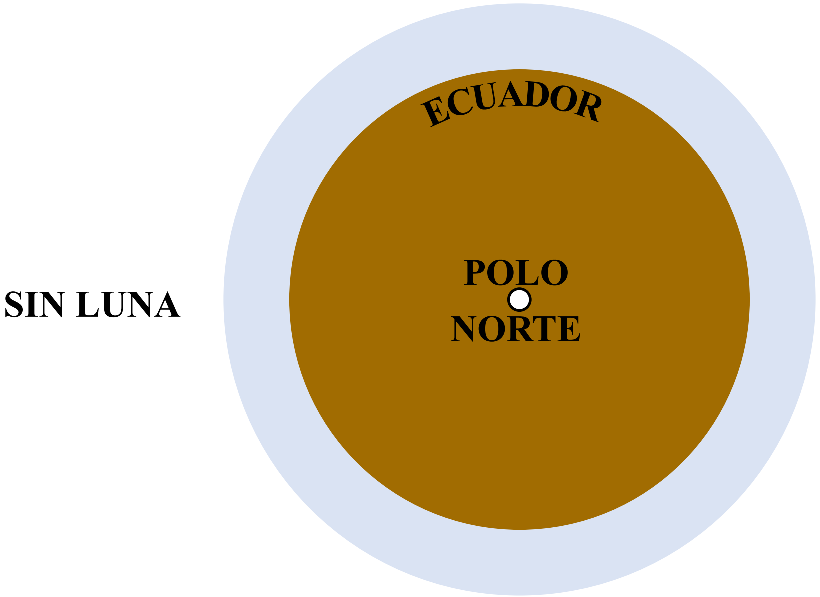
Fuente fotografía: NASA, Public domain, via Wikimedia Commons

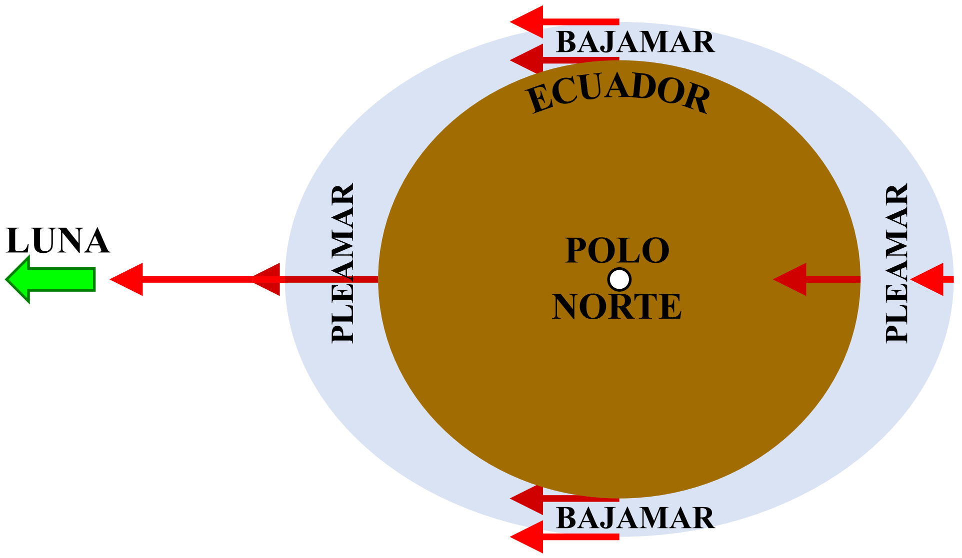
Por ser homogéneo, la masa está repartida uniformemente. Por tanto, el centro de masas está en el centro del bloque.

El campo gravitatorio es más intenso cuanto más cerca de la superficie terrestre. Por tanto, las partículas inferiores tienen más peso que las superiores, y el centro de gravedad queda desplazado respecto al punto medio.

Mareas

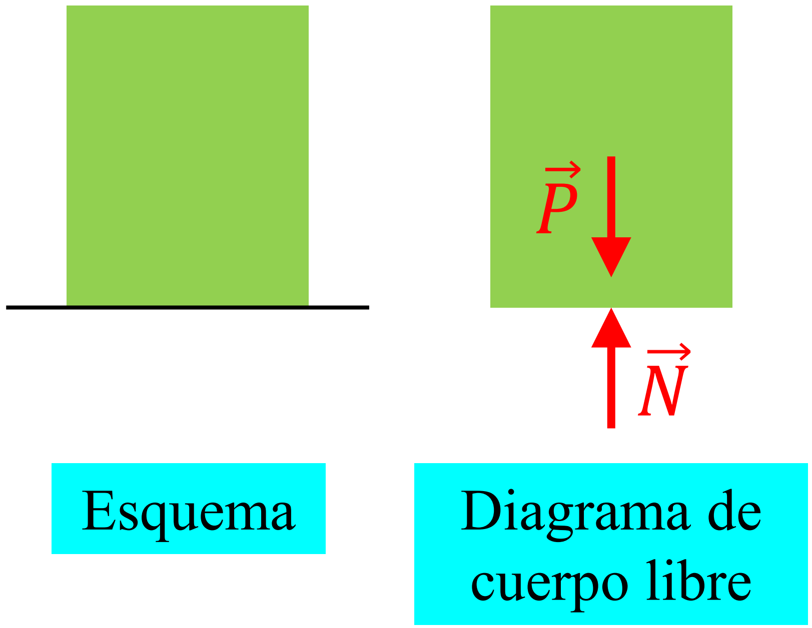
Las mareas no se deben a la existencia del campo gravitatorio lunar (o solar), sino a que dicho campo no es uniforme.





Reacción normal

Sea un bloque de masa m situado sobre una superficie horizontal.



Las fuerzas que actúan sobre el bloque son:

$\vec{P}$: peso, debido a la atracción gravitatoria de la Tierra.

$\vec{N}$: fuerza ejercida por el suelo, que impide que el bloque lo atraviese.

$\vec{N}$ actúa perpendicularmente a la superficie de contacto, por lo que se denomina fuerza normal, reacción normal o, simplemente, normal.

En realidad es la resultante del conjunto de fuerzas paralelas ejercidas por el suelo sobre los puntos de contacto.

Reacción normal

Aquí "normal" se utiliza en su acepción de "perpendicular", no en la de "habitual".

normal

Del lat. *normālis.*

1. adj. Dicho de una cosa: Que se halla en su estado natural.

2. adj. Habitual u ordinario.

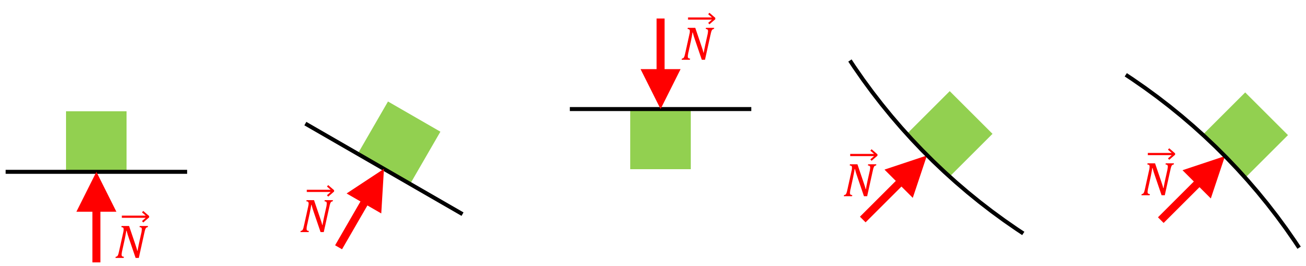
3. adj. Que sirve de norma o regla.

4. adj. Dicho de una cosa: Que, por su naturaleza, forma o magnitud, se ajusta a ciertas normas fijadas de antemano.

5. adj. *Geom.* Dicho de una línea recta o de un plano: Perpendicular a otra recta o a otro plano. Apl. a línea, u. t. c. s. f.

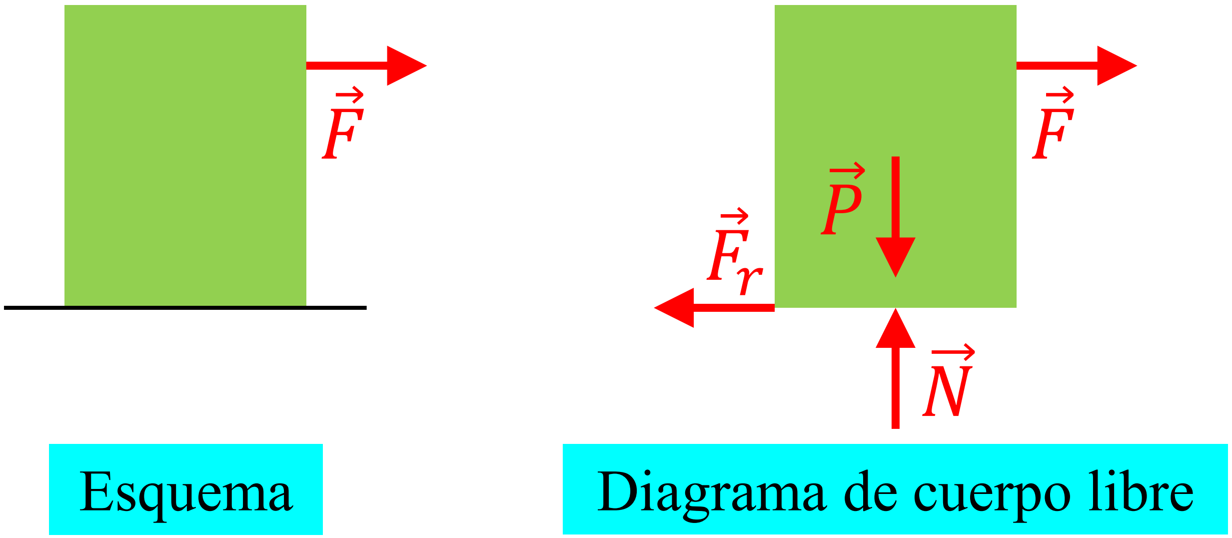
6. adj. *Geom.* Dicho de una línea: Perpendicular en el punto de contacto al plano o recta tangentes a una superficie o línea curvas. U. t. c. s. f.

Fuente: Real Academia Española, https:///www.rae.es



Fuerza de rozamiento

Si se tira del bloque con una fuerza horizontal $\vec{F}$, ¿qué ocurre?



El suelo ejerce sobre el bloque una fuerza $\vec{F}_r$, tangente a la superficie de contacto, que se opone al desplazamiento relativo (deslizamiento). Se denomina fuerza de rozamiento.

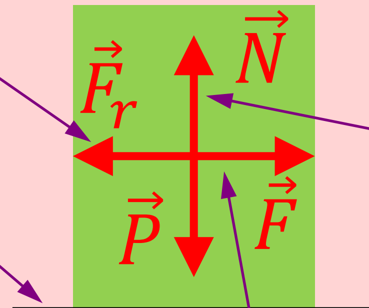
En realidad es la resultante del conjunto de fuerzas paralelas ejercidas por el suelo sobre los puntos de contacto.

Un inciso

Este diagrama de cuerpo libre es intolerable, y no se tolerará.

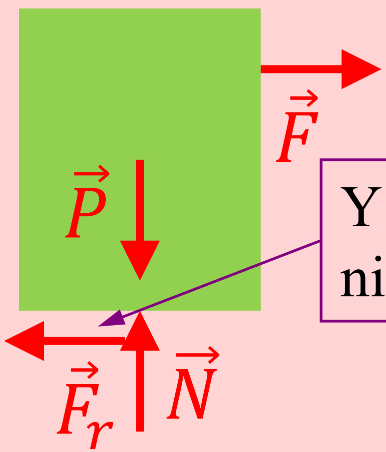
$\vec{F}_r$ no actúa ahí. ¡Ni siquiera está sobre su línea de acción!

Solo debe aparecer el cuerpo analizado. Por tanto, el suelo sobra.

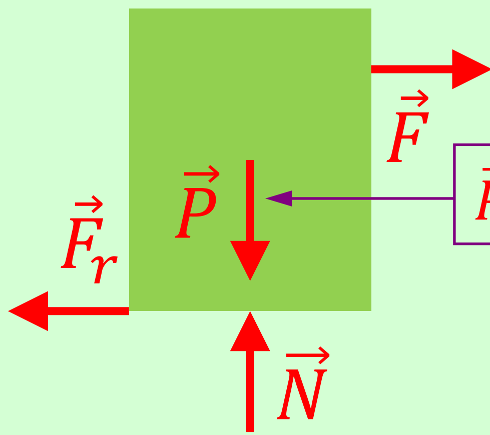


$\vec{N}$ está sobre su línea de acción, pero es mejor que se coloque en su punto de aplicación.

$\vec{F}$ no actúa ahí. ¡Ni siquiera está sobre su línea de acción!



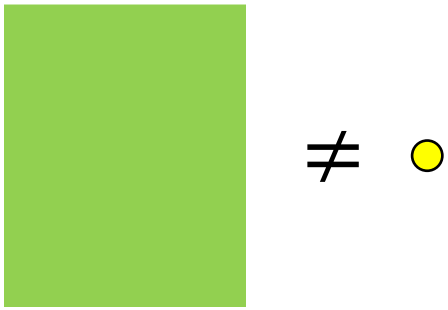
Y “eso”, ni hablar.



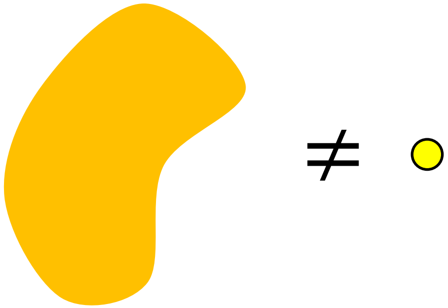
$\vec{P}$ estaba bien. ¡Albricias!

Un inciso

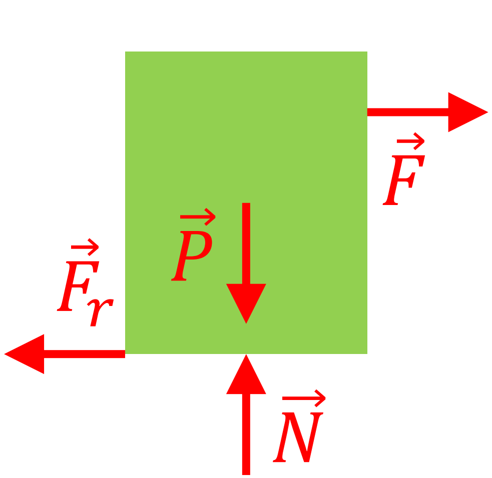
En resumen, un bloque no es un punto.
Es, ¡¡sorpresa!!, un bloque.



Y lo mismo se aplica a cualquier sistema
de puntos materiales que tenga más de uno.



Deslizamiento inminente



Si existe rozamiento, una fuerza $\vec{F}$ de módulo pequeño es compensada por una $\vec{F}_r$ opuesta, y el bloque permanece en reposo.

Si F aumenta gradualmente, también lo hace F_r, y se mantiene el reposo… hasta un límite.

Existe un módulo máximo, $F_{r\,máx}$, que el de $\vec{F}_r$ no puede sobrepasar. Cuando se alcanza, el deslizamiento es inminente.

> **inminente**
>
> Del lat. *immĭnens, -entis*, part. pres. act. de *imminēre* 'amenazar'.
>
> 1. adj. Que amenaza o está para suceder prontamente.

Aún no ha ocurrido, pero está a punto.

Fuente: Real Academia Española, https:///www.rae.es

Coeficientes de rozamiento

Experimentalmente se comprueba que el módulo máximo de la fuerza de rozamiento depende de:

- las superficies en contacto (materiales, grado de pulimento, suciedad, …; del área, no);
- el módulo de la fuerza normal que se ejercen entre ellas (en concreto, se trata de proporcionalidad directa).

Por tanto,

$$\boxed{F_{r_{máx}} = \mu N}$$

El coeficiente de proporcionalidad μ, característico de las dos superficies en contacto, recibe el nombre de coeficiente estático de rozamiento.

Coeficientes de rozamiento

$$\boxed{F_{r_{máx}} = \mu N}$$

Detalles a considerar

- Se trata de una relación de módulos, no de vectores, ya que las fuerzas $\vec{F}_r$ y $\vec{N}$ no son paralelas, sino perpendiculares. En resumen, $\vec{F}_{r_{máx}} \neq \mu\vec{N}$.
- Puesto que es el cociente entre dos módulos de fuerzas, el coeficiente estático de rozamiento es una magnitud de dimensión uno.
- En un objeto que no desliza, el módulo de la fuerza de rozamiento es en general menor que el máximo, $F_r < F_{r_{máx}}$. Únicamente coinciden, $F_r = F_{r_{máx}}$, cuando el deslizamiento es inminente.

Coeficientes de rozamiento

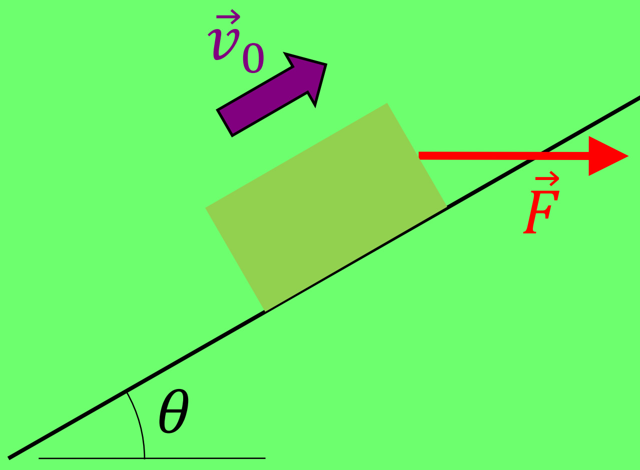
Cuando un objeto ya está deslizando, la interacción entre superficies se hace más difícil. El módulo de la fuerza de rozamiento es ligeramente inferior al que hubo que vencer para iniciar el movimiento.

El coeficiente μ' entre F_r y N en esta situación se denomina coeficiente cinético de rozamiento o coeficiente dinámico de rozamiento. Es $\mu' < \mu$, y también es una magnitud de dimensión uno.

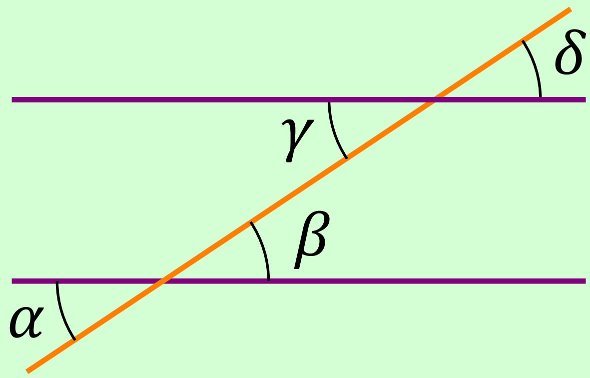
En este documento consideraremos $\mu' = \mu$, salvo que específicamente se indique lo contrario.

Ejercicio 8

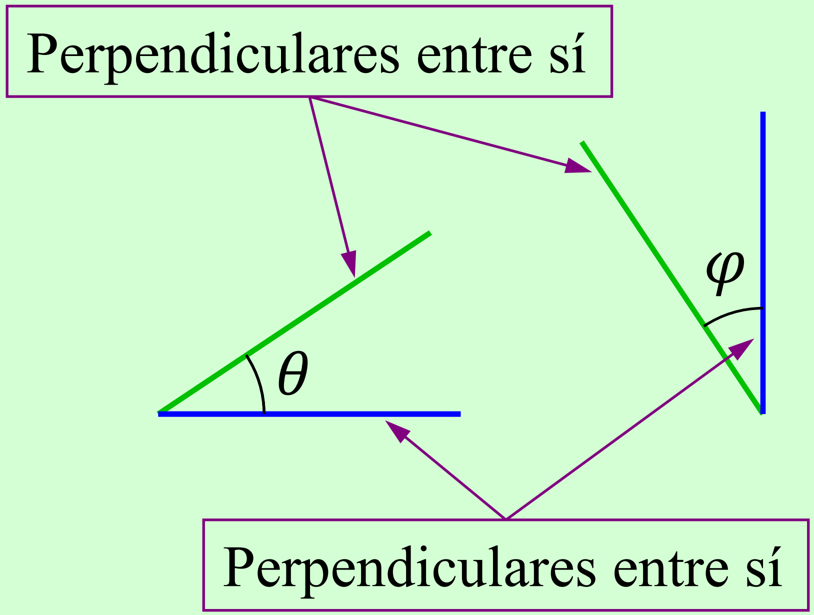
Un bloque de masa $m = 3$ kg asciende inicialmente a $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$ a lo largo de un plano inclinado un ángulo $\theta = 27°$, con el que tiene un coeficiente de rozamiento $\mu = 0{,}2$. Del bloque tira una fuerza horizontal de módulo $F = 30$ N. ¿Cuál es el módulo de la velocidad del bloque después de recorrer 10 m?



Antes de comenzar con el ejercicio, es conveniente un repaso visual sobre ángulos de igual valor.

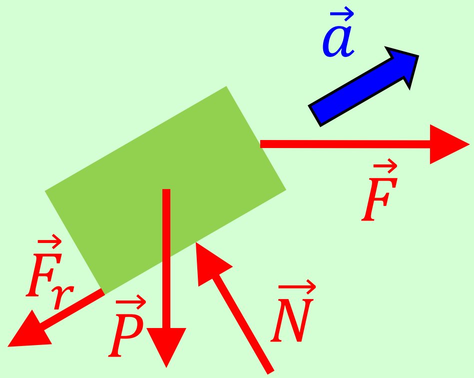


$$\alpha = \beta = \gamma = \delta$$



$$\theta = \varphi$$

El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, el bloque en este caso.



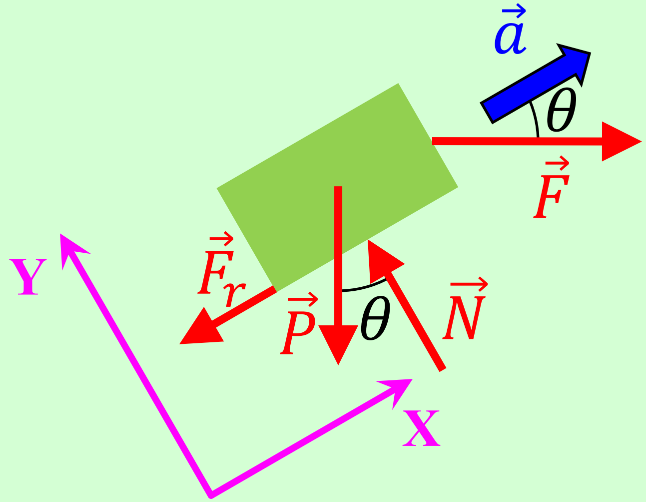
Las fuerzas que actúan sobre el bloque son:

- $\vec{F}$: mencionada en el enunciado.
- $\vec{P}$: peso.
- $\vec{N}$: reacción normal.
- $\vec{F}_r$: fuerza de rozamiento.

Como consecuencia de la acción de estas fuerzas, el bloque tiene una aceleración $\vec{a}$ (común al centro de masas y a todos los puntos del bloque, ya que el movimiento resultante es de traslación).

Se conoce la orientación de todos los vectores excepto $\vec{a}$, que puede tener el sentido representado (si F es lo suficientemente grande) o el opuesto (si no lo es).

Hay que establecer un sistema de referencia, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.



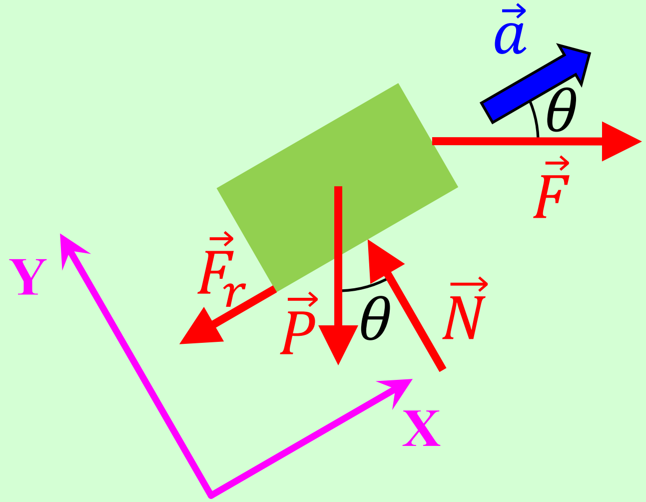
De $\vec{F}$ y $\vec{P}$ se conocen módulos y orientaciones.

De $\vec{N}$ y $\vec{F}_r$ se conocen sus orientaciones, pero no sus módulos.

De $\vec{a}$ se conoce su dirección, pero no su módulo ni su sentido. Por tanto, se desconoce su componente X, aunque sí se sabe que la Y es 0.

Por tanto, tenemos 3 incógnitas, N, F_r y a_x. Necesitamos pues 3 ecuaciones.

Hay que establecer un sistema de referencia, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.



Inciso:

$$\cancel{N = mg\cos\theta}$$

No es cierto en general. Y en los casos en que lo sea, debe llegarse a ello por medio del desarrollo, y no como un apriorismo.

Aplicando el teorema del centro de masas,

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r + \vec{F} = m\vec{a}$$

$$(-3 \times 9{,}8 \operatorname{sen} 27°\,; -3 \times 9{,}8 \cos 27°) + (0; N) + (-F_r; 0) +$$

$$+(30 \cos 27°\,; -30 \operatorname{sen} 27°) = 3\,(a_x; 0)$$

$$\begin{cases} -13{,}35 - F_r + 26{,}73 = 3a_x \\ -26{,}20 + N - 13{,}62 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -13{,}35 - F_r + 26{,}73 = 3a_x \\ -26{,}20 + N - 13{,}62 = 0 \end{cases}$$

$$-26{,}20 + N - 13{,}62 = 0 \longrightarrow N = 39{,}82\ \mathrm{N} \quad (\neq mg\cos\theta)$$

Como el bloque está deslizando,

$$F_r = F_{r\,\text{máx}} = \mu N = 0{,}2N \longrightarrow F_r = 0{,}2 \times 39{,}82 = 7{,}964\ \mathrm{N}$$

$$-13{,}35 - 7{,}964 + 26{,}73 = 3a_x \longrightarrow a_x = 1{,}805\ \mathrm{m/s^2}$$

Se trata de un movimiento rectilíneo con aceleración constante. Por tanto, es aplicable la expresión

$$v_x = \sqrt{v_{x_0}^2 + 2a_x(x - x_0)} = \sqrt{2^2 + 2 \times 1{,}805 \times 10} = 6{,}332\ \mathrm{m/s}$$

$v = 6{,}332\ \mathrm{m/s}$

La última parte del ejercicio es una aplicación de cinemática. La parte de dinámica ha consistido en obtener a_x conociendo m, F, μ, θ y g.

El ejercicio se resolvería con el mismo planteamiento si alguno de esos datos fuera desconocido, y a cambio se conociera a_x.

Sabiendo que $a_x = 3\,\mathrm{m/s^2}$:

- ¿cuál es la masa del bloque, si el resto de datos son los mismos? $m = 2{,}611\,\mathrm{kg}$
- ¿cuál es el módulo de la fuerza horizontal que tira del bloque, si el resto de datos son los mismos? $F = 34{,}47\,\mathrm{N}$
- ¿cuál es el coeficiente de rozamiento del bloque con el plano inclinado, si el resto de datos son los mismos? $\mu = 0{,}1101$
- ¿cuál es el módulo de la aceleración de gravedad del planeta en que nos hallamos, si el resto de datos son los mismos? $g = 7{,}912\,\mathrm{m/s^2}$
- ¿cuál es el ángulo de inclinación del plano, si el resto de datos son los mismos? $\theta = 22{,}14°$ (aviso: las ecuaciones obtenidas son más complicadas de resolver en este caso)

Tarea:

Resuélvase el ejercicio con $F = 22{,}5\ \mathrm{N}$, y compruébese que en tal caso es $a_x = -0{,}1940\ \ \mathrm{m/s^2}$ y $v = 0{,}3464\,\mathrm{m/s}$.

A partir de este valor de a_x, obténgase también:

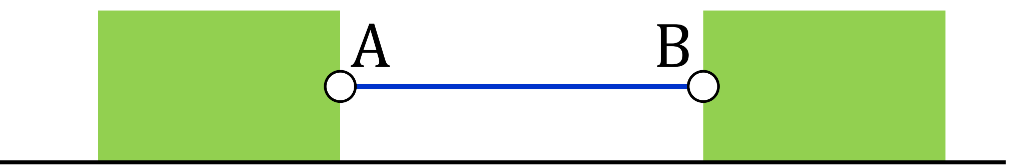
a) el módulo de la velocidad del bloque tras recorrer $11\ \mathrm{m}$ (resulta $v = \sqrt{-0{,}268}\,\mathrm{m/s}$, lo que indica que no le es posible llegar allí);

b) la distancia que recorre el bloque hasta detenerse (resultado: $d = 10{,}31\ \mathrm{m}$)

Elementos ideales

Se dice que una cuerda, hilo o cable es ideal si es inextensible y carece de masa.

Ejemplo de consecuencias de cuerda ideal tensa



Por ser inextensible, los puntos A y B tienen el mismo desplazamiento, la misma velocidad, y la misma aceleración.

Diagrama de cuerpo libre de la cuerda

Por carecer de masa, es:

$$\vec{T}_A + \vec{T}_B = 0\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{T}_A = -\vec{T}_B \Rightarrow$$

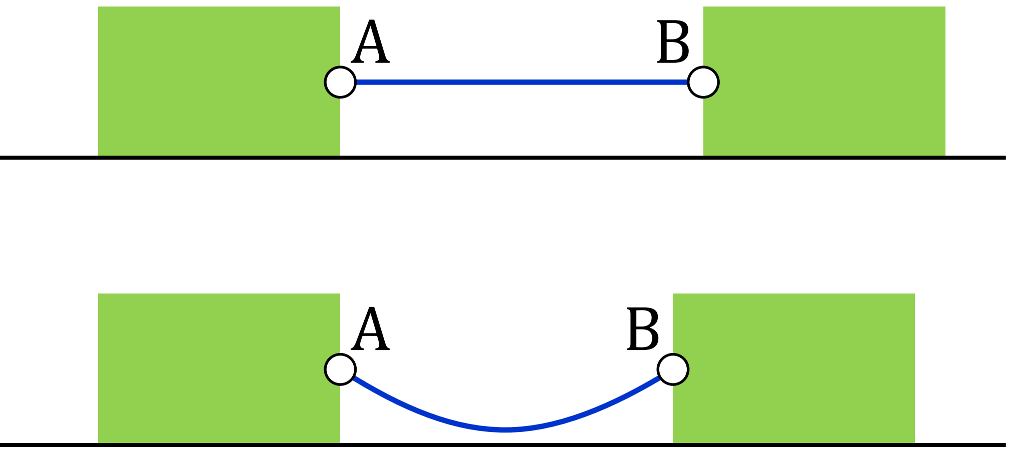
$$\Rightarrow T_A = T_B$$

El módulo de la tensión no varía a lo largo de la cuerda.

Elementos ideales

Se dice que una cuerda, hilo o cable es ideal si es inextensible y carece de masa.

Ejemplo de consecuencias de cuerda ideal no tensa



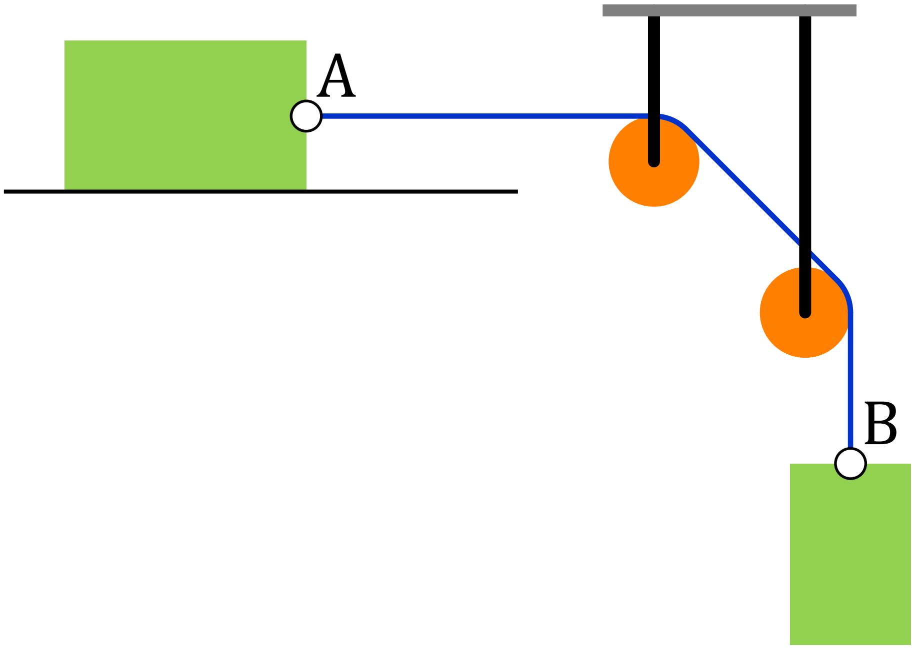
La cuerda no ejerce ninguna fuerza.

El desplazamiento, la velocidad y la aceleración de los puntos A y B no coinciden.

Elementos ideales

Se dice que una polea es ideal si gira sin fricción y carece de masa.

Ejemplo de consecuencias de cuerda y poleas ideales

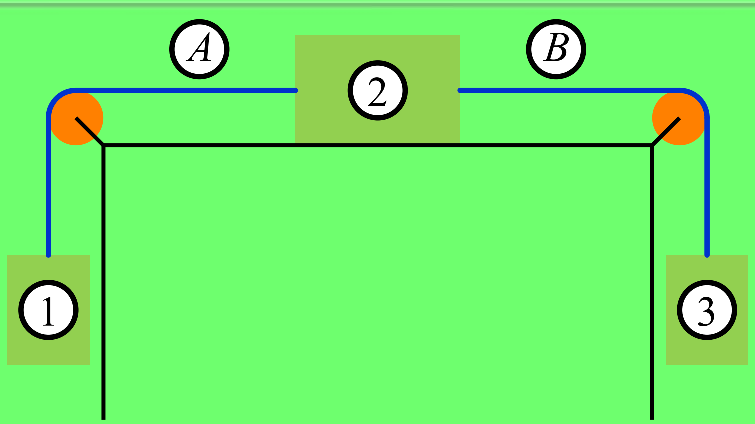


Por ser la cuerda inextensible, el espacio recorrido por el punto B, y los módulos de su velocidad y aceleración, son iguales a los de A.

Por carecer la cuerda de masa, y por ser las poleas ideales, el módulo de la tensión no varía a lo largo de la citada cuerda.*

* La relevancia de que las poleas sean ideales para este hecho, y qué sucede si no lo son, se estudiará en el tema "Dinámica del sólido rígido".

Ejercicio 9



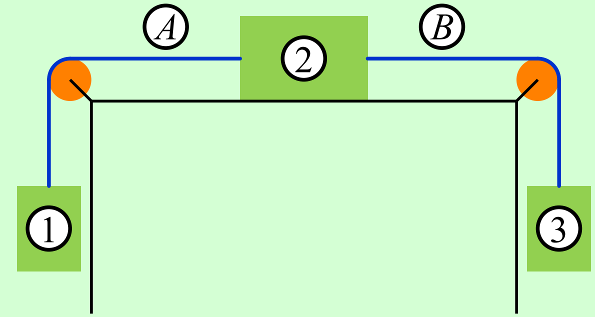
El sistema de la figura se halla inicialmente en reposo. Las masas de los bloques son $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 20$ kg y $m_3 = 20$ kg. El coeficiente de rozamiento entre el bloque 2 y el suelo es $\mu_2 = 0{,}2$. Los hilos y poleas son ideales. Obténgase: los módulos de las tensiones en los dos hilos, A y B, de la fuerza de rozamiento, y de la aceleración de los bloques; la distancia que debe recorrer el bloque 3 para que el módulo de su velocidad sea $1{,}4\ \mathrm{m/s}$.

Dado que la masa del bloque 3 es mayor que la del bloque 1, hay dos posibles comportamientos: el bloque 3 desciende arrastrando a los otros dos; o el sistema permanece en reposo. Supongamos que se da el primero.

Hipótesis: el bloque 3 desciende.

~~“Masa total por aceleración igual a resultante de fuerzas”:~~

$$\cancel{(m_1 + m_2 + m_3)a = m_3 g - m_1 g - \mu_2 m_2 g}$$



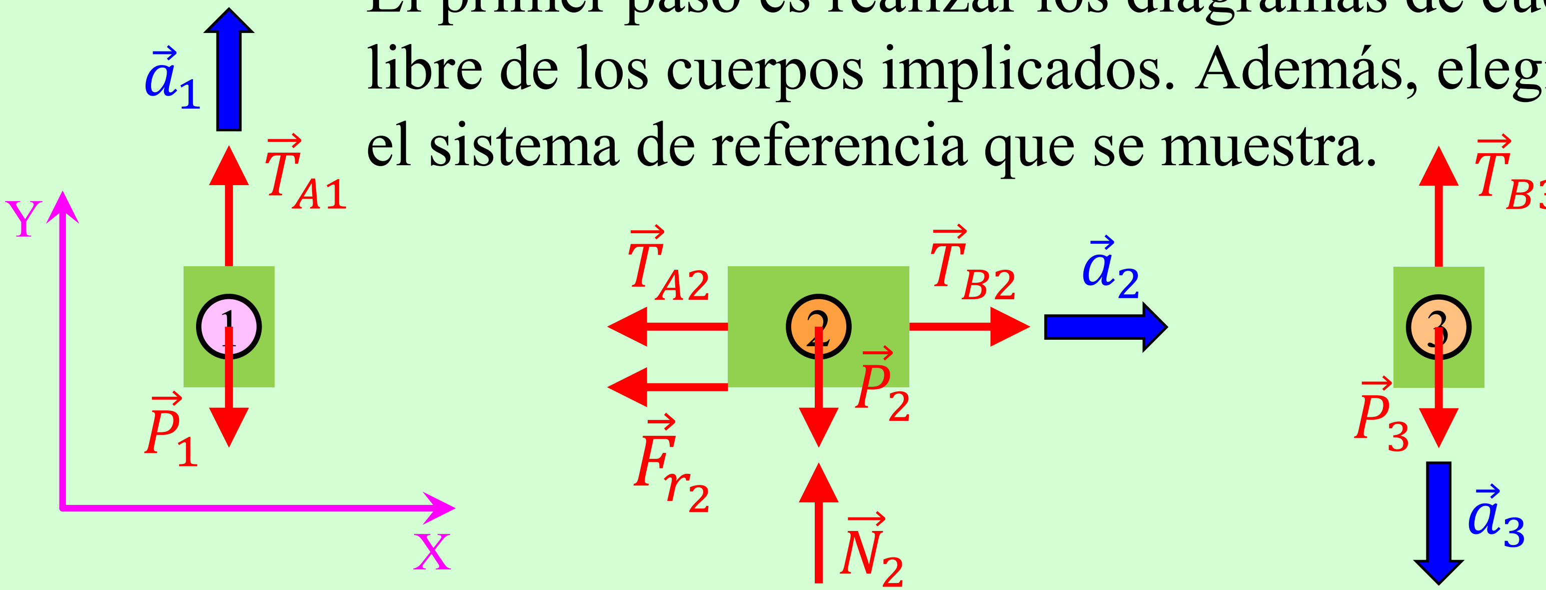
Esta expresión es cierta, pero inadmisible. <u>Y no se admitirá.</u>

La expresión no se basa en ninguna ley de la Física. No se trata de la segunda ley de Newton; la a que aparece no es aceleración, sino un módulo; y el miembro de la derecha no es resultante de fuerzas, sino una suma y resta de módulos de fuerzas de orientaciones dispares.

No existe ley de la Física que diga algo así como que masa total por módulo de aceleración igual a módulos de fuerzas a favor del movimiento menos módulos de fuerzas en contra.

Para dejarlo claro: la expresión anterior no es un punto de partida, sino que en sí misma es un resultado. Y hay que llegar a él.

El primer paso es realizar los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos implicados. Además, elegimos el sistema de referencia que se muestra.



$\vec{P}_1$: peso del bloque 1.

$\vec{T}_{A1}$: fuerza ejercida por el hilo *A* sobre el bloque 1.

$\vec{P}_2$: peso del bloque 2.

$\vec{N}_2$: reacción normal del suelo sobre el bloque 2.

$\vec{F}_{r_2}$: fuerza de rozamiento del suelo sobre el bloque 2.

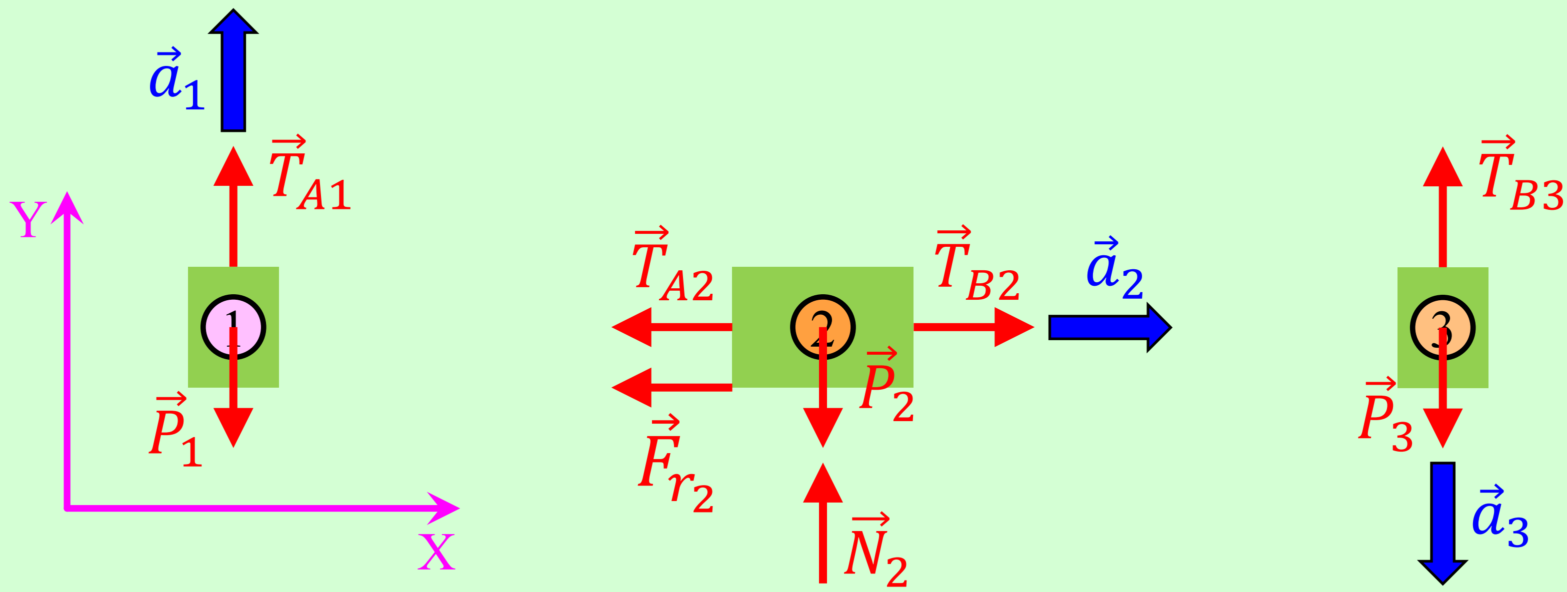
$\vec{T}_{A2}$: fuerza ejercida por el hilo *A* sobre el bloque 2.

$\vec{T}_{B2}$: fuerza ejercida por el hilo *B* sobre el bloque 2.

$\vec{P}_3$: peso del bloque 3.

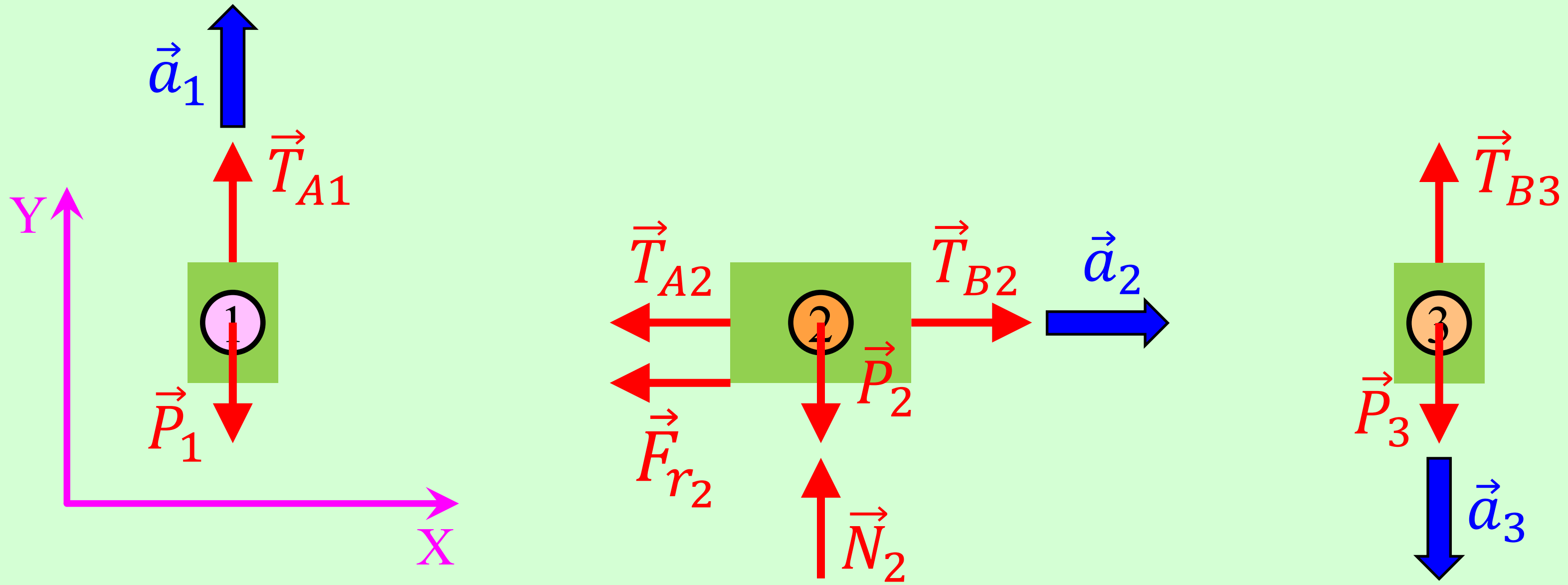
$\vec{T}_{B3}$: fuerza ejercida por el hilo *B* sobre el bloque 3.

$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ y $\vec{a}_3$: aceleraciones de los bloques 1, 2 y 3, respectivamente.



Se conoce la orientación de todos los vectores, y los módulos de los pesos. Se desconocen los módulos N_2, F_{r_2}, T_A (común a $\vec{T}_{A1}$ y $\vec{T}_{A2}$ por ser hilo y polea ideales), T_B (común a $\vec{T}_{B2}$ y $\vec{T}_{B3}$ por ser hilo y polea ideales), y a (común a $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ y $\vec{a}_3$ por ser los hilos ideales).

Por tanto, tenemos 5 incógnitas. Necesitamos pues 5 ecuaciones.

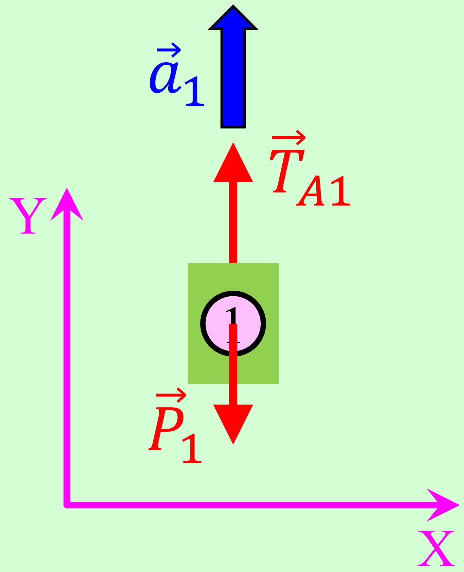


Aplicando el teorema del centro de masas a cada bloque,

$$\vec{P}_1 + \vec{T}_{A1} = m_1\vec{a}_1$$

$$\vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{r_2} + \vec{T}_{A2} + \vec{T}_{B2} = m_2\vec{a}_2$$

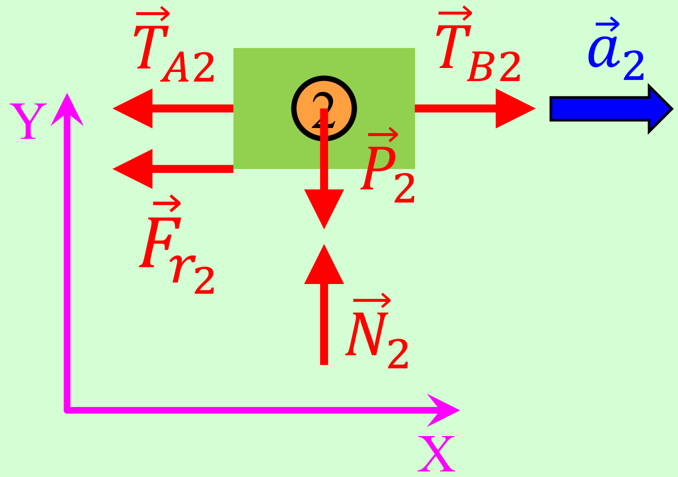
$$\vec{P}_3 + \vec{T}_{B3} = m_3\vec{a}_3$$



Aplicando el teorema del centro de masas al bloque 1,

$$\boxed{\vec{P}_1 + \vec{T}_{A1} = m_1 \vec{a}_1}$$

$$(0; -m_1 g) + (0; T_A) = m_1(0; a) \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ \boxed{-m_1 g + T_A = m_1 a} \end{cases}$$

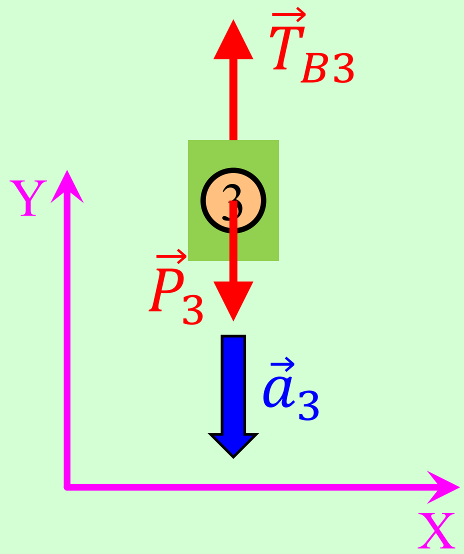


Aplicando el teorema del centro de masas al bloque 2,

$$\boxed{\vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{r_2} + \vec{T}_{A2} + \vec{T}_{B2} = m_2\vec{a}_2}$$

$$(0; -m_2 g) + (0; N_2) + \left(-F_{r_2}; 0\right) + (-T_A; 0) + (T_B; 0) = m_2(a; 0)$$

$$\begin{cases} \boxed{-F_{r_2} - T_A + T_B = m_2 a} \\ \boxed{-m_2 g + N_2 = 0} \end{cases}$$



Aplicando el teorema del centro de masas al bloque 3,

$$\boxed{\vec{P}_3 + \vec{T}_{B3} = m_3\vec{a}_3}$$

$$(0; -m_3 g) + (0; T_B) = m_3(0; -a) \begin{cases} 0 = 0 \\ \boxed{-m_3 g + T_B = -m_3 a} \end{cases}$$

$$-m_1 g + T_A = m_1 a$$

$$\begin{cases} -F_{r_2} - T_A + T_B = m_2 a \\ -m_2 g + N_2 = 0 \end{cases}$$

$$-m_3 g + T_B = -m_3 a$$

Como el bloque 2 está deslizando,

$$F_{r_2} = F_{r_{2_{máx}}} = \mu_2 N_2$$

Ya tenemos así el sistema de 5 ecuaciones con las 5 incógnitas previstas: N_2, F_{r_2}, T_A, T_B y a.

$$-m_1 g + T_A = m_1 a \longrightarrow -m_1 g + T_A = m_1 a$$

$$\left\{\begin{array}{l} -F_{r_2} - T_A + T_B = m_2 a \longrightarrow -\mu_2 m_2 g - T_A + T_B = m_2 a \\ -m_2 g + N_2 = 0 \longrightarrow N_2 = m_2 g \end{array}\right.$$

$$-m_3 g + T_B = -m_3 a \longrightarrow m_3 g - T_B = m_3 a$$

$$F_{r_2} = F_{r_{2_{máx}}} = \mu_2 N_2 \longrightarrow F_{r_2} = \mu_2 m_2 g$$

$$\left.\begin{array}{l} -m_1 g + T_A = m_1 a \\ -\mu_2 m_2 g - T_A + T_B = m_2 a \\ m_3 g - T_B = m_3 a \end{array}\right\}$$

Sumando estas tres ecuaciones, resulta

$$\longrightarrow (m_1 + m_2 + m_3) a =$$

$$= m_3 g - m_1 g - \mu_2 m_2 g$$

$$a = \frac{m_3 g - m_1 g - \mu_2 m_2 g}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{20 \times 9{,}8 - 8 \times 9{,}8 - 0{,}2 \times 20 \times 9{,}8}{8 + 20 + 20} =$$

$$= 1{,}633\ \mathrm{m/s^2}$$

$$-m_1 g + T_A = m_1 a \Rightarrow -8 \times 9{,}8 + T_A = 8 \times 1{,}633 \Rightarrow T_A = 91{,}46\ \mathrm{N}$$

$$m_3 g - T_B = m_3 a \Rightarrow 20 \times 9{,}8 - T_B = 20 \times 1{,}633 \Rightarrow T_B = 163{,}3\ \mathrm{N}$$

$$F_{r_2} = \mu_2 m_2 g = 0{,}2 \times 20 \times 9{,}8 = 39{,}2\ \mathrm{N}$$

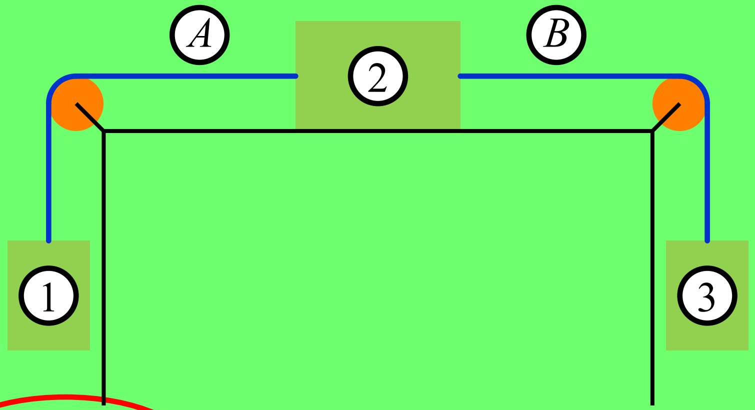
Los resultados obtenidos son coherentes (es $a > 0\ \mathrm{m/s^2}$, $T_A > 0$ N y $T_B > 0$ N), por lo que la hipótesis adoptada (el bloque 3 desciende) es correcta.

Por último, puesto que el movimiento del bloque 3 es rectilíneo con aceleración constante, se tiene que

$$v_3 = \sqrt{v_{3_0}^2 + 2a_3\left(s_3 - s_{3_0}\right)} \Rightarrow 1{,}4 = \sqrt{0^2 + 2 \times 1{,}633 d_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}96 = 3{,}266 d_3 \Rightarrow d_3 = 0{,}6\ \mathrm{m}$$

Ejercicio 10



El sistema de la figura se halla inicialmente en reposo. Las masas de los bloques son $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 20$ kg y $m_3 = 20$ kg. El coeficiente de rozamiento entre el bloque 2 y el suelo es $\mu_2 = 0{,}8$. Los hilos y poleas son ideales. Obténgase: los módulos de las tensiones en los dos hilos, A y B, de la fuerza de rozamiento, y de la aceleración de los bloques; la distancia que debe recorrer el bloque 3 para que el módulo de su velocidad sea $1{,}4\ \mathrm{m/s}$.

Dado que la masa del bloque 3 es mayor que la del bloque 1, hay dos posibles comportamientos: el bloque 3 desciende arrastrando a los otros dos; o el sistema permanece en reposo. Supongamos que se da el primero.

Hipótesis: el bloque 3 desciende.

Repitiendo el desarrollo del ejercicio anterior, se obtiene

$$a = \frac{m_3 g - m_1 g - \mu_2 m_2 g}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{20 \times 9{,}8 - 8 \times 9{,}8 - 0{,}8 \times 20 \times 9{,}8}{8 + 20 + 20} =$$

$$= -0{,}8167\,\mathrm{m/s^2} < 0\,\mathrm{m/s^2}$$

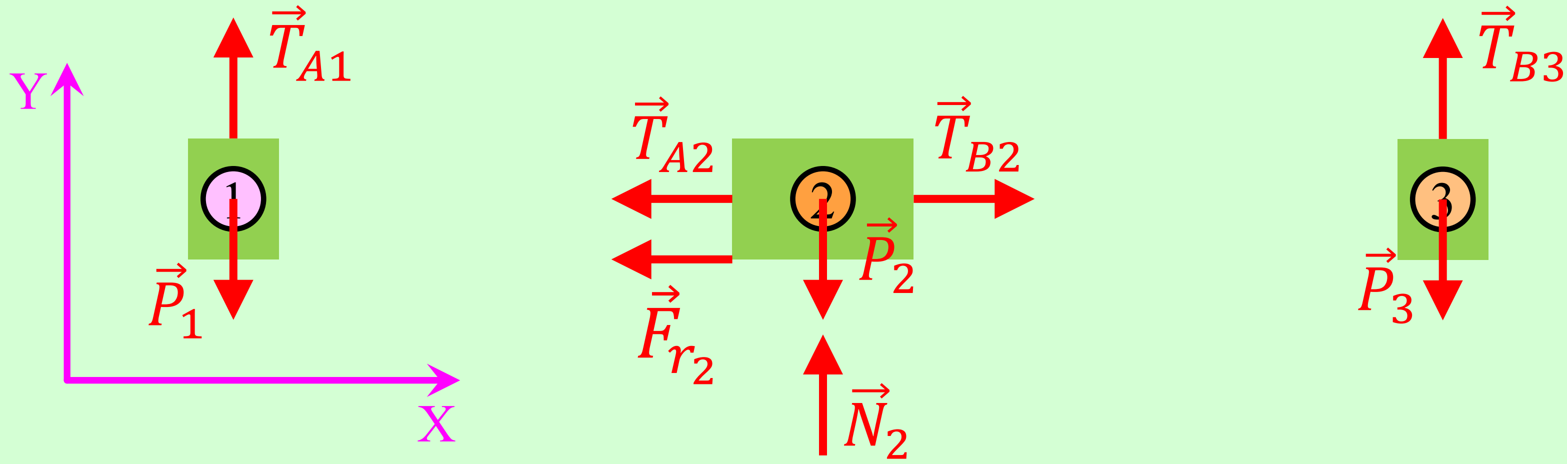
Si el bloque 3 estuviera descendiendo inicialmente, sería válido que la aceleración hiciera disminuir el módulo de la velocidad.

Sin embargo, nuestro sistema se encuentra inicialmente en reposo. Y no tiene sentido que el bloque 3 arranque hacia abajo con una aceleración contraria.

Conclusión: la hipótesis “el bloque 3 desciende” no es correcta.

Nueva hipótesis: el sistema permanece en reposo.

El primer paso es realizar los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos implicados.



$\vec{P}_1$: peso del bloque 1.

$\vec{T}_{A1}$: fuerza ejercida por el hilo *A* sobre el bloque 1.

$\vec{P}_2$: peso del bloque 2.

$\vec{N}_2$: reacción normal del suelo sobre el bloque 2.

$\vec{F}_{r_2}$: fuerza de rozamiento del suelo sobre el bloque 2.

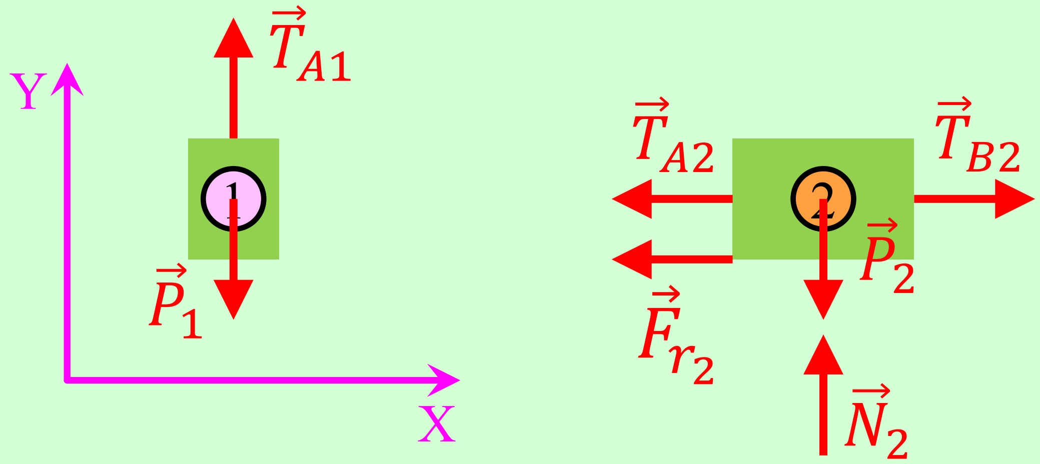
$\vec{T}_{A2}$: fuerza ejercida por el hilo *A* sobre el bloque 2.

$\vec{T}_{B2}$: fuerza ejercida por el hilo *B* sobre el bloque 2.

$\vec{P}_3$: peso del bloque 3.

$\vec{T}_{B3}$: fuerza ejercida por el hilo *B* sobre el bloque 3.

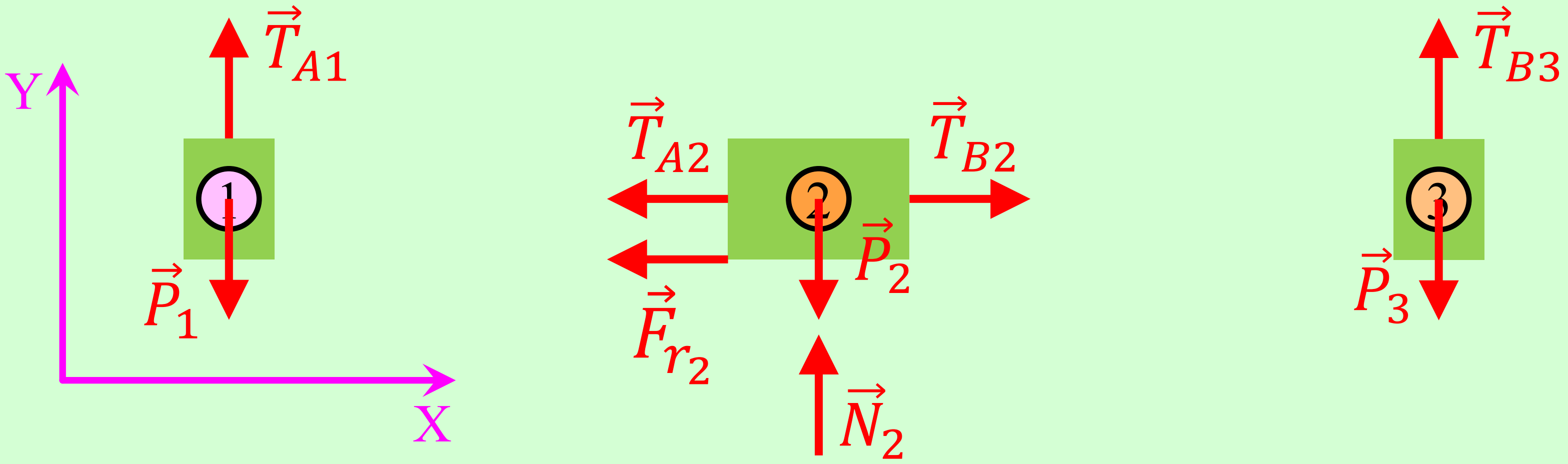
Con la hipótesis adoptada, las aceleraciones son nulas.



Se conoce la orientación de todos los vectores, y los módulos de los pesos. Se desconocen los módulos N_2, F_{r_2}, T_A (común a $\vec{T}_{A1}$ y $\vec{T}_{A2}$), y T_B (común a $\vec{T}_{B2}$ y $\vec{T}_{B3}$).

Por tanto, tenemos 4 incógnitas. Necesitamos pues 4 ecuaciones.

Por variar, en esta ocasión utilizaremos los valores de los datos desde un principio.

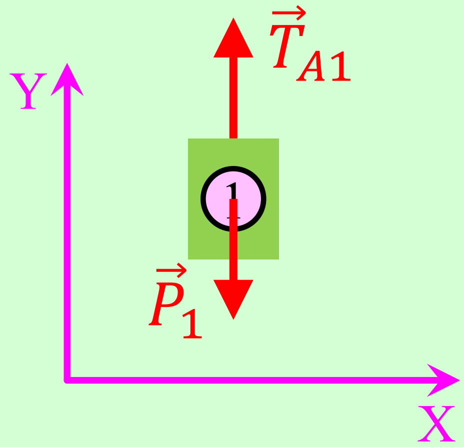


Aplicando el teorema del centro de masas a cada bloque,

$$\vec{P}_1 + \vec{T}_{A1} = \vec{0}$$

$$\vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{r_2} + \vec{T}_{A2} + \vec{T}_{B2} = \vec{0}$$

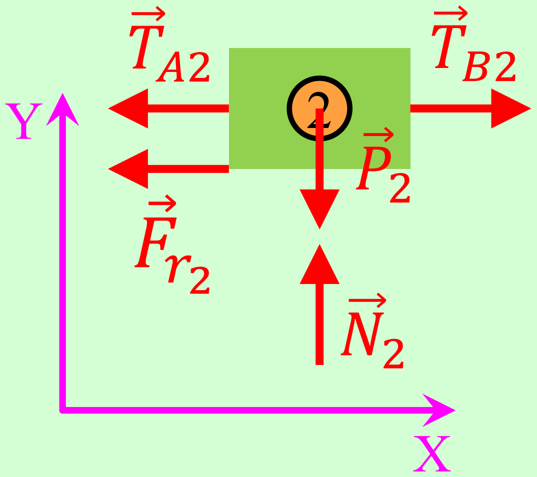
$$\vec{P}_3 + \vec{T}_{B3} = \vec{0}$$



Aplicando el teorema del centro de masas al bloque 1,

$$\vec{P}_1 + \vec{T}_{A1} = \vec{0}$$

$$(0; -8 \times 9{,}8) + (0; T_A) = (0; 0) \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ -78{,}4 + T_A = 0 \end{cases}$$

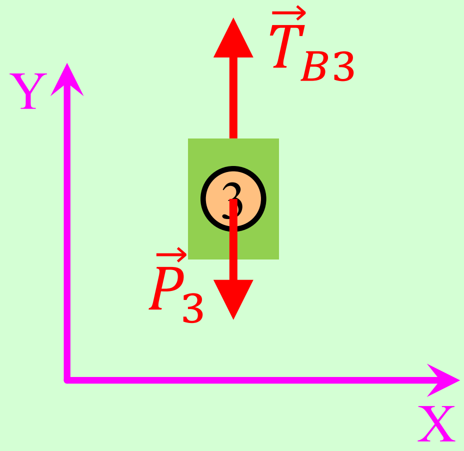


Aplicando el teorema del centro de masas al bloque 2,

$$\boxed{\vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{r_2} + \vec{T}_{A2} + \vec{T}_{B2} = \vec{0}}$$

$$(0; -20 \times 9{,}8) + (0; N_2) + \left(-F_{r_2}; 0\right) + (-T_A; 0) + (T_B; 0) = (0; 0)$$

$$\begin{cases} -F_{r_2} - T_A + T_B = 0 \\ -196 + N_2 = 0 \end{cases}$$



Aplicando el teorema del centro de masas al bloque 3,

$$\vec{P}_3 + \vec{T}_{B3} = \vec{0}$$

$$(0; -20 \times 9{,}8) + (0; T_B) = (0; 0) \begin{cases} 0 = 0 \\ -196 + T_B = 0 \end{cases}$$

$$-78{,}4 + T_A = 0$$

$$\begin{cases} -F_{r_2} - T_A + T_B = 0 \\ -196 + N_2 = 0 \end{cases}$$

$$-196 + T_B = 0$$

Como el bloque 2 no está deslizando, $\cancel{F_{r_2} = \mu_2 N_2}$

Ni es aplicable, ni es necesaria para obtener los valores de las 4 incógnitas.

Ya tenemos así el sistema de 4 ecuaciones con las 4 incógnitas previstas: N_2, F_{r_2}, T_A y T_B.

$$-78{,}4 + T_A = 0 \longrightarrow T_A = 78{,}4\ \text{N}$$

$$\begin{cases} -F_{r_2} - T_A + T_B = 0 \\ -196 + N_2 = 0 \end{cases}$$

$$-F_{r_2} - T_A + T_B = 0 \longrightarrow -F_{r_2} - 78{,}4 + 196 = 0 \longrightarrow F_{r_2} = 117{,}6\ \text{N}$$

$$-196 + N_2 = 0 \longrightarrow N_2 = 196\ \text{N}$$

$$-196 + T_B = 0 \longrightarrow T_B = 196\ \text{N}$$

A falta de comprobar la hipótesis, las respuestas a las preguntas del ejercicio son:

$$T_A = 78{,}4\ \text{N}\ ;\ T_B = 196\ \text{N}\ ;\ F_{r_2} = 117{,}6\ \text{N}\ ;\ a = 0\ \text{m/s}^2$$

Para que, por efecto de la fuerza de rozamiento, el sistema permanezca en reposo, el requisito es que dicha fuerza de rozamiento pueda alcanzar el valor necesario, esto es, que

$$F_{r_2} \leq F_{r_{2_{máx}}}$$

Comprobación:

$$F_{r_2} = 117{,}6\ \mathrm{N}$$

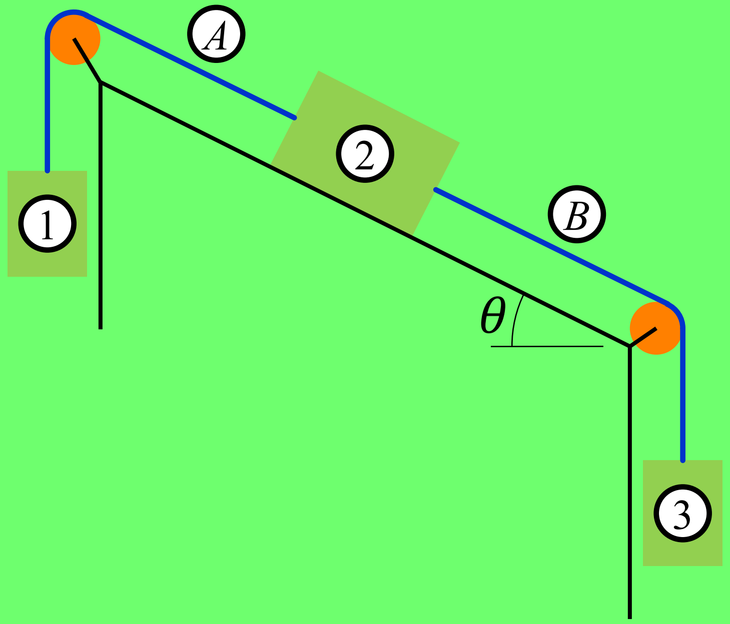
$$F_{r_{2_{máx}}} = \mu_2 N_2 = 0{,}8 \times 196 = 156{,}8\ \mathrm{N}$$

En efecto, $F_{r_2} \leq F_{r_{2_{máx}}}$. Por tanto, la hipótesis es correcta.

Dado que el sistema permanece en reposo, la pregunta sobre la distancia que debe recorrer el bloque 3 para que el módulo de su velocidad sea de $1{,}4\ \mathrm{m/s}$ carece de sentido.

Tarea: Resuélvase el problema original (ejercicio 9), en el que es $\mu_2 = 0{,}2$, utilizando la hipótesis de reposo, y compruébese que en tal caso es $F_{r_2} = 117{,}6\ \mathrm{N}$ y $F_{r_{2_{máx}}} = 39{,}2\ \mathrm{N}$, esto es, que $F_{r_2} > F_{r_{2_{máx}}}$.

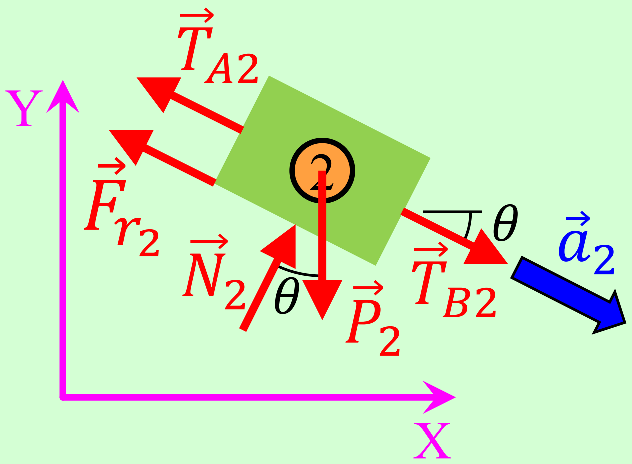
Ejercicio 11



El sistema de la figura se halla inicialmente en reposo. Las masas de los bloques son $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 20$ kg y $m_3 = 20$ kg. El coeficiente de rozamiento entre el bloque 2 y el suelo es $\mu_2 = 0{,}2$. En el plano inclinado, es $\theta = 26°$. Los hilos y poleas son ideales. Obténgase: los módulos de las tensiones en los dos hilos, *A* y *B*, de la fuerza de rozamiento, y de la aceleración de los bloques; la distancia que debe recorrer el bloque 3 para que el módulo de su velocidad sea $1{,}4\,\mathrm{m/s}$.

El ejercicio es idéntico al 9, salvo porque el bloque 2 se apoya en un plano inclinado. Por tanto, la aplicación del teorema del centro de masas a los bloques 1 y 3, y las ecuaciones obtenidas, siguen siendo válidas. Veamos qué ocurre con el bloque 2.

Procedimiento 1: utilizar con el bloque 2 el mismo sistema de referencia que con los demás.



Aplicando el teorema del centro de masas al bloque 2,

$$\vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{r_2} + \vec{T}_{A2} + \vec{T}_{B2} = m_2\vec{a}_2$$

$$(0; -m_2 g) + (N_2 \operatorname{sen}\theta\,; N_2 \cos\theta) + \left(-F_{r_2}\cos\theta\,; F_{r_2}\operatorname{sen}\theta\right) +$$
$$+(-T_A\cos\theta\,; T_A\operatorname{sen}\theta) + (T_B\cos\theta\,; -T_B\operatorname{sen}\theta) =$$
$$= m_2(a\cos\theta\,; -a\operatorname{sen}\theta)$$

$$\begin{cases} \boxed{N_2\operatorname{sen}\theta + \left(-F_{r_2} - T_A + T_B\right)\cos\theta = m_2 a\cos\theta} \\ \boxed{-m_2 g + N_2\cos\theta + \left(F_{r_2} + T_A - T_B\right)\operatorname{sen}\theta = -m_2 a\operatorname{sen}\theta} \end{cases}$$

Con el resto de ecuaciones obtenidas en el ejercicio 9, ya tenemos el sistema de 5 con las 5 incógnitas previstas: N_2, F_{r_2}, T_A, T_B y a.

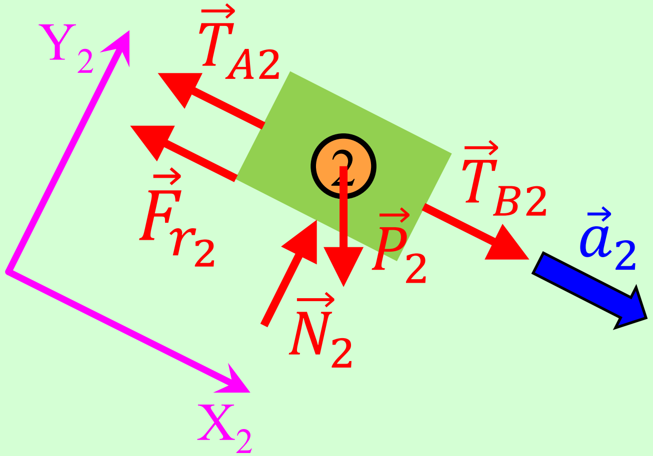
$$-m_1 g + T_A = m_1 a$$

$$\begin{cases} N_2 \operatorname{sen}\theta + \left(-F_{r_2} - T_A + T_B\right)\cos\theta = m_2 a \cos\theta \\ -m_2 g + N_2 \cos\theta + \left(F_{r_2} + T_A - T_B\right)\operatorname{sen}\theta = -m_2 a \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$-m_3 g + T_B = -m_3 a$$

$$F_{r_2} = F_{r_{2_{máx}}} = \mu_2 N_2$$

Procedimiento 2: utilizar con el bloque 2 un sistema de referencia específico más cómodo.



Aplicando el teorema del centro de masas al bloque 2,

$$\vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{r_2} + \vec{T}_{A2} + \vec{T}_{B2} = m_2\vec{a}_2$$

$$(m_2 g \operatorname{sen}\theta\,; -m_2 g\cos\theta) + (0; N_2) + \left(-F_{r_2}; 0\right) + (-T_A; 0) +$$
$$+(T_B; 0) = m_2(a; 0)$$

$$\begin{cases} m_2 g \operatorname{sen}\theta - F_{r_2} - T_A + T_B = m_2 a \\ -m_2 g\cos\theta + N_2 = 0 \end{cases}$$

Con el resto de ecuaciones obtenidas en el ejercicio 9, ya tenemos el sistema de 5 con las 5 incógnitas previstas: N_2, F_{r_2}, T_A, T_B y a.

$$-m_1 g + T_A = m_1 a \quad \longrightarrow \quad -m_1 g + T_A = m_1 a$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_2 g \operatorname{sen}\theta - F_{r_2} - T_A + T_B = m_2 a \\ -m_2 g \cos\theta + N_2 = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = m_2 g \cos\theta \end{array} \right.$$

$$-m_3 g + T_B = -m_3 a \quad \longrightarrow \quad m_3 g - T_B = m_3 a$$

$$F_{r_2} = F_{r_{2_{máx}}} = \mu_2 N_2 \quad \longrightarrow \quad F_{r_2} = \mu_2 m_2 g \cos\theta$$

$$\left. \begin{array}{l} -m_1 g + T_A = m_1 a \\ m_2 g \operatorname{sen}\theta - \mu_2 m_2 g \cos\theta - T_A + T_B = m_2 a \\ m_3 g - T_B = m_3 a \end{array} \right\}$$

Sumando estas tres ecuaciones, resulta

$$(m_1 + m_2 + m_3) a = m_3 g - m_1 g + m_2 g \operatorname{sen}\theta - \mu_2 m_2 g \cos\theta$$

$$a = \frac{m_3 g - m_1 g + m_2 g \operatorname{sen}\theta - \mu_2 m_2 g \cos\theta}{m_1 + m_2 + m_3} =$$

$$= \frac{20 \times 9{,}8 - 8 \times 9{,}8 + 20 \times 9{,}8 \operatorname{sen} 26° - 0{,}2 \times 20 \times 9{,}8 \cos 26°}{8 + 20 + 20} =$$

$$= 3{,}506\ \mathrm{m/s^2}$$

$$-m_1 g + T_A = m_1 a \Rightarrow -8 \times 9{,}8 + T_A = 8 \times 3{,}506 \Rightarrow T_A = 106{,}4\ \mathrm{N}$$

$$m_3 g - T_B = m_3 a \Rightarrow 20 \times 9{,}8 - T_B = 20 \times 3{,}506 \Rightarrow T_B = 125{,}9\ \mathrm{N}$$

$$F_{r_2} = \mu_2 m_2 g \cos\theta = 0{,}2 \times 20 \times 9{,}8 \cos 26° = 35{,}23\ \mathrm{N}$$

Los resultados obtenidos son coherentes (es $a > 0\ \mathrm{m/s^2}$, $T_A > 0$ N y $T_B > 0$ N), por lo que la hipótesis adoptada (el bloque 3 desciende) es correcta.

Puede verse que con el segundo procedimiento se obtiene un sistema de ecuaciones de resolución más sencilla.

Con el primer procedimiento, de la aplicación del teorema del centro de masas al segundo bloque se llegó a las ecuaciones

$$\begin{cases} N_2 \operatorname{sen}\theta + \left(-F_{r_2} - T_A + T_B\right)\cos\theta = m_2 a \cos\theta \\ -m_2 g + N_2 \cos\theta + \left(F_{r_2} + T_A - T_B\right)\operatorname{sen}\theta = -m_2 a \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Multiplicando la primera por $\operatorname{sen}\theta$, la segunda por $\cos\theta$, y sumando, resulta

$$\begin{cases} N_2 \operatorname{sen}^2\theta + \left(-F_{r_2} - T_A + T_B\right)\operatorname{sen}\theta\cos\theta = m_2 a \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ -m_2 g \cos\theta + N_2 \cos^2\theta + \left(F_{r_2} + T_A - T_B\right)\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \\ \qquad = -m_2 a \operatorname{sen}\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$-m_2 g \cos\theta + N_2 = 0$$

Se trata de la ecuación obtenida para la componente Y por el segundo procedimiento.

Volvemos a escribir las ecuaciones obtenidas mediante el primer procedimiento.

$$\begin{cases} N_2 \operatorname{sen}\theta + \left(-F_{r_2} - T_A + T_B\right)\cos\theta = m_2 a \cos\theta \\ -m_2 g + N_2 \cos\theta + \left(F_{r_2} + T_A - T_B\right)\operatorname{sen}\theta = -m_2 a \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Multiplicando la primera por $\cos\theta$, la segunda por $-\operatorname{sen}\theta$, y sumando, resulta

$$\begin{cases} N_2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \left(-F_{r_2} - T_A + T_B\right)\cos^2\theta = m_2 a \cos^2\theta \\ m_2 g \operatorname{sen}\theta - N_2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \left(F_{r_2} + T_A - T_B\right)\operatorname{sen}^2\theta = \\ \qquad\qquad = m_2 a \operatorname{sen}^2\theta \end{cases}$$

$$m_2 g \operatorname{sen}\theta - F_{r_2} - T_A + T_B = m_2 a$$

Se trata de la ecuación obtenida para la componente X por el segundo procedimiento.

Por tanto, como debía ocurrir, los sistemas de ecuaciones obtenidos por los dos procedimientos tienen las mismas soluciones.

Por lo que respecta a la última pregunta del ejercicio, ypuesto que el movimiento del bloque 3 es rectilíneo con aceleración constante, se tiene que

$$v_3 = \sqrt{v_{3_0}^2 + 2a_3\left(s_3 - s_{3_0}\right)} \Rightarrow 1{,}4 = \sqrt{0^2 + 2 \times 3{,}506 d_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}96 = 7{,}012 d_3 \Rightarrow d_3 = 0{,}2795\ \mathrm{m}$$

Fuerzas de inercia

Recordemos la relación de aceleraciones en un movimiento relativo.

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Aplicada al centro de masas de un sistema de puntos materiales, es

$$\vec{a}_C = \vec{a}'_C + \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}'_C + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_C) + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'_C$$

Por tanto,

$$\vec{a}'_C = \vec{a}_C - \vec{a}_{O'} - \vec{\alpha} \times \vec{r}'_C - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_C) - 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'_C$$

$$m\vec{a}'_C = m\vec{a}_C + [-m\vec{a}_{O'}] + [-m\vec{\alpha} \times \vec{r}'_C] +$$
$$+[-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_C)] + [-m2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'_C]$$

Fuerzas de inercia

De acuerdo con el teorema del centro de masas, la suma de las fuerzas exteriores es $\sum \vec{F} = m\vec{a}_C$. Por tanto,

$$m\vec{a}'_C = \sum \vec{F} + [-m\vec{a}_{O'}] + [-m\vec{\alpha} \times \vec{r}'_C] +$$

$$+[-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_C)] + [-m2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'_C]$$

Los términos marcados en rojo son las denominadas fuerzas de inercia, fuerzas aparentes que un observador móvil percibe como reales, pero que en realidad no existen.

Como ejemplos, $-m\vec{a}_{O'}$ es la que parece existir hacia atrás cuando un autobús arranca, y hacia delante cuando frena, y $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_C)$ está relacionada con la llamada fuerza centrífuga que parece actuar hacia fuera de una curva.

Fuerzas de inercia

Denotando las fuerzas de inercia como $\vec{F}_{in}$, desde el punto de vista del observador móvil se cumple que

$$\sum \vec{F} + \sum \vec{F}_{in} = m\vec{a}'_C$$

Dado que el desarrollo se ha aplicado al centro de masas, ese es para el observador móvil el punto de aplicación de las fuerzas de inercia.

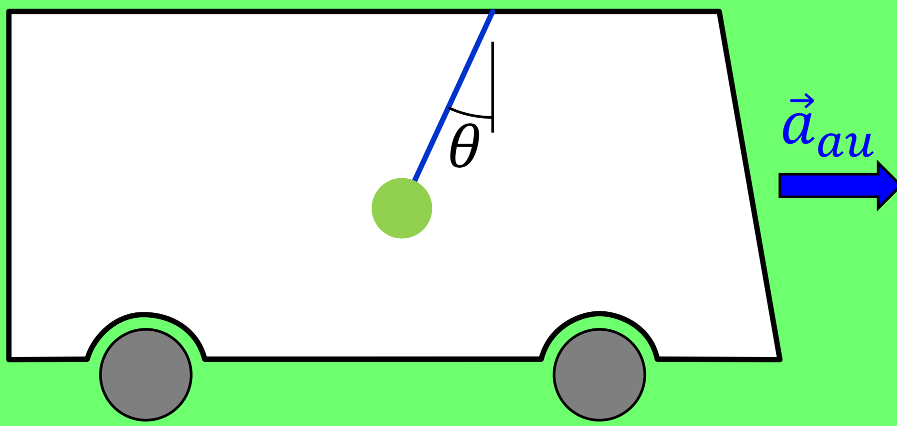
Fuerzas de inercia

Como se ha indicado, las fuerzas de inercia no son reales, por lo que también reciben los nombres de fuerzas ficticias y pseudofuerzas.

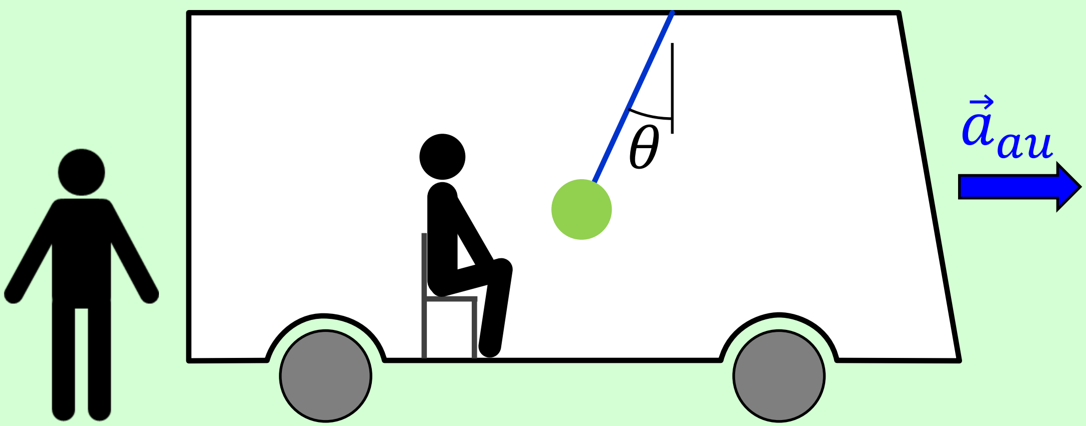
Las fuerzas reales, como establece la tercera ley de Newton, son ejercidas mutuamente entre dos cuerpos. Esto no es así con una fuerza de inercia que aparentemente actúe sobre un cuerpo A, ya que:

- no hay cuerpo B que la esté ejerciendo;
- no hay cuerpo B sobre el que el A ejerza la correspondiente reacción opuesta.

Ejercicio 12



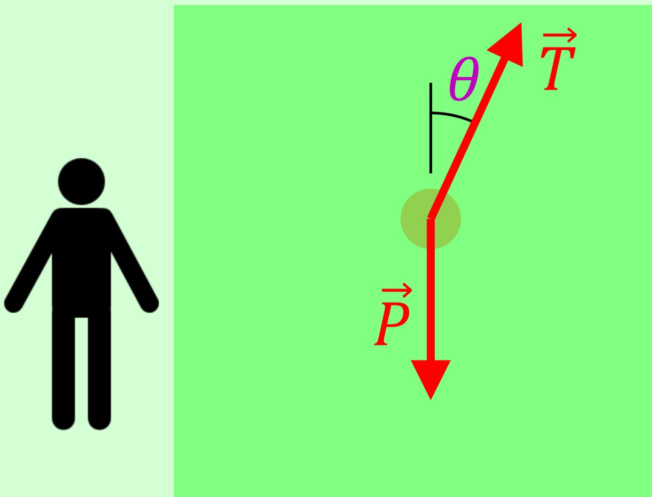
Un autobús arranca con una aceleración $\vec{a}_{au}$ constante de módulo $2\ \mathrm{m/s^2}$. De su techo cuelga un hilo ideal con una bola de 0,3 kg en su extremo inferior. Cuando la situación se estabiliza, el hilo forma un ángulo θ con la vertical. Determínese el valor de ese ángulo, así como el módulo de la tensión en el hilo.



Vamos a considerar dos observadores, uno fijo* fuera del autobús, y otro móvil sentado en este.

* En realidad se mueve con la Tierra. Sin embargo, consideraremos la misma como un sistema inercial (despreciando sus aceleraciones), que por tanto es indistinguible de un sistema fijo.

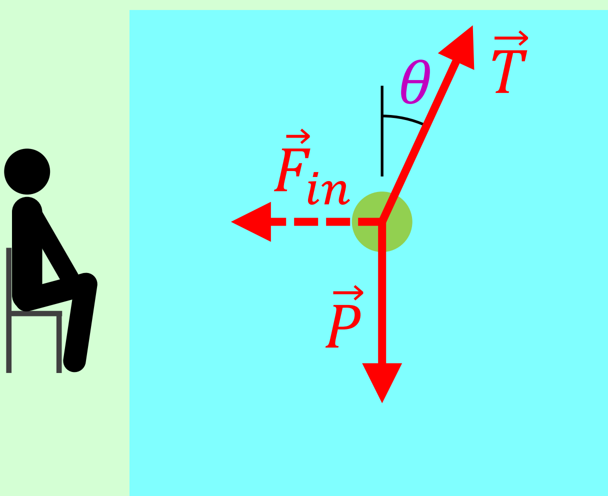
El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, la bola en este caso. El fondo verde corresponde al observador fijo, y el azul al móvil.



Las fuerzas que actúan sobre la bola son:

$\vec{P}$: peso.

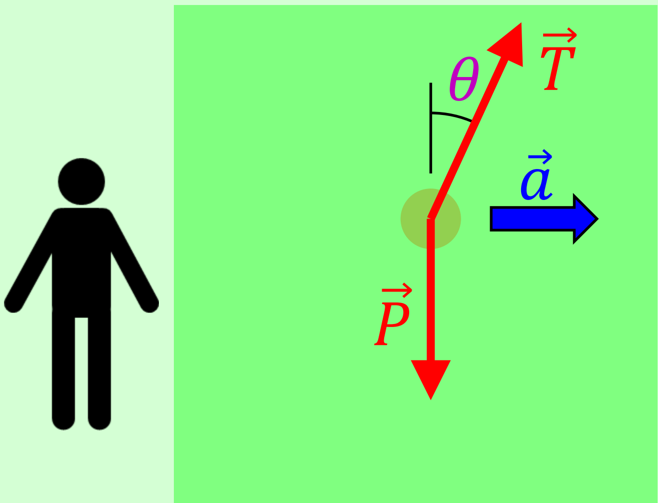
$\vec{T}$: fuerza ejercida por el hilo.



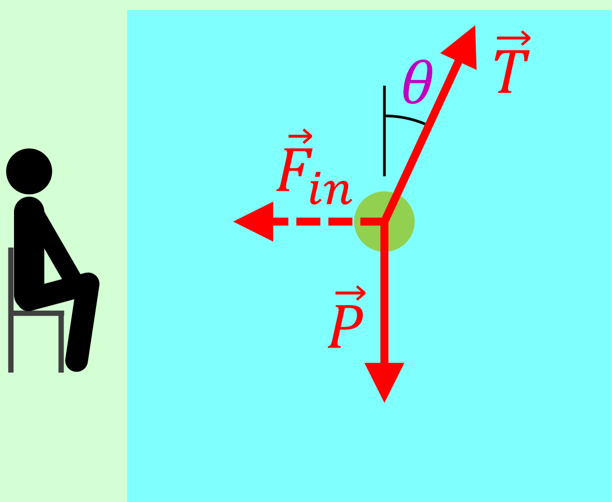
El sistema ligado al observador móvil tiene una aceleración de traslación $\vec{a}_{O'} = \vec{a}_{au}$. Por ese motivo, dicho observador percibe que sobre la bola actúa la fuerza de inercia (no real)

$$\vec{F}_{in} = -\mathrm{m}\vec{a}_{O'} = -\mathrm{m}\vec{a}_{au}$$

El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, la bola en este caso. El fondo verde corresponde al observador fijo, y el azul al móvil.



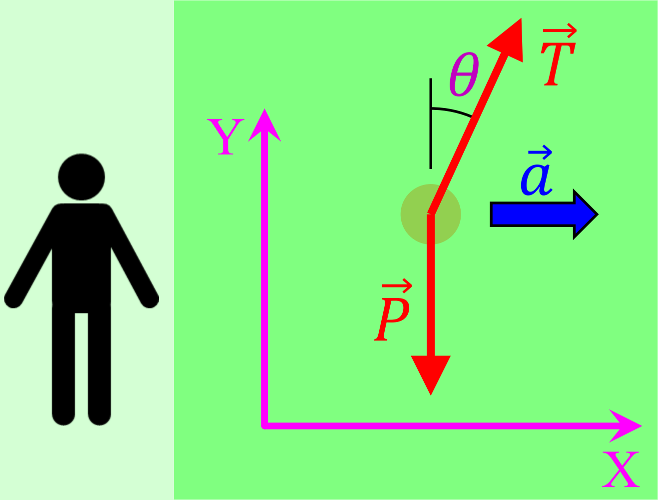
Como consecuencia de la acción de $\vec{P}$ y $\vec{T}$, la bola tiene una aceleración $\vec{a}$. Dado que los desplazamientos de la bola son los mismos que los del autobús (la situación está estabilizada), es $\vec{a} = \vec{a}_{au}$.



Como consecuencia de la acción de $\vec{P}$, $\vec{T}$ y $\vec{F}_{in}$, la bola tiene una aceleración relativa $\vec{a}'$ nula, ya que está en reposo desde el punto de vista del observador móvil.

Hay que establecer sistemas de referencia, si el enunciado no los especifica. Aquí hemos elegido los mostrados en las figuras.

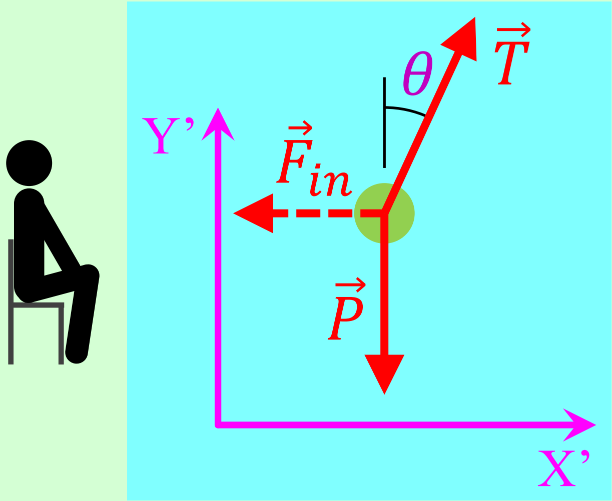
Ahora vamos a aplicar el teorema del centro de masas desde el punto de vista, tanto del observador fijo, como del móvil.



$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$(0; -0{,}3 \times 9{,}8) + (T \operatorname{sen}\theta\,; T\cos\theta) = $$
$$= 0{,}3(2; 0)$$

$$\begin{cases} T \operatorname{sen}\theta = 0{,}6 \\ -2{,}94 + T\cos\theta = 0 \Rightarrow T\cos\theta = 2{,}94 \end{cases}$$



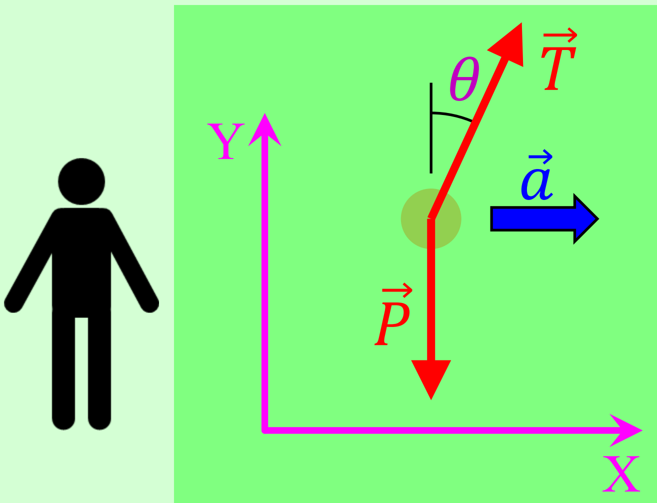
$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{in} = m\vec{a}'$$

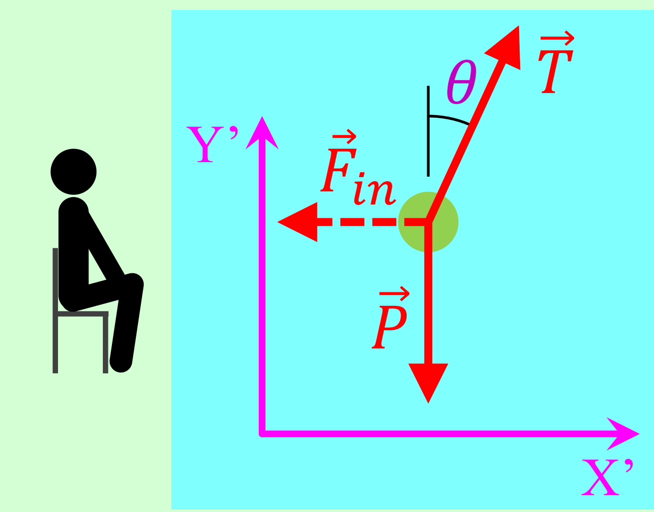
$$(0; -0{,}3 \times 9{,}8) + (T \operatorname{sen}\theta\,; T\cos\theta) +$$
$$+[-0{,}3(2; 0)] = 0{,}3(0; 0)$$

$$\begin{cases} T \operatorname{sen}\theta - 0{,}6 = 0 \Rightarrow T \operatorname{sen}\theta = 0{,}6 \\ -2{,}94 + T\cos\theta = 0 \Rightarrow T\cos\theta = 2{,}94 \end{cases}$$

Nótese que en ambos casos se ha llegado al mismo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, T y θ.

$$\begin{cases} T \operatorname{sen} \theta = 0{,}6 \\ T \cos \theta = 2{,}94 \end{cases}$$





Procedemos a resolverlo.

$$0{,}6^2 + 2{,}94^2 = (T \operatorname{sen} \theta)^2 + (T \cos \theta)^2 \Rightarrow$$

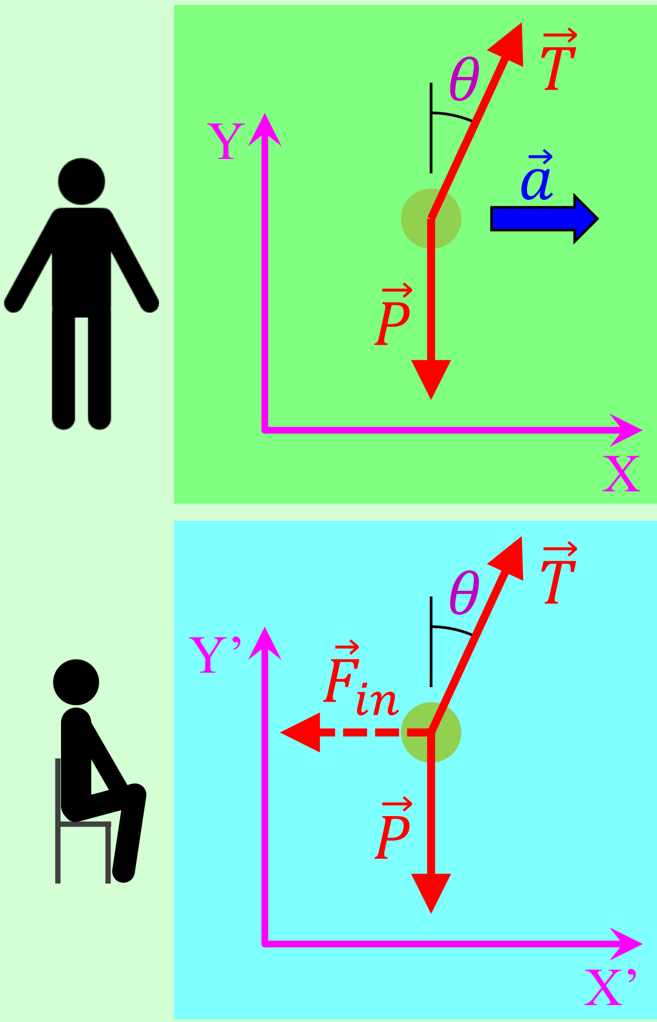
$$\Rightarrow 9{,}0036 = T^2(\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) = T^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 3{,}0006 \text{ N}$$

$$\frac{0{,}6}{2{,}94} = \frac{T \operatorname{sen} \theta}{T \cos \theta} \Rightarrow 0{,}20408 = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow$$

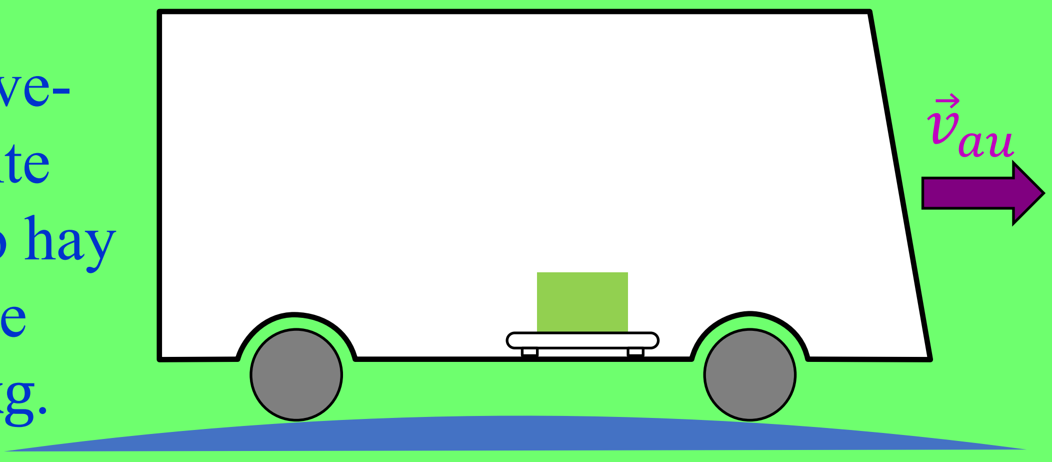
$$\Rightarrow \theta = 11{,}53°$$

Conviene recalcar que los valores de T y θ debían ser independientes del observador.



- El ángulo θ es el que forma el mismo hilo con la misma vertical.
- Imaginemos que el valor de T dependiera del observador, y que por ejemplo fuera 3 N para el fijo y 2 N para el móvil. ¿Qué ocurriría si el hilo soportara un máximo de 2,5 N? ¿El observador móvil lo vería romperse y el fijo no?

Ejercicio 13



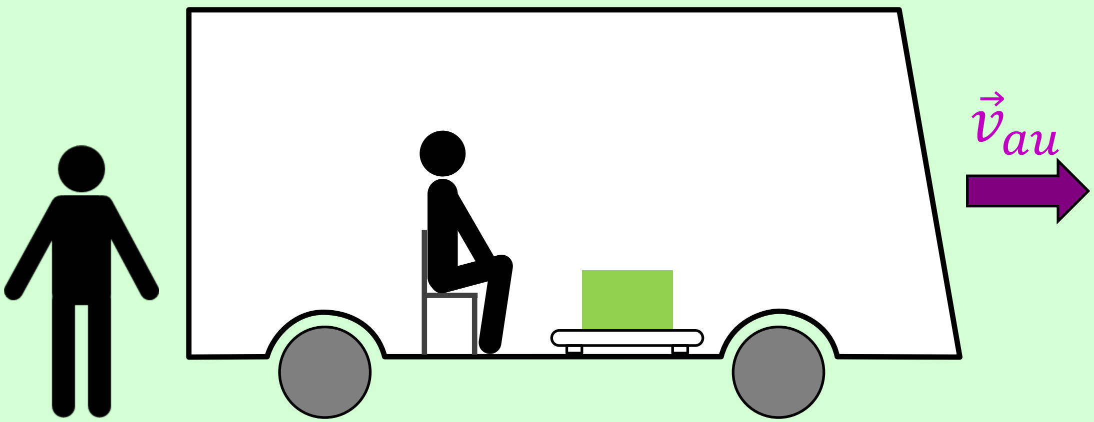
Un autobús se mueve con velocidad de módulo constante $v_{au} = 28\,\mathrm{m/s}$. En el suelo hay una báscula sobre la que se encuentra una caja de 20 kg. En el instante en que el autobús se encuentra en el punto más elevado de un cambio de rasante, la báscula marca 12 kg. ¿Cuál es en ese punto el radio de curvatura de la carretera?

Considérese que las dimensiones del autobús son despreciables con respecto al radio buscado.

Como ya se indicó, una báscula no mide pesos, sino la fuerza que se ejerce sobre ella.

En la situación analizada, que marque 12 kg significa que la fuerza $\vec{F}_{cb}$ ejercida por la caja sobre la báscula, dirigida hacia abajo, tiene módulo $F_{cb} = 12 \times 9{,}8 = 117{,}6$ N.

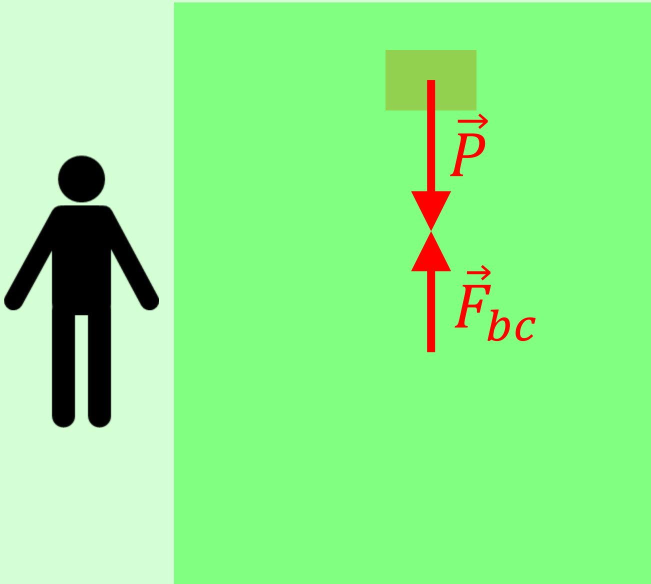
Por la tercera ley de Newton, la fuerza ejercida por la báscula sobre la caja será $\vec{F}_{bc} = -\vec{F}_{cb}$. Por tanto, $\vec{F}_{bc}$ se dirige hacia arriba y tiene módulo $F_{bc} = F_{cb} = 117{,}6$ N.



Vamos a considerar dos observadores, uno fijo* fuera del autobús, y otro móvil sentado en este.

* En realidad se mueve con la Tierra. Sin embargo, consideraremos la misma como un sistema inercial (despreciando sus aceleraciones), que por tanto es indistinguible de un sistema fijo.

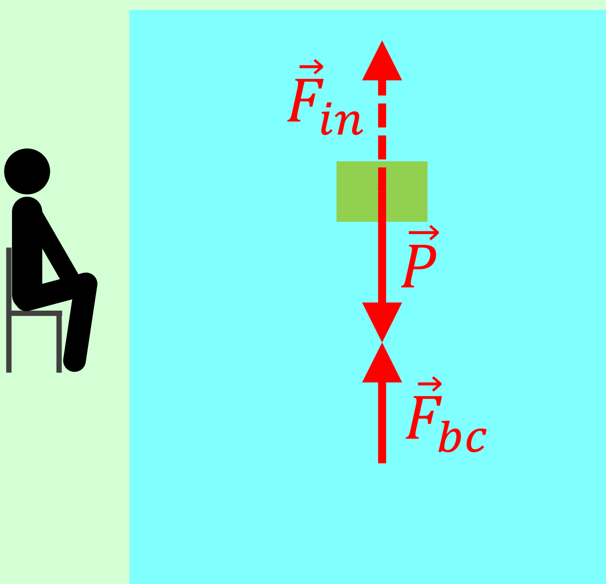
El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, la caja en este caso. El fondo verde corresponde al observador fijo, y el azul al móvil.



Las fuerzas que actúan sobre la caja son:

$\vec{P}$: peso.

$\vec{F}_{bc}$: fuerza ejercida por la báscula sobre la caja.

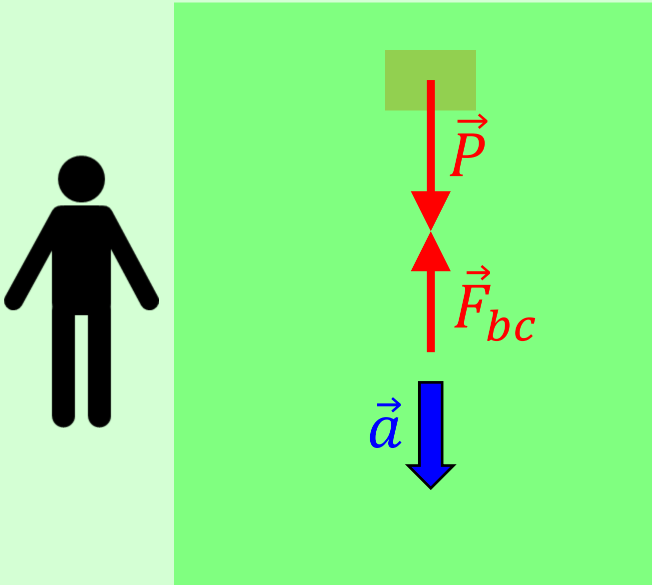


El observador móvil percibe que sobre la caja actúa una fuerza de inercia (no real) $\vec{F}_{in}$, la fuerza centrífuga, dirigida hacia fuera de la curva (hacia arriba, por tanto). El módulo de esta fuerza es

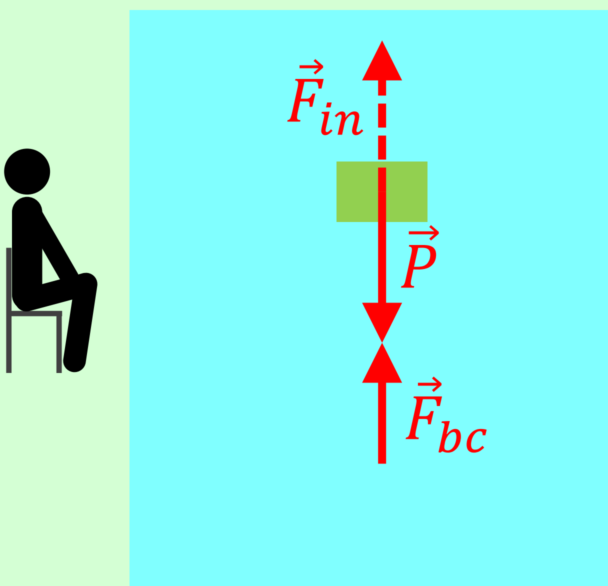
$$F_{in} = \mathrm{m}\, v^2/\rho$$

donde ρ es el radio de curvatura de la carretera.

El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, la caja en este caso. El fondo verde corresponde al observador fijo, y el azul al móvil.

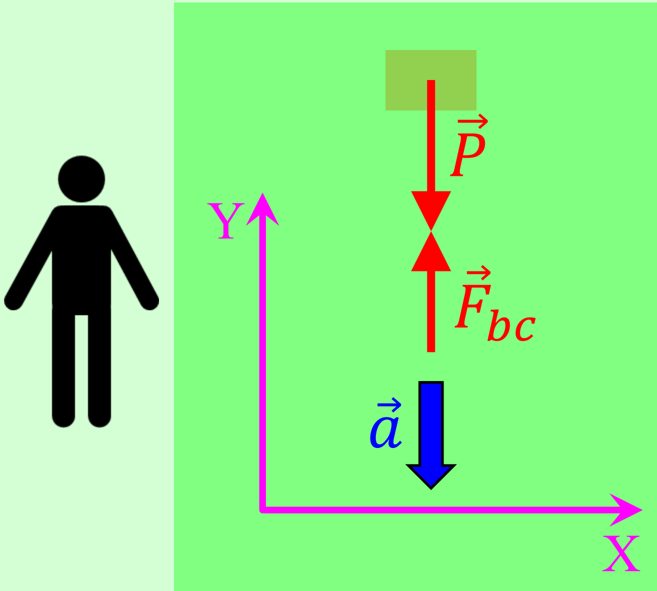


Como consecuencia de la acción de $\vec{P}$ y $\vec{F}_{bc}$, la caja tiene una aceleración $\vec{a}$. Dado que el módulo de la velocidad es constante, no hay aceleración tangencial, por lo que $\vec{a}$ es igual a la aceleración normal, dirigida hacia dentro de la curva (hacia abajo, por tanto), y cuyo módulo es v^2/ρ.



Como consecuencia de la acción de $\vec{P}$, $\vec{F}_{bc}$ y $\vec{F}_{in}$, la caja tiene una aceleración relativa $\vec{a}'$ nula, ya que está en reposo desde el punto de vista del observador móvil.

Hay que establecer sistemas de referencia, si el enunciado no los especifica. Aquí hemos elegido los mostrados en las figuras.

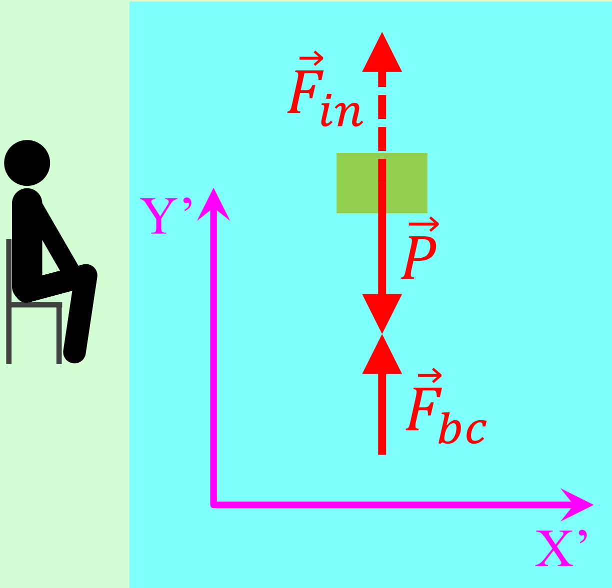


Ahora vamos a aplicar el teorema del centro de masas desde el punto de vista, tanto del observador fijo, como del móvil.

$$\vec{P} + \vec{F}_{bc} = m\vec{a}$$

$$(0; -20 \times 9{,}8) + (0; 117{,}6) =$$
$$= 20(0; -28^2/\rho)$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -196 + 117{,}6 = -\dfrac{15680}{\rho} \Rightarrow \rho = 200\ \mathrm{m} \end{cases}$$

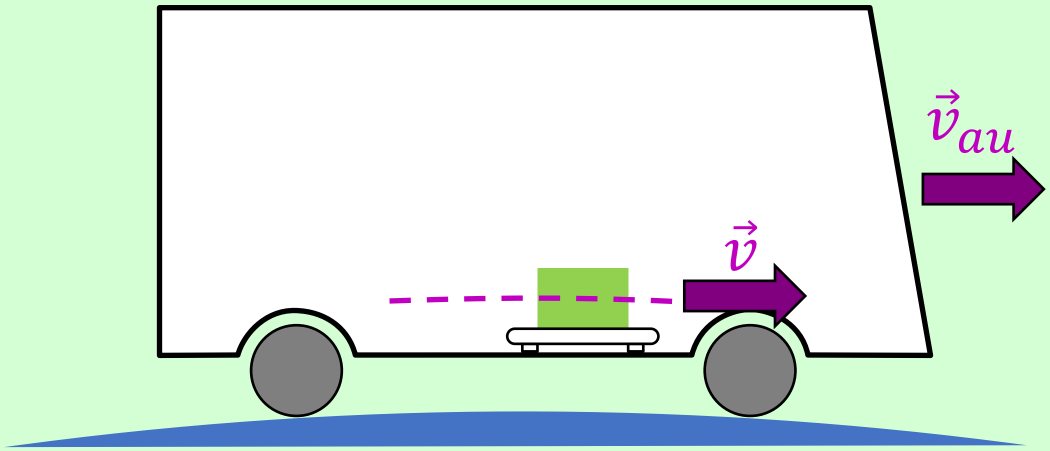


$$\vec{P} + \vec{F}_{bc} + \vec{F}_{in} = m\vec{a}'$$

$$(0; -20 \times 9{,}8) + (0; 117{,}6) +$$
$$+(0; 20 \times 28^2/\rho = 20(0; 0)$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -196 + 117{,}6 + \dfrac{15680}{\rho} = 0 \Rightarrow \rho = 200\ \mathrm{m} \end{cases}$$

El desarrollo realizado incluye varias simplificaciones, que vamos a mencionar y justificar.



- El radio de curvatura de la trayectoria del centro de masas de la caja, no es igual al de la carretera, sino ligeramente mayor.
- Los centros de masas de caja y autobús no siguen la misma trayectoria. Por tanto, la velocidad de la caja no es exactamente la misma que la del autobús.

Las simplificaciones se justifican en base a que, como indica el enunciado, se considera que las dimensiones del autobús son despreciables con respecto al radio de curvatura de la carretera.

Momento lineal

Se denomina momento lineal o cantidad de movimiento de un punto material, al producto de su masa por su velocidad.

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

Se denomina momento lineal o cantidad de movimiento de un sistema de puntos materiales, a la suma de los momentos lineales de todos los puntos del sistema.

$$\boxed{\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i}$$

De acuerdo con su definición, el momento lineal es una magnitud vectorial, y su producto dimensional es

$$\dim p = \mathsf{M} \dim v = \mathsf{M}(\mathsf{T}^{-1}\mathsf{L}) = \mathsf{T}^{-1}\mathsf{L}\mathsf{M}$$

La unidad SI coherente del momento lineal es el $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$.

Momento lineal

Aplicando la definición de velocidad, y siendo cada masa m_i constante, resulta

$$\vec{p} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum \frac{d(m_i \vec{r}_i)}{dt} = \frac{d(\sum m_i \vec{r}_i)}{dt}$$

Utilizando la expresión del centro de masas de un sistema,

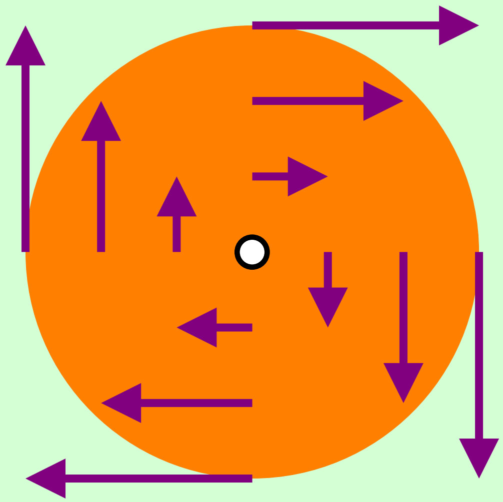
$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \Rightarrow \sum m_i \vec{r}_i = m\vec{r}_C \Rightarrow \vec{p} = \frac{d(m\vec{r}_C)}{dt} = m\frac{d\vec{r}_C}{dt}$$

En conclusión,

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}_C}$$

Ejercicio 14

Una polea circular y homogénea gira alrededor de su eje a un ritmo constante de 100 vueltas por segundo. ¿Cuál es su momento lineal?

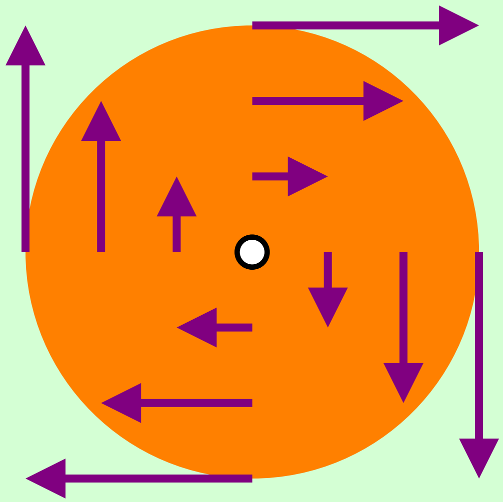


Dado que la polea es homogénea, puede considerarse constituida por infinitos puntos materiales de la misma masa infinitesimal.

Por tanto, el patrón de momentos lineales es el mismo que el de velocidades de los puntos materiales, con esa masa como factor de escala.

Dada el enorme ritmo de giro, puede parecer que el momento lineal debe ser gigantesco.

Sin embargo, debe recordarse que el momento lineal es una magnitud vectorial, y que el de un sistema se obtiene sumando los de los puntos materiales que lo constituyen. A la vista del esquema, se deduce que



$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \vec{0}\ \mathrm{kg \cdot m/s} \qquad p \neq \sum p_i$$

Dado que el centro de masas de la polea se encuentra precisamente en el eje de giro, también se puede obtener el momento lineal como sigue.

$$\vec{p} = m\vec{v}_C = m\vec{0} = \vec{0}\ \mathrm{kg \cdot m/s}$$

Momento lineal

Partiendo del teorema del centro de masas, es

$$\vec{R} = m\vec{a}_C = m\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{d(m\vec{v}_C)}{dt}$$

Por tanto,

$$\boxed{\vec{R} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Segunda ley de Newton (formulación original).

La resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema de puntos materiales, es igual al ritmo con que varía su momento lineal.

Momento lineal

La formulación original de Newton y el teorema del centro de masas son equivalentes … si la masa del sistema es constante. En efecto,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v}_C)}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v}_C + m\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v}_C + m\vec{a}_C$$

Si m es constante, $$\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0\vec{v}_C + m\vec{a}_C = m\vec{a}_C$$

Si m no es constante, $$\frac{dm}{dt} \neq 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} \neq m\vec{a}_C$$

En este caso, $\vec{R}$ no puede ser igual a ambas expresiones. La que es cierta, sea la masa constante o no, es $\vec{R} = d\vec{p}/dt$.

Momento lineal

Sea un sistema de puntos materiales sobre el que no actúan fuerzas exteriores (sistema aislado), o aun actuando su resultante es nula. En tal caso,

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} \text{ es constante}$$

Teorema de conservación del momento lineal.

Si la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema de puntos materiales es cero, el momento lineal del mismo permanece constante.

Momento lineal

Existen procesos, como colisiones o explosiones, en los que las fuerzas son de gran intensidad y corta duración.

Estos casos son difíciles de estudiar mediante la aplicación directa de las leyes de Newton.

Ejemplo: choque entre dos cuerpos.

Las fuerzas que se ejercen entre sí son intensas y breves.

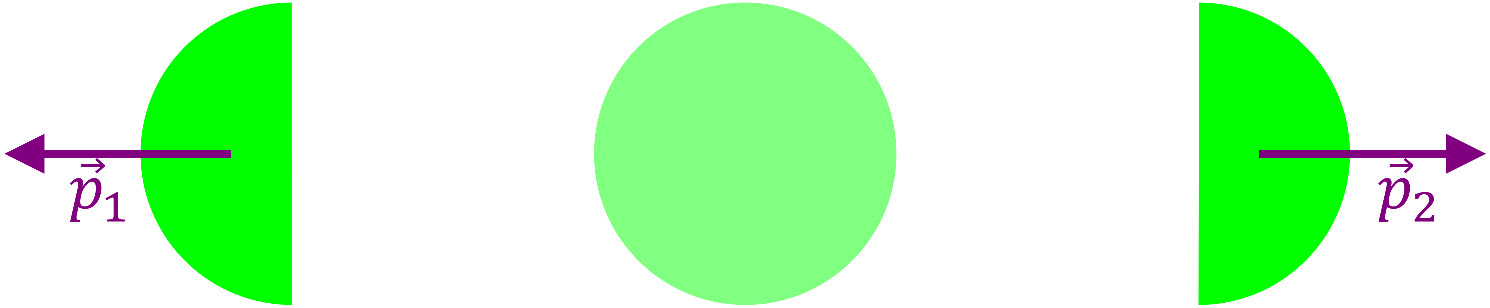
El momento lineal de un cuerpo varía por la acción de las fuerzas ejercidas por el otro.

Si se considera el sistema constituido por los dos cuerpos, esas fuerzas son internas.

Si la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el conjunto es nula, el momento lineal del sistema se conserva.

Momento lineal

Puede parecer que en una explosión como la aquí mostrada, el momento lineal no se conserva. ¿Acaso no ha pasado de ser cero a no serlo?



No, porque el momento lineal es una magnitud vectorial.

Es cierto que tras la explosión es $p_1 + p_2 \neq 0$.

Pero de lo que se trata es de que sí es $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$.

Ejercicio 15

Una bola de billar de 0,3 kg se dirige a 2 m/s directamente hacia otra de 0,5 kg que se encuentra en reposo. Tras el choque, la segunda se mueve a 1,47 m/s. ¿Cuál es la velocidad de la primera?

Considérese el sistema constituido por las dos bolas.

Entre los instantes inmediatamente anterior e inmediatamente posterior al choque, transcurre un brevísimo intervalo de tiempo.

La relevancia de las fuerzas exteriores (pesos, normales, rozamiento) durante ese intervalo es despreciable.

Por tanto, se admite que el momento lineal del sistema permanece constante durante el choque.

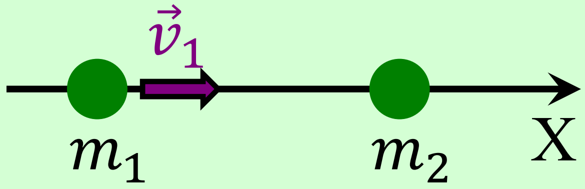
Dado que vamos a trabajar con una magnitud vectorial, se requiere un sistema de referencia.

Puesto que todo sucede a lo largo de una línea recta, es suficiente utilizar un sistema de referencia unidimensional, con el eje X a lo largo de dicha línea.

Importante. No debe confundirse la componente única de un vector unidimensional con el módulo. P.ej., los vectores (3) y (-3) son distintos, pero tienen el mismo módulo, 3.

El momento lineal del sistema inmediatamente antes del choque es

INMEDIATAMENTE ANTES DEL CHOQUE

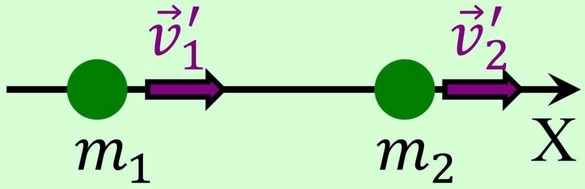


$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0{,}3(2) + 0{,}5(0) =$$

$$= (0{,}6)\ \mathrm{kg \cdot m/s}$$

El momento lineal del sistema inmediatamente después del choque es

INMEDIATAMENTE DESPUÉS DEL CHOQUE



$$\vec{p}\,' = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = 0{,}3\vec{v}_1' + 0{,}5(1{,}47) =$$

$$= 0{,}3\vec{v}_1' + (0{,}735)\ (\mathrm{SI})$$

Por tanto,

$$\vec{p} = \vec{p}\,' \Rightarrow (0{,}6) = 0{,}3\vec{v}_1' + (0{,}735) \Rightarrow 0{,}3\vec{v}_1' = (-0{,}135) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1' = (-0{,}45)\ \mathrm{m/s}$$

Así pues, la primera bola se mueve tras el choque a $0{,}45\ \mathrm{m/s}$ en sentido contrario al de su movimiento inicial.

Ejercicio 16

Dos objetos, de masas $m_1 = 3$ kg y m_2, chocan en el aire. Inmediatamente antes del choque, sus velocidades eran $\vec{v}_1 = (2; 3; -1)$ m/s y $\vec{v}_2 = (-3; 0; 6)$ m/s. Inmediatamente después, esas velocidades pasaron a ser $\vec{v}_1' = \left(1; v_{1y}'; 0\right)$ (SI) y $\vec{v}_2' = (-1{,}5; 1{,}5; v_{2z}')$ (SI). Obténgase los valores de m_2, v_{1y}' y v_{2z}'.

En base a los mismos argumentos dados en el ejercicio anterior, se admite que el momento lineal del sistema constituido por los dos objetos permanece constante durante el choque.

Por tanto,

$$\vec{p} = \vec{p}' \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(2; 3; -1) + m_2(-3; 0; 6) = 3\left(1; v_{1y}'; 0\right) + m_2(-1{,}5; 1{,}5; v_{2z}') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (6 - 3m_2; 9; -3 + 6m_2) = \left(3 - 1{,}5m_2; 3v_{1y}' + 1{,}5m_2; m_2 v_{2z}'\right)$$

En consecuencia,

$$\begin{cases} 6-3m_2 = 3-1{,}5m_2 \;\Rightarrow -1{,}5m_2 = -3 \Rightarrow m_2 = 2\ \mathrm{kg} \\ 9 = 3v'_{1y} + 1{,}5m_2 \;\Rightarrow 3v'_{1y} = 9 - 1{,}5\times 2 = 6 \Rightarrow v'_{1y} = 2\ \mathrm{m/s} \\ -3+6m_2 = m_2 v'_{2z} \Rightarrow -3+6\times 2 = 2v'_{2z} \Rightarrow v'_{2z} = 4{,}5\ \mathrm{m/s} \end{cases}$$

Impulso

Se denomina impulso de una fuerza a lo largo de un intervalo de tiempo, a la integral de dicha fuerza en ese intervalo.

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt}$$

Caso particular. Si $\vec{F}$ es constante, resulta

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{F} \int_{t_1}^{t_2} dt = \vec{F}[t]_{t_1}^{t_2} = \vec{F}(t_2 - t_1)$$

$$I = F(t_2 - t_1)$$

Impulso

De acuerdo con su definición, el impulso es una magnitud vectorial, y su producto dimensional es

$$\dim I = \dim F \cdot \mathsf{T} = (\mathsf{T}^{-2}\mathsf{LM})\mathsf{T} = \mathsf{T}^{-1}\mathsf{LM}$$

La unidad SI coherente del impulso es el $\mathrm{N} \cdot \mathrm{s}$.

Nótese que el producto dimensional del impulso es el mismo que el del momento lineal, $\mathsf{T}^{-1}\mathsf{LM}$.

Sin embargo, aunque sus unidades SI coherentes son equivalentes, debe utilizarse la que corresponda: el $\mathrm{N} \cdot \mathrm{s}$ para el impulso, y el $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$ para el momento lineal.

Impulso

Para evitar confusiones, conviene recalcar los aspectos conceptuales más relevantes que diferencian impulso y momento lineal.

- El momento lineal está asociado a sistemas de puntos materiales, y el impulso a fuerzas.

  Ejemplo: bloque que desciende por un plano inclinado.

  Se puede hablar del momento lineal del bloque, y del impulso del peso, de la reacción normal, o de la fuerza de rozamiento. No existe tal cosa como el impulso del bloque.

- El momento lineal es una magnitud instantánea, y el impulso de intervalo.

  Se puede hablar del momento lineal de un bloque al comienzo o al final de un plano inclinado (instantes), y del impulso del peso a lo largo del recorrido (intervalo).

Impulso

Sea un sistema de puntos materiales sobre el que actúa un conjunto de fuerzas exteriores. La suma de sus impulsos en un cierto intervalo de tiempo, es

$$\vec{I}_{ext} = \sum \vec{I}_i = \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum \vec{F}_i \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R} \, dt$$

Por tanto, el impulso total del conjunto de fuerzas exteriores es igual al impulso de su resultante.

Impulso

Puesto que $\vec{R} = d\vec{p}/dt$, se tiene que

$$\vec{\mathrm{I}}_{\mathrm{ext}} = \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \vec{\mathrm{R}}\,\mathrm{dt} = \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} d\vec{p} = [\vec{p}]_{t_1}^{t_2} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

Por tanto,

$$\boxed{\vec{\mathrm{I}}_{\mathrm{ext}} = \Delta\vec{p}}$$

Conviene resaltar dos aspectos de este resultado.

- Requiere que impulso y momento lineal tengan el mismo producto dimensional, como en efecto es el caso.
- En coherencia con lo que ya se indicó, el impulso total en un <u>intervalo</u> es igual al momento lineal en el <u>instante</u> final, menos el del <u>instante</u> inicial.

Ejercicio 17

Sobre una partícula de 2 kg actúa una fuerza $\vec{F} = (5; 4t; 3\mathrm{t}^2)$ (SI). ¿Cuál será su velocidad en el instante $t = 3$ s, sabiendo que en el instante $t = 1$ s es $(2; 5; 4)$ m/s?

El impulso de la fuerza entre los instantes $t = 1$ s y $t = 3$ s es

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_1^3 (5; 4t; 3\mathrm{t}^2) dt = \left[(5t; 2\mathrm{t}^2; \mathrm{t}^3)\right]_1^3 =$$

$$= (5 \times 3; 2 \times 3^2; 3^3) - (5 \times 1; 2 \times 1^2; 1^3) =$$

$$= (15; 18; 27) - (5; 2; 1) = (10; 16; 26)\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{s}$$

Por tanto,

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} \Rightarrow (10; 16; 26) = 2\vec{v}(3) - 2(2; 5; 4) = 2\vec{v}(3) - (4; 10; 8) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\vec{v}(3) = (10; 16; 26) + (4; 10; 8) = (14; 26; 34) \Rightarrow$$

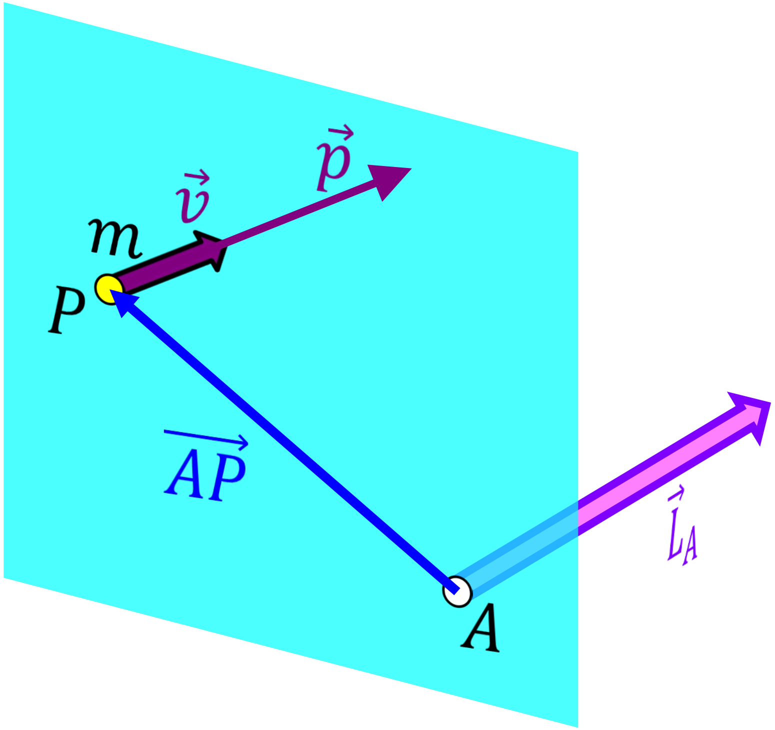
$$\Rightarrow \vec{v}(3) = (7; 13; 17)\ \mathrm{m/s}$$

Momento angular

Se denomina momento angular o momento cinético de un punto material, respecto a un punto del espacio, al momento del momento lineal de dicho punto material respecto al citado punto del espacio.

Sea un punto material P de masa m con velocidad $\vec{v}$, y por tanto con momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$. Su momento angular $\vec{L}_A$ respecto a un punto A es $\vec{M}_A(\vec{p})$. Por tanto,

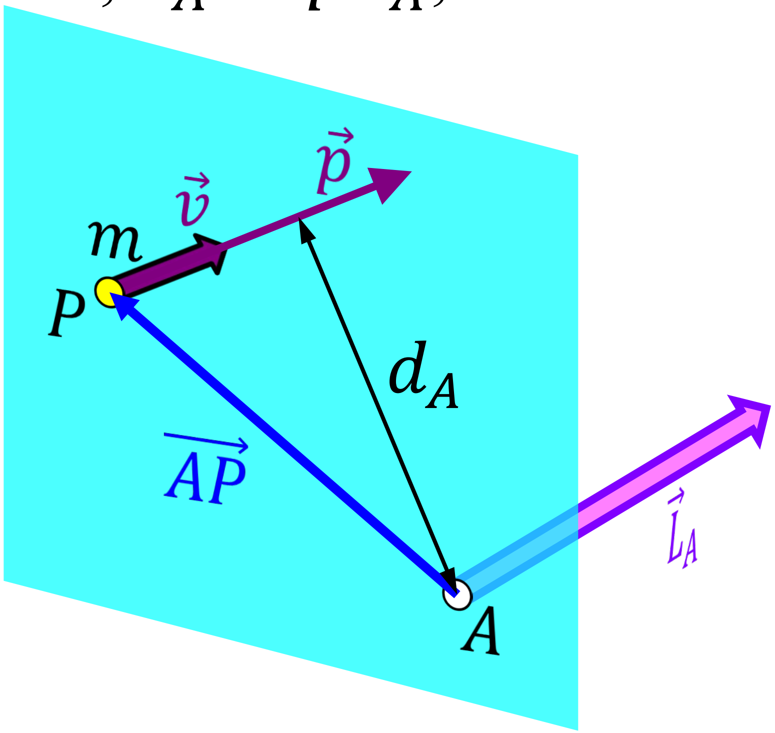
$$\boxed{\vec{L}_A = \overrightarrow{AP} \times \vec{p}}$$

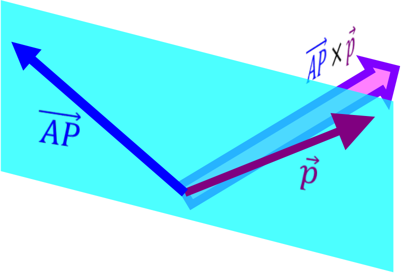


Momento angular

El momento angular satisface las propiedades de cualquier momento de vector. Así:

- su módulo es el del momento lineal multiplicado por su brazo respecto al punto considerado, $L_A = pd_A$;
- su dirección es perpendicular al plano definido por la línea de acción del momento lineal y el citado punto;
- su sentido es el del producto vectorial que lo define.



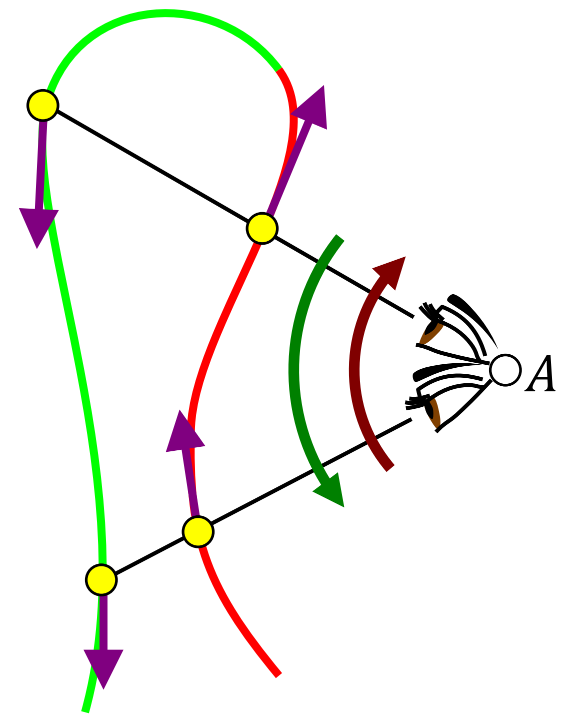


Momento angular

Se puede interpretar el sentido del momento angular como el correspondiente, por la regla de Maxwell, al sentido en que el punto material rodea al punto considerado.

Aquí, “rodear” no debe entenderse como “girar alrededor de”, sino a cómo un observador, situado en el punto considerado, ha de girar la vista para seguir con ella al punto material.

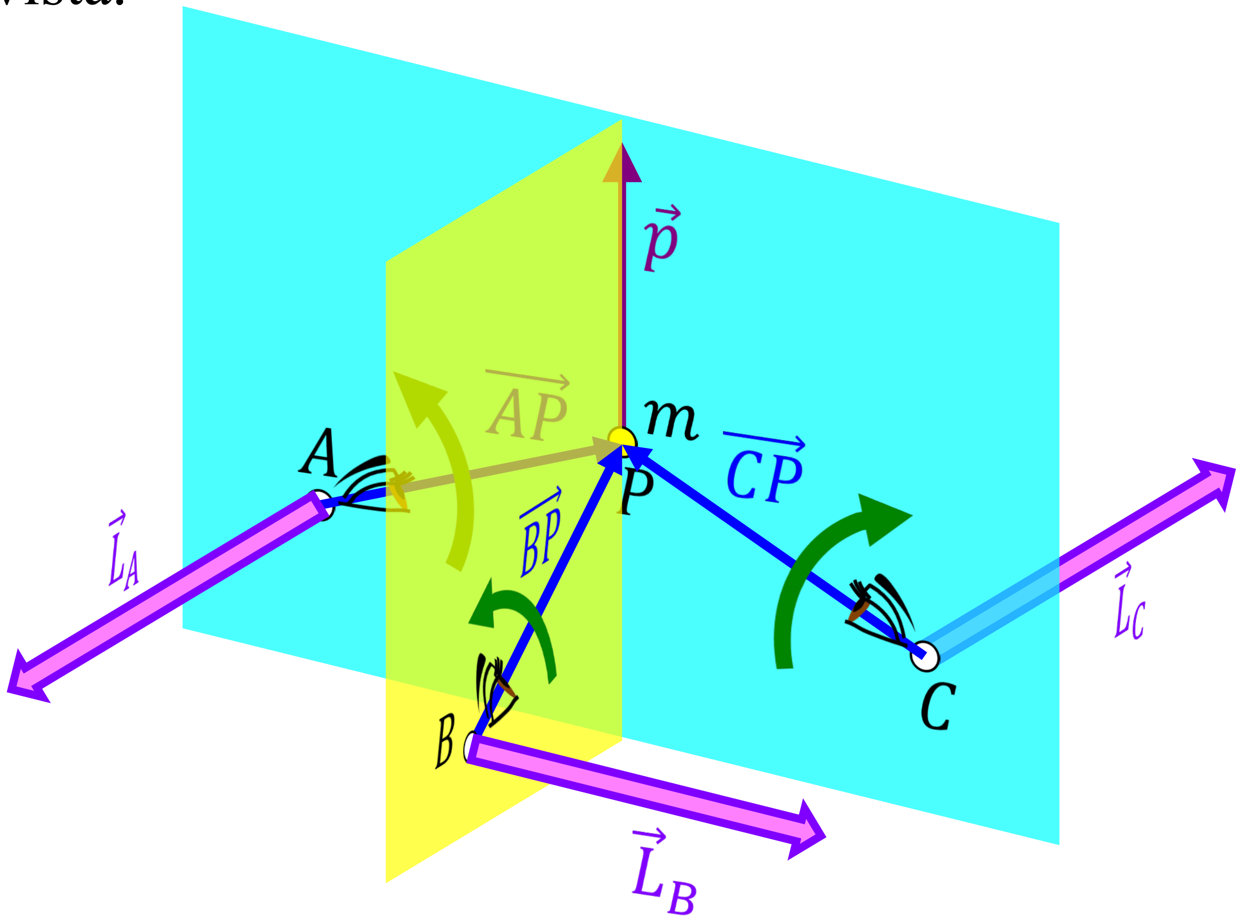
En el ejemplo, en el tramo rojo hay que girar la vista en sentido horario, y en el verde en el antihorario. Por la regla de Maxwell, esto se corresponde con que $\vec{L}_A$ se dirige durante el primer tramo hacia dentro de la página, y durante el segundo hacia fuera.



Momento angular

En esta figura se muestra un punto material P, y su momento angular respecto a tres puntos A, B y C.

Obsérvese la relación entre el sentido de un momento angular y el del giro de la vista.



Momento angular

De acuerdo con su definición, el momento angular es una magnitud vectorial, y su producto dimensional es

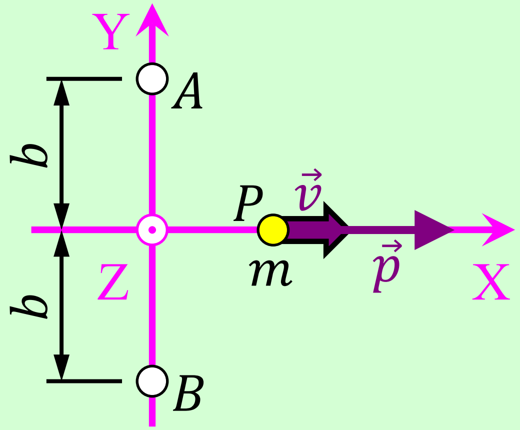
$$\dim L = \mathsf{L} \dim p = \mathsf{L}(\mathsf{T}^{-1}\mathsf{L}\mathsf{M}) = \mathsf{T}^{-1}\mathsf{L}^2\mathsf{M}$$

La unidad SI coherente del momento lineal es el $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$.

Ejercicio 18

Una partícula de masa m se mueve sobre el eje X de un sistema de referencia con velocidad constante $\vec{v}$, siendo su vector de posición $\vec{r} = (vt; 0; 0)$ ($t \in (-\infty; \infty)$). ¿Cuáles son sus momentos angulares respecto a los puntos $A(0; b; 0)$ y $B(0; -b; 0)$?

Aunque no es necesario para la resolución del ejercicio, se incluye aquí una representación gráfica, junto con el sistema de referencia dextrógiro utilizado.*



En primer lugar obtenemos el momento lineal de la partícula, y los vectores que van de los puntos A y B a la posición P de dicha partícula.

$$\vec{p} = m\vec{v} = m(v; 0; 0) = (mv; 0; 0)$$

$$\overrightarrow{AP} = (vt; 0; 0) - (0; b; 0) = (vt; -b; 0)$$

$$\overrightarrow{BP} = (vt; 0; 0) - (0; -b; 0) = (vt;\ b; 0)$$

* El eje Z se dirige hacia el lector. Recordemos que, con carácter general, algo perpendicular a una página se representa por · si se dirige hacia fuera, y por × si lo hace hacia dentro.

Los momentos angulares de la partícula respecto a los puntos A y B son:

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AP} \times \vec{p} = (vt; -b; 0) \times (mv; 0; 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ vt & -b & 0 \\ mv & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

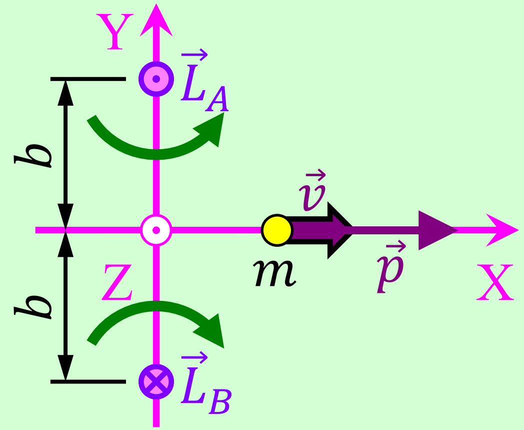
$$= (0; 0; mvb)$$

$$\vec{L}_B = \overrightarrow{BP} \times \vec{p} = (vt; b; 0) \times (mv; 0; 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ vt & b & 0 \\ mv & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (0; 0; -mvb)$$

$$\vec{L}_A = (0; 0; mvb)$$

$$\vec{L}_B = (0; 0; -mvb)$$



Nótese que, en este caso, los momentos angulares no varían con el tiempo.

Nótese también que, como se había indicado:

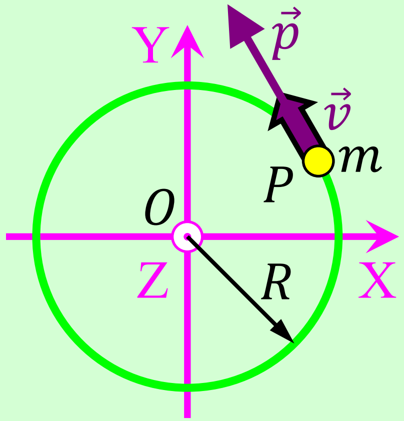
- sus módulos son el de $\vec{p}$ ($p = mv$) por los correspondientes brazos, ambos b (obsérvese que, durante el movimiento de la partícula, ni p ni b varían);
- sus direcciones son perpendiculares al plano definido por punto y línea de acción de $\vec{p}$, la propia página en este caso;
- sus sentidos son los representados en la figura ($\vec{L}_A$ hacia fuera de la página; $\vec{L}_B$ hacia dentro) y se corresponden, por la regla de Maxwell, con el sentido en que el punto material rodea* al punto considerado.

* Dado que la trayectoria del punto material es rectilínea, este no gira alrededor de A, B, ni ningún punto. Reiteramos que por rodear nos referimos a que un observador ha de girar la vista para seguir con ella al punto material.

Ejercicio 19

Una partícula de masa m se mueve sobre el plano XY de un sistema de referencia con velocidad de módulo constante v, siguiendo una trayectoria circular de radio R y centro en el origen de coordenadas. Su vector de posición es $\vec{r} = (R\cos(vt/R)\,; R\,\mathrm{sen}(vt/R)\,; 0)$. ¿Cuál es su momento angular respecto al origen de coordenadas?

Aunque no es necesario para la resolución del ejercicio, se incluye aquí una representación gráfica, junto con el sistema de referencia dextrógiro utilizado.



En primer lugar obtenemos la velocidad, el momento lineal de la partícula, y el vector que va del origen de coordenadas O a la posición P de dicha partícula.

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt = (-v\,\mathrm{sen}(vt/R)\,; v\cos(vt/R)\,; 0)$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = (-mv\,\mathrm{sen}(vt/R)\,; mv\cos(vt/R)\,; 0)$$

$$\overrightarrow{OP} = (R\cos(vt/R)\,; R\,\mathrm{sen}(vt/R)\,; 0) - (0; 0; 0) =$$

$$= (R\cos(vt/R)\,; R\,\mathrm{sen}(vt/R)\,; 0)$$

El momento angular de la partícula respecto al punto O es

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{p} =$$

$$= (R\cos(vt/R)\,;R\,\mathrm{sen}(vt/R)\,;0) \times (-mv\,\mathrm{sen}(vt/R)\,;mv\cos(vt/R)\,;0) =$$

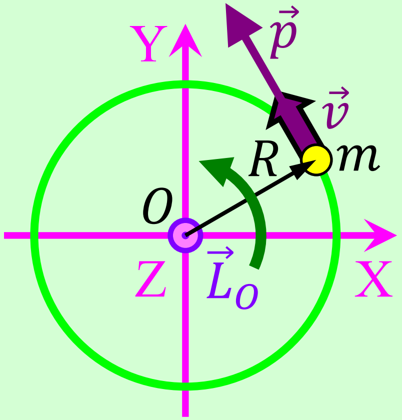
$$= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ R\cos(vt/R) & R\,\mathrm{sen}(vt/R) & 0 \\ -mv\,\mathrm{sen}(vt/R) & mv\cos(vt/R) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (0; 0; mvR\cos^2(vt/R) + mvR\,\mathrm{sen}^2(vt/R)) =$$

$$= (0; 0; mvR[\cos^2(vt/R) + \mathrm{sen}^2(vt/R)]) =$$

$$= (0; 0; mvR)$$

$$\vec{L}_O = (0; 0; mvR)$$



Nótese que, en este caso, el momento angular no varía con el tiempo.

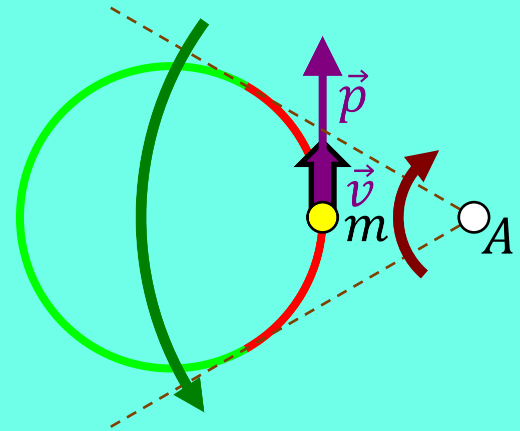
Nótese también que, como se había indicado:

- su módulo es el de $\vec{p}$ ($p = mv$) por el brazo, que es R (obsérvese que, durante el movimiento de la partícula, ni p ni R varían);
- su dirección es perpendicular al plano definido por el punto O y la línea de acción de $\vec{p}$, la propia página en este caso;
- su sentido es el representado en la figura (hacia fuera de la página) y se corresponde, por la regla de Maxwell, con el sentido en que el punto material rodea* al punto O.

* Obsérvese que en este caso el punto material sí gira alrededor de O, en concreto en sentido antihorario. Aun así, nótese que sigue vigente el criterio de que por rodear nos referimos a que un observador ha de girar la vista para seguir con ella al punto material.

Tarea: Compruébese que el momento angular de la partícula respecto al punto $A(2R; 0; 0)$ es $\vec{L}_A = \big(0; 0; mvR(1 - 2\cos(vt/R))\big)$, y por tanto varía con el tiempo.

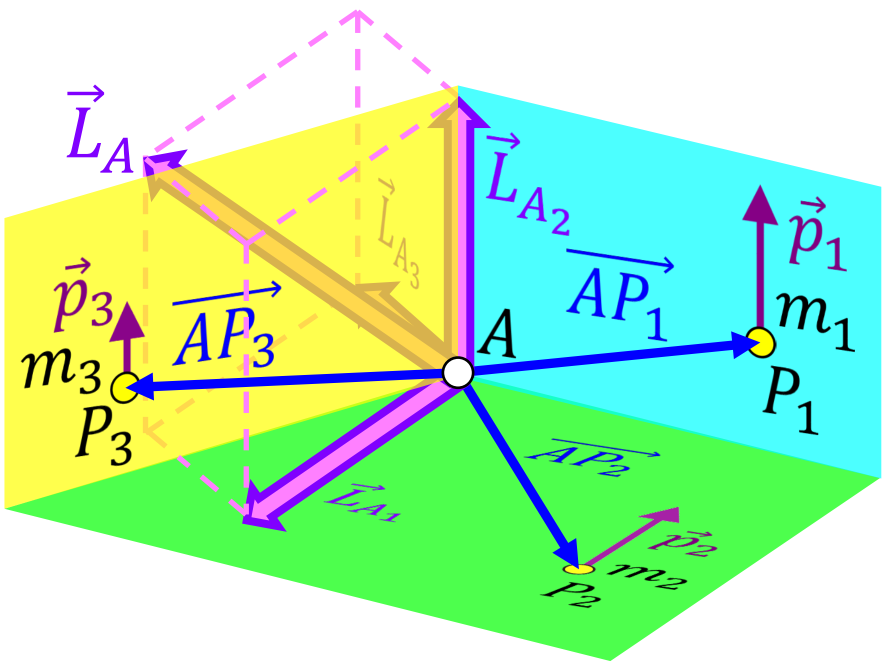
Tarea: Analícese la componente Z de $\vec{L}_A$, comprobando que es negativa cuando la partícula recorre el tramo rojo de la figura, cero en los extremos de dicho tramo, y positiva en el resto de la trayectoria. Relaciónese esto con el sentido en que la partícula, en cada punto de su trayectoria, rodea al punto A.



Momento angular

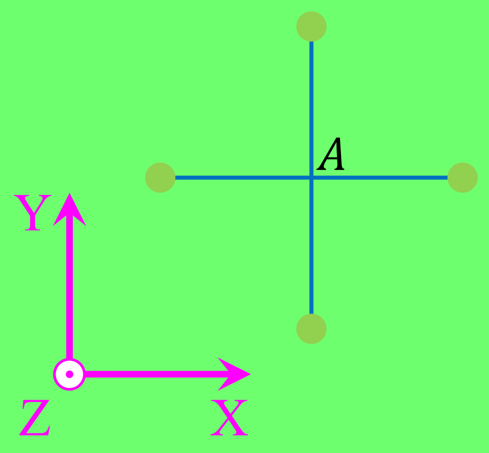
Se denomina momento angular o momento cinético de un sistema de puntos materiales, respecto a un punto del espacio, a la suma de los momentos angulares de todos los puntos del sistema respecto al citado punto del espacio.

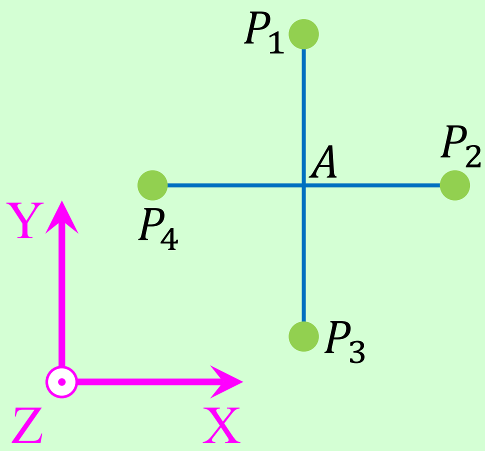
$$\boxed{\vec{L}_A = \sum \vec{L}_{A_i} = \sum \overrightarrow{AP_i} \times \vec{p}_i}$$



Ejercicio 20

Un molinillo está constituido por dos varillas (longitud 0,4 m; masa despreciable) soldadas entre sí, y cuatro esferas (masa 2 kg; radio despreciable), una en cada extremo. El molinillo gira en su plano en sentido horario, alrededor del punto A, con una velocidad angular de módulo $10\ \mathrm{rad/s}$. En la posición representada en la figura, ¿cuáles son el momento lineal del molinillo, y su momento angular respecto a A?





Puesto que las varillas tienen masa despreciable, el molinillo está constituido por cuatro puntos materiales (las esferas de radio despreciable). En la posición analizada, estos puntos se encuentran en P_1, P_2, P_3 y P_4.

Los puntos giran con el molinillo en sentido horario a $10\,\mathrm{rad/s}$, recorriendo una circunferencia de radio $r = 0{,}2$ m (la mitad de la longitud de una varilla). Así, los cuatro tienen velocidades del mismo módulo,

$$v = \omega r = 10 \times 0{,}2 = 2\,\mathrm{m/s}$$

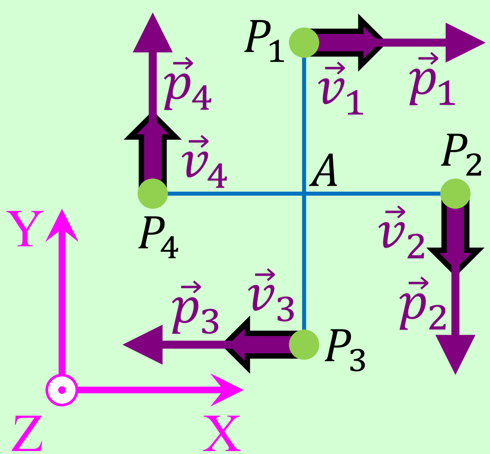
En el sistema de referencia proporcionado, las velocidades y momentos lineales de los cuatro puntos materiales son:

$$\vec{v}_1 = (2; 0; 0)\,\mathrm{m/s}$$
$$\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 = 2(2; 0; 0) = (4; 0; 0)\,\mathrm{kg\cdot m/s}$$

$$\vec{v}_2 = (0; -2; 0)\,\mathrm{m/s}$$
$$\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = 2(0; -2; 0) = (0; -4; 0)\,\mathrm{kg\cdot m/s}$$

$$\vec{v}_3 = (-2; 0; 0)\,\mathrm{m/s}$$
$$\vec{p}_3 = m_3\vec{v}_3 = 2(-2; 0; 0) = (-4; 0; 0)\,\mathrm{kg\cdot m/s}$$

$$\vec{v}_4 = (0; 2; 0)\,\mathrm{m/s}$$
$$\vec{p}_4 = m_4\vec{v}_4 = 2(0; 2; 0) = (0; 4; 0)\,\mathrm{kg\cdot m/s}$$

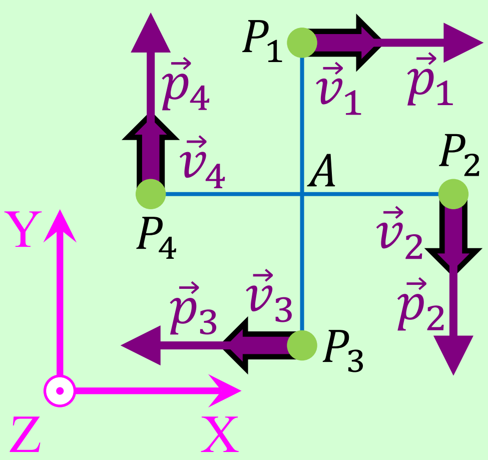


El momento lineal de las varillas es nulo ya que, como se indica, su masa es despreciable.

El momento lineal del molinillo es la resultante del conjunto de vectores $\{\vec{p}_1; \vec{p}_2; \vec{p}_3; \vec{p}_4\}$.

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 =$$
$$= (4; 0; 0) + (0; -4; 0) + (-4; 0; 0) + (0; 4; 0) =$$
$$= (0; 0; 0)\ \mathrm{kg \cdot m/s}$$

Por la simetría de la distribución de masas del molinillo, su centro de masas se encuentra en el punto A, inmóvil por pasar por él el eje de giro. Por tanto, el momento lineal puede también obtenerse como sigue.



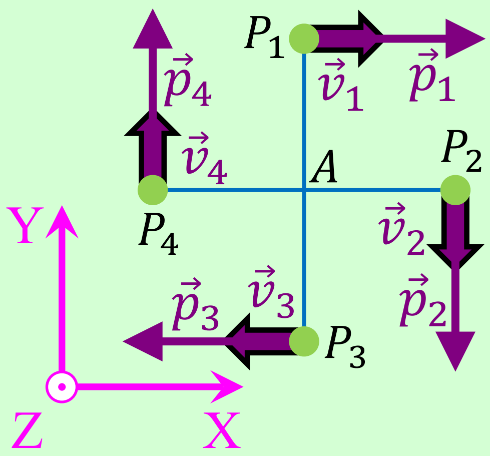
$$\vec{p} = m\vec{v}_C = (2 + 2 + 2 + 2)(0; 0; 0) =$$
$$= (0; 0; 0)\ \mathrm{kg \cdot m/s}$$

El momento angular del molinillo respecto al punto A es el correspondiente momento del conjunto de vectores $\{\vec{p}_1; \vec{p}_2; \vec{p}_3; \vec{p}_4\}$.

$$\vec{L}_A = \vec{L}_{A_1} + \vec{L}_{A_2} + \vec{L}_{A_3} + \vec{L}_{A_4} =$$
$$= \overrightarrow{AP_1} \times \vec{p}_1 + \overrightarrow{AP_2} \times \vec{p}_2 + \overrightarrow{AP_3} \times \vec{p}_3 + \overrightarrow{AP_4} \times \vec{p}_4$$

Es: $\overrightarrow{AP_1} = (0; 0{,}2; 0)$ m; $\overrightarrow{AP_2} = (0{,}2; 0; 0)$ m; $\overrightarrow{AP_3} = (0; -0{,}2; 0)$ m; $\overrightarrow{AP_4} = (-0{,}2; 0; 0)$ m.

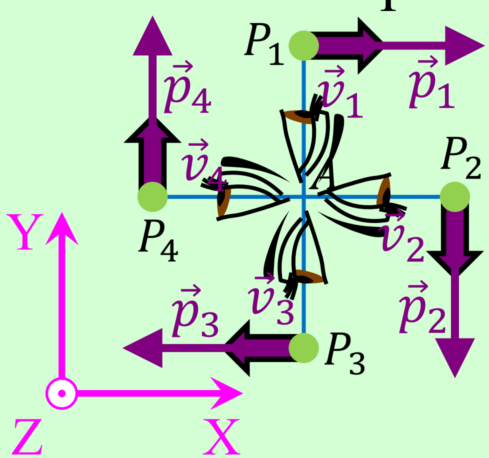
Con estos valores, y realizando los productos vectoriales, resulta



$$\vec{L}_A = (0; 0{,}2; 0) \times (4; 0; 0) +$$
$$+(0{,}2; 0; 0) \times (0; -4; 0) +$$
$$+(0; -0{,}2; 0) \times (-4; 0; 0) +$$
$$+(-0{,}2; 0; 0) \times (0; 4; 0) =$$
$$= (0; 0; -0{,}8) + (0; 0; -0{,}8) +$$
$$+(0; 0; -0{,}8) + (0; 0; -0{,}8) =$$
$$= (0; 0; -3{,}2)\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}$$

Otra forma de obtener el momento angular es como sigue.

- Los cuatro momentos lineales $\vec{p}_i$ tienen el mismo módulo, $p_i = m_i v_i = 2 \times 2 = 4\ \mathrm{kg \cdot m/s}$, y el mismo brazo, $d_i = 0{,}2\ \mathrm{m}$. Por tanto, los correspondientes cuatro momentos angulares tienen el mismo módulo, $L_{A_i} = p_i d_i = 4 \times 0{,}2 = 0{,}8\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}$.
- Los cuatro momentos angulares son perpendiculares a esta página, ya que es el plano definido por el punto A y la línea de acción de cualquiera de los $\vec{p}_i$.
- Los cuatro momentos angulares se dirigen hacia dentro de la página, como corresponde, por la regla de Maxwell, al sentido en que los cuatro puntos materiales rodean al punto A.



Por tanto, el momento angular del molinillo es también perpendicular a esta página y hacia dentro, y su módulo es la suma de los módulos, $L_A = 0{,}8 + 0{,}8 + 0{,}8 + 0{,}8 = 3{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}$.

Así pues, $\vec{L}_A = (0; 0; -3{,}2)\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}$

Campo de momentos angulares

Sea el conjunto de vectores $\{\vec{p}_i\}$, constituido por los momentos lineales de todos los puntos materiales de un sistema.

- Puesto que $\vec{p} = \sum \vec{p}_i$, el momento lineal es la resultante del conjunto de vectores $\{\vec{p}_i\}$.
- Puesto que $\vec{L}_A = \sum \vec{L}_{A_i}$, los momentos angulares son los momentos del conjunto de vectores $\{\vec{p}_i\}$.

Por tanto, en un instante dado, un sistema de puntos materiales tiene un momento lineal, y un campo de momentos angulares.

De la ecuación del campo de momentos, aplicada a los de los vectores $\{\vec{p}_i\}$, se obtiene que los momentos angulares respecto a dos puntos A y B satisfacen la relación

$$\boxed{\vec{L}_A = \vec{L}_B + \overrightarrow{AB} \times \vec{p}}$$

Teorema del momento angular

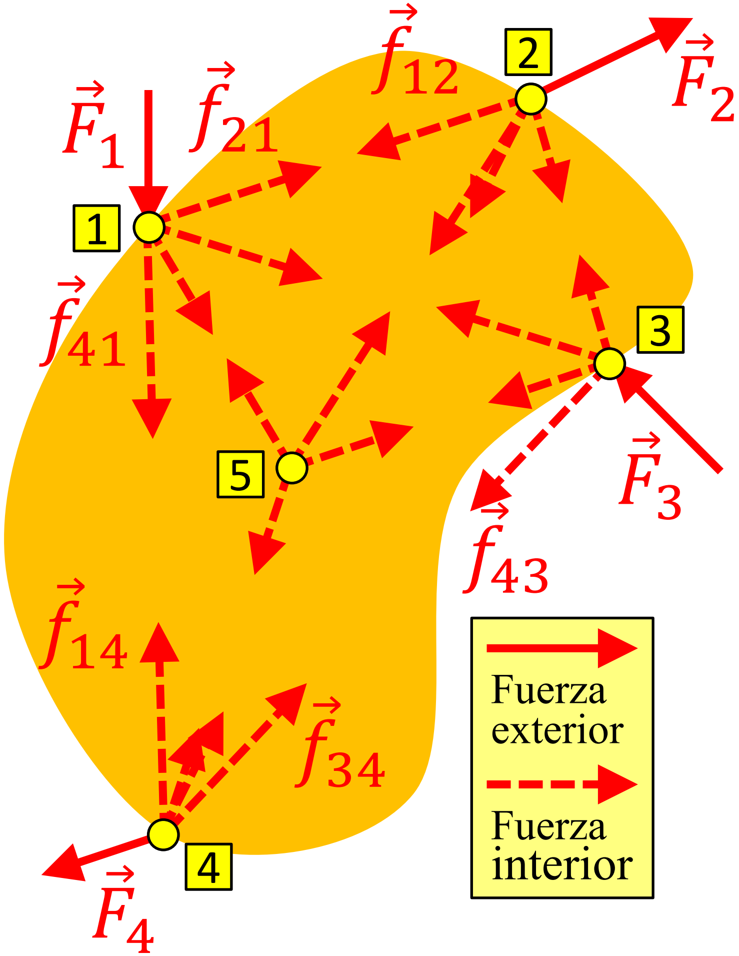
Sea el conjunto de vectores $\{\vec{p}_i\}$, constituido por los momentos lineales de todos los puntos materiales de un sistema.

Como ya se indicó, de acuerdo con la formulación original de la segunda ley de Newton, la derivada de su resultante respecto al tiempo es igual a la resultante del conjunto de fuerzas exteriores actuantes: $d\vec{p}/dt = \vec{R}$.

Sea el momento del conjunto $\{\vec{p}_i\}$ respecto a un punto genérico A. Su derivada respecto al tiempo, $d\vec{L}_A/dt$, ¿tiene algún significado físico?

Retomamos seguidamente la notación utilizada en el apartado “Teorema del centro de masas”, añadiendo alguna más.

Teorema del momento angular



Notación

$\vec{F}_i$: fuerza neta exterior que actúa sobre el punto i.

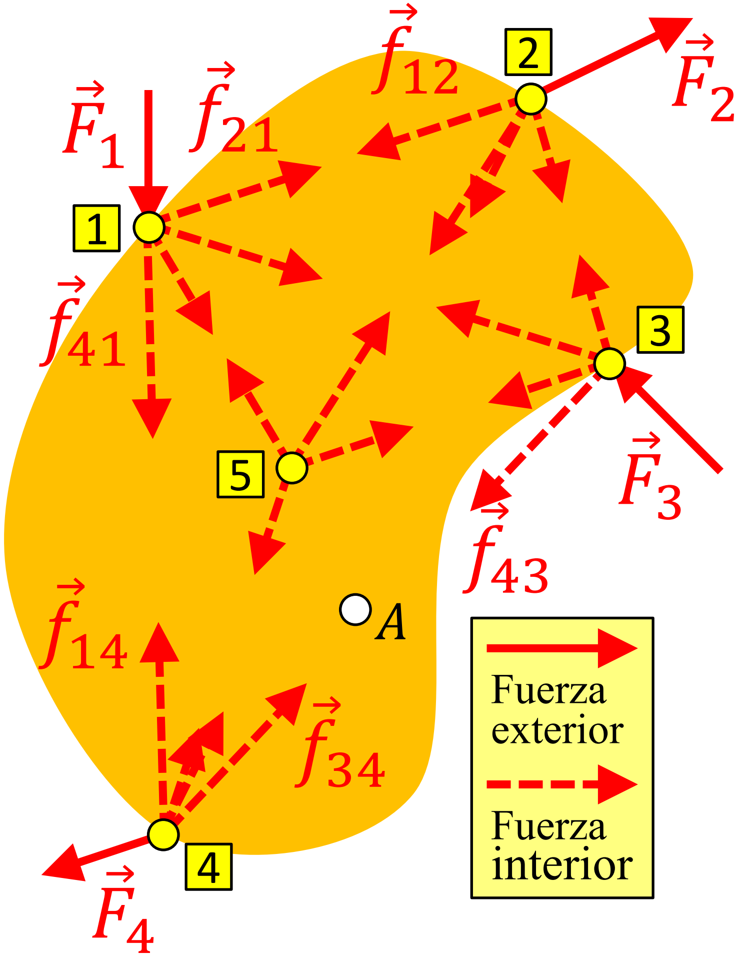
$\vec{f}_{ji}$: fuerza interior ejercida por el punto j sobre el i.

$\vec{f}_i$: fuerza neta interior ejercida sobre el punto i.

Es $\quad \vec{f}_i = \vec{f}_{1i} + \vec{f}_{2i} + \cdots$

Por claridad, la figura solo muestra algunas fuerzas exteriores y parejas de interiores. En realidad hay que tener en cuenta todos los puntos del sistema, las fuerzas que actúan sobre ellos, y las que se ejercen mutuamente. Basta considerar $\vec{0}$ aquellas fuerzas que no estén realmente presentes.

Teorema del momento angular



Notación (2)

$\vec{M}_{A_i}$: momento, respecto a A, de la fuerza neta exterior $\vec{F}_i$ que actúa sobre el punto i.

$\vec{m}_{A_{ji}}$: momento, respecto a A, de la fuerza interior $\vec{f}_{ji}$ ejercida por el punto j sobre el i.

$\vec{m}_{A_i}$: momento, respecto a A, de la totalidad de fuerzas interiores ejercidas sobre el punto i.

Es $\vec{m}_{A_i} = \vec{m}_{A_{1i}} + \vec{m}_{A_{2i}} + \cdots$

Teorema del momento angular

Es
$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d\left[\sum \vec{L}_{A_i}\right]}{dt} = \sum \frac{d\vec{L}_{A_i}}{dt}$$

Para obtener $d\vec{L}_{A_i}/dt$ se va a necesitar conocer $d\overrightarrow{AP_i}/dt$.

Siendo $\vec{r}_i$ el vector de posición del *i*-ésimo punto material, y $\vec{r}_A$ el del punto A, que es constante, resulta

$$\frac{d\overrightarrow{AP_i}}{dt} = \frac{d(\vec{r}_i - \vec{r}_A)}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_i - 0 = \vec{v}_i$$

Por tanto,

$$\frac{d\vec{L}_{A_i}}{dt} = \frac{d\left[\overrightarrow{AP_i} \times \vec{p}_i\right]}{dt} = \frac{d\overrightarrow{AP_i}}{dt} \times \vec{p}_i + \overrightarrow{AP_i} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} =$$

$$= \vec{v}_i \times \vec{p}_i + \overrightarrow{AP_i} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

Teorema del momento angular

Vamos a analizar la expresión obtenida.

$$\frac{d\vec{L}_{A_i}}{dt} = \vec{v}_i \times \vec{p}_i + \overrightarrow{AP_i} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

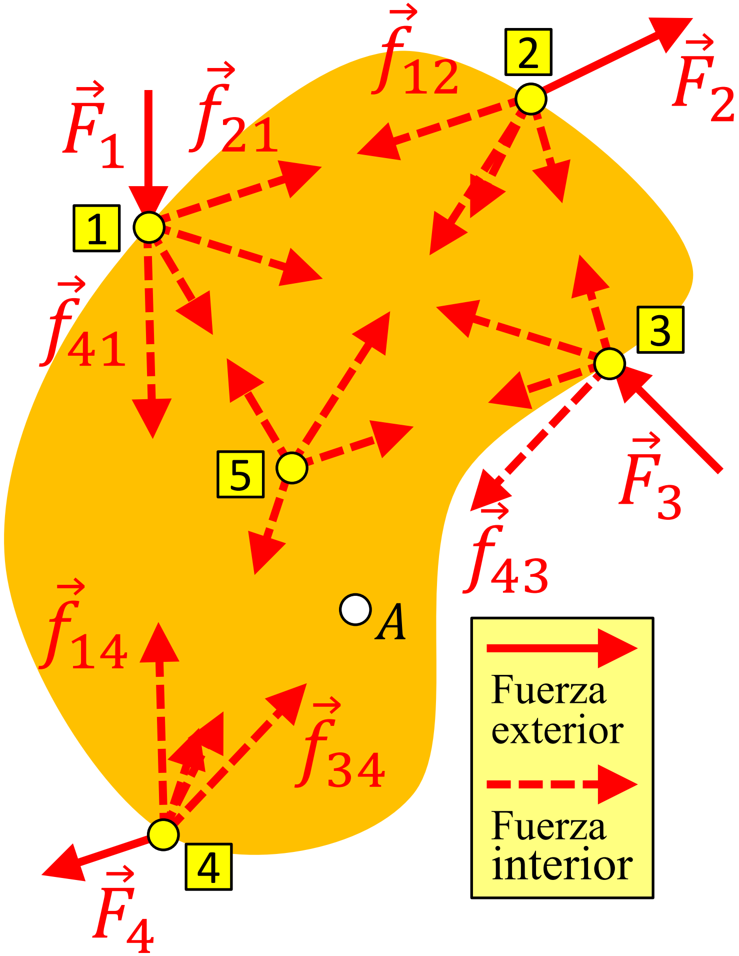
Es $\vec{0}$ por tratarse del producto vectorial de dos vectores paralelos, $\vec{v}_i$ y $m\vec{v}_i$

Es igual a la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ese punto. Por tanto, $d\vec{p}_i/dt = \vec{F}_i + \vec{f}_i$

En consecuencia,

$$\frac{d\vec{L}_{A_i}}{dt} = \vec{0} + \overrightarrow{AP_i} \times \left(\vec{F}_i + \vec{f}_i\right) =$$
$$= \overrightarrow{AP_i} \times \vec{F}_i + \overrightarrow{AP_i} \times \vec{f}_i = \vec{M}_{A_i} + \vec{m}_{A_i}$$

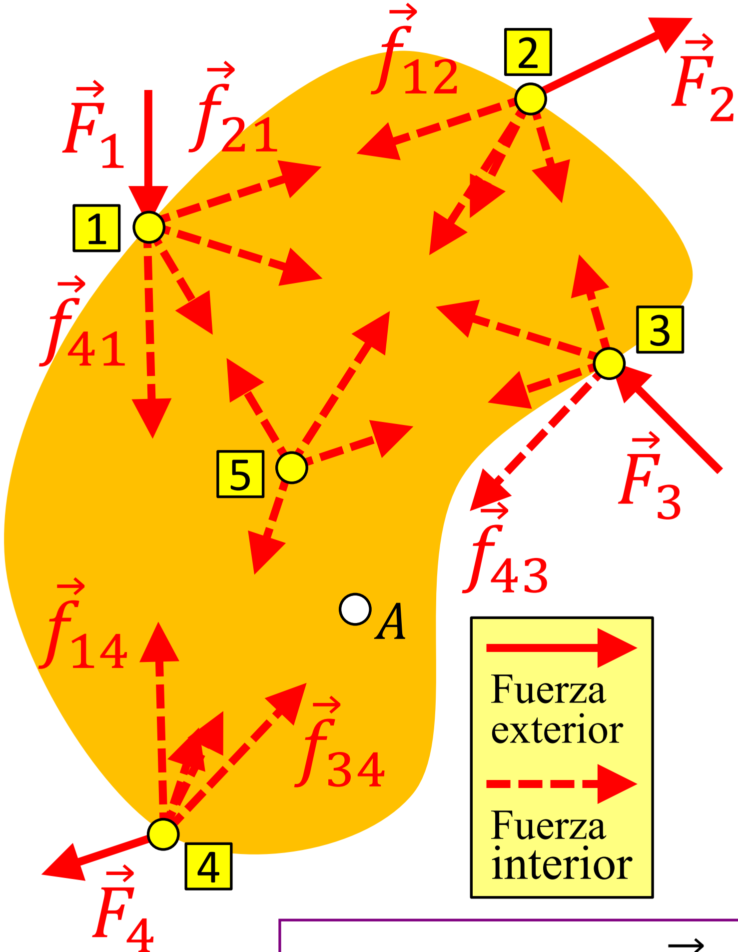
Teorema del momento angular



Se tiene una igualdad de este tipo para cada punto i. Sumándolas todas, resulta

$$\sum \frac{d\vec{L}_{A_i}}{dt} = \sum \vec{M}_{A_i} + \sum \vec{m}_{A_i}$$

Teorema del momento angular



$\sum \vec{M}_{A_i} \longrightarrow$ Es el momento $\vec{M}_A$ de la totalidad de fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema.

$\sum \vec{m}_{A_i} \longrightarrow$ Es el momento $\vec{0}$ de la totalidad de fuerzas interiores que actúan entre puntos del sistema.

¿Y por qué es $\vec{0}$? Porque para cada pareja de puntos $(i;j)$ es $\vec{m}_{A_{ij}} = -\vec{m}_{A_{ji}}$ (es $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ en virtud de la tercera ley de Newton, y además comparten línea de acción).

Teorema del momento angular

Recordando además que $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \frac{d\vec{L}_{A_i}}{dt}$, se concluye que

$$\boxed{\vec{M}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt}}$$

Teorema del momento angular.

El momento, respecto a un punto, de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema de puntos materiales, es igual al ritmo con que varía su momento angular respecto al mismo punto.

Teorema del momento angular

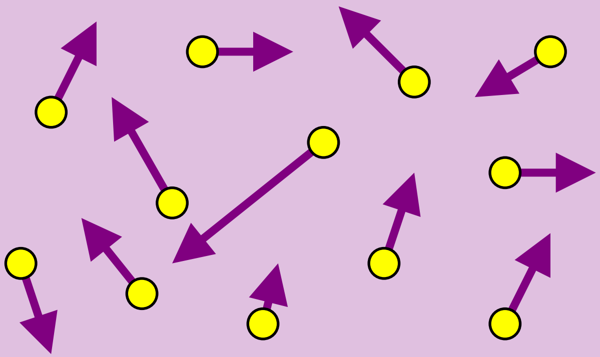
Sea un sistema de puntos materiales sobre el que no actúan fuerzas exteriores (sistema aislado), o aun actuando su momento respecto a un cierto punto A es nulo. En tal caso,

$$\vec{M}_A = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_A \text{ es constante}$$

Teorema de conservación del momento angular.

Si el momento, respecto a un punto, de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema de puntos materiales es cero, el momento angular del sistema respecto al mismo punto permanece constante.

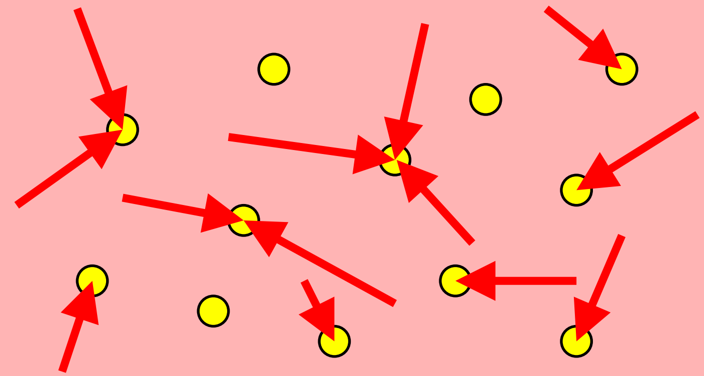
Relación entre momentos lineales y fuerzas



Conjunto de los n momentos lineales $\{\vec{p}_i\}$ de los n puntos materiales de un sistema

Su resultante $\vec{p} = \sum \vec{p}_i$

Su campo de momentos $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$



Conjunto de las N^* fuerzas exteriores $\{\vec{F}_j\}$ que actúan sobre los n puntos materiales de un sistema

Su resultante $\vec{R} = \sum \vec{F}_j$

Su campo de momentos $\vec{M} = \sum \vec{M}_j$

Derivación respecto al tiempo

* N no tiene por qué coincidir con el número n de puntos materiales, ya que en cada uno de estos puede actuar más de una fuerza exterior, o ninguna.

Momento lineal y momento angular

¿Qué es lo que representan estas magnitudes?

- El momento lineal cuantifica el movimiento de traslación del sistema en el instante considerado.
- El campo de momentos angulares cuantifica, para cada punto del espacio, el movimiento de rotación del sistema respecto a ese punto.

Ejercicio 21

Un sistema está constituido por tres puntos materiales, de masas $m_1 = 4$ kg, $m_2 = 3$ kg y $m_3 = 2$ kg. Bajo la acción de sus fuerzas mutuas y de las exteriores, sus respectivos vectores de posición en el SI son $\vec{r}_1 = (2; 5; -3)$, $\vec{r}_2 = (t^2; 2; 3 - 5t)$ y $\vec{r}_3 = (2t; t^3; 2t^2)$. ¿Cuáles son el momento lineal del sistema, y su momento angular respecto al punto $O(0; 0; 0)$ m? ¿Cuál es la resultante del conjunto de fuerzas exteriores que están actuando sobre el sistema, y su momento respecto al punto O?

En primer lugar obtenemos, para cada punto material, su velocidad, momento lineal, y vector que va de O a su posición.

$\vec{v}_1 = d\vec{r}_1/dt = (0; 0; 0)$ (SI)

$\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 = 4(0; 0; 0) = (0; 0; 0)$ (SI)

$\overrightarrow{OP_1} = \vec{r}_1 - (0; 0; 0) = (2; 5; -3)$ (SI)

$\vec{v}_2 = d\vec{r}_2/dt = (2t; 0; -5)$ (SI)

$\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = 3(2t; 0; -5) = (6t; 0; -15)$ (SI)

$\overrightarrow{OP_2} = \vec{r}_2 - (0; 0; 0) = (t^2; 2; 3 - 5t)$ (SI)

$\vec{v}_3 = d\vec{r}_3/dt = (2; 3t^2; 4t)$ (SI)

$\vec{p}_3 = m_3\vec{v}_3 = 2(2; 3t^2; 4t) = (4; 6t^2; 8t)$ (SI)

$\overrightarrow{OP_3} = \vec{r}_3 - (0; 0; 0) = (2t; t^3; 2t^2)$ (SI)

El momento lineal del sistema es

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = (0; 0; 0) + (6t; 0; -15) + (4; 6t^2; 8t) =$$

$$= (6t + 4; 6t^2; -15 + 8t) \text{ (SI)}$$

El momento angular del sistema respecto al punto O es

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{O_1} + \vec{L}_{O_2} + \vec{L}_{O_3} = \overrightarrow{OP_1} \times \vec{p}_1 + \overrightarrow{OP_2} \times \vec{p}_2 + \overrightarrow{OP_3} \times \vec{p}_3 =$$

$$= (2; 5; -3) \times (0; 0; 0) + (t^2; 2; 3 - 5t) \times (6t; 0; -15) +$$
$$+(2t; t^3; 2t^2) \times (4; 6t^2; 8t) =$$

$$= (0; 0; 0) + (-30; 18t - 15t^2; -12t) + (-4t^4; -8t^2; 8t^3) =$$

$$= (-30 - 4t^4; 18t - 23t^2; -12t + 8t^3)\ (\mathrm{SI})$$

La resultante del conjunto de fuerzas exteriores que están actuando sobre el sistema, y su momento respecto al punto O, son:

$$\vec{R} = d\vec{p}/dt = (6; 12t; 8)\ (\mathrm{SI})$$

$$\vec{M}_O = d\vec{L}_O/dt = (-16t^3; 18 - 46t; -12 + 24t^2)\ (\mathrm{SI})$$