

FÍSICA TÉCNICA

Dinámica del sólido rígido

V. 1.00.00

Marcos H. Giménez
Isabel Salinas
Vanesa P. Cuenca
Juan A. Monsoriu



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



ETSI Aeroespacial y Diseño Industrial



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



ETSI Aeroespacial y Diseño Industrial

Créditos

Título:
Física Técnica

Subtítulo:
Dinámica del sólido rígido

Autores:
Marcos H. Giménez, Isabel Salinas, Vanesa P. Cuenca y Juan A. Monsoriu

Editorial:
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial y Diseño Industrial

© De las imágenes y textos: los autores, excepto donde se indique

© De la edición: Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial y Diseño Industrial, UPV Camino de Vera s/n 46022

Valencia 2024

ISBN: 978-84-09-58859-6
Versión digital

Índice

Sólido rígido

I.- Rotación

Rotación de un punto material

Rotación de un sistema

Rotación de un sólido rígido

Fuerzas en un plano perpendicular al eje

Cálculo de momento respecto a un punto

Momento de inercia

Calculo de momentos de inercia

Pulsando sobre el número de una página, se regresa a este índice.

Ejemplos de momentos de inercia

Teorema de Steiner

Teorema de las tres perpendiculares

Radio de giro

Energía cinética

Trabajo de una fuerza en una rotación

Trabajo de las tensiones

Índice (2)

II.- Traslación + rotación

Movimiento de traslación + rotación

Energía cinética

III.- Rodadura

Rueda

Velocidad del punto de contacto

Radio de una rueda

Posibles comportamientos de una rueda

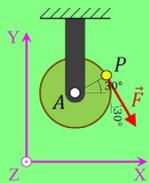
Movimiento de una rueda

Velocidad de los puntos de una rueda

Índice (ejercicios)

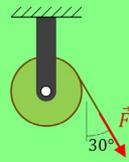
Ejercicio 1

Una polea, con un eje rígido en su centro, tiene 0,15 m de radio. Se tira del punto P indicado con una fuerza \vec{F} de módulo 12 N y la orientación mostrada en la figura. ¿Cuál es el momento de \vec{F} respecto al eje de giro, expresado en base al sistema de referencia dextrógiro* incluido en la figura?



Ejercicio 2

Una polea, con un eje rígido en su centro, tiene 3 kg de masa, 0,15 m de radio, y $0,04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto a dicho eje. La polea tiene arrollada una cuerda ideal. Partiendo del reposo, se tira del extremo libre de esa cuerda con una fuerza \vec{F} de módulo 12 N y la orientación mostrada en la figura. Aplicando el teorema del centro de masas y momentos, obténgase: el módulo de la aceleración angular de la polea; la fuerza que realiza el eje; el módulo de la velocidad angular de la polea tras dar dos vueltas.



Ejercicio 3

Una polea, con un eje rígido en su centro, tiene 3 kg de masa, 0,2 m de radio, y $0,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto a dicho eje. La polea tiene arrollada una cuerda ideal de cuyo extremo cuelga un bloque de 10 kg. El sistema parte del reposo. Aplicando el teorema del centro de masas y momentos, obténgase: los módulos de la aceleración del bloque, de la aceleración angular de la polea, y de la tensión en la cuerda; la fuerza que realiza el eje; el módulo de la velocidad del bloque tras descender 2 m.



Ejercicio 4

Determinése el momento de inercia de un alambre homogéneo muy fino, de masa m , respecto a un eje paralelo situado a una distancia d .

Ejercicio 5

Determinése el momento de inercia de un anillo homogéneo muy fino, de masa m y radio R , respecto al eje de simetría perpendicular a su plano.

Ejercicio 6

Determinése el momento de inercia de un rectángulo homogéneo, de masa m y lados de longitud a y b , respecto al eje de simetría paralelo al segundo de esos lados.

Ejercicio 7

Determinése el momento de inercia de un rectángulo homogéneo, de masa m y dimensiones a y b , respecto a un eje que recorre uno de los lados de longitud b .

Ejercicio 8

Determinése el momento de inercia de un disco homogéneo muy fino, de masa m y radio R , respecto al eje de simetría perpendicular a su plano.

Ejercicio 9

Determinése el momento de inercia de un rectángulo homogéneo, de masa m y dimensiones a y b , respecto a un eje que recorre uno de los lados de longitud b . Para ello, utilícese el teorema de Steiner a partir del eje paralelo que pasa por el centro de masas del rectángulo.

Ejercicio 10

Determinése el momento de inercia de un rectángulo homogéneo, de masa m y dimensiones a y b , respecto al eje perpendicular que pasa por su centro de masas.

Ejercicio 11

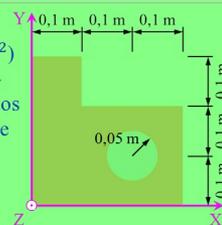
Determinése el momento de inercia de un anillo homogéneo muy fino, de masa m y radio R , respecto un eje diametral.

Ejercicio 12

Determinése el momento de inercia de un disco homogéneo muy fino, de masa m y radio R , respecto un eje diametral.

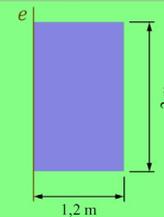
Ejercicio 13

Una placa (densidad superficial 15 kg/m^2) tiene la forma y dimensiones que se muestran en la figura. Determinése sus momentos de inercia respecto a los ejes del sistema de referencia indicado.



Ejercicio 14

Una puerta, prácticamente plana, de 20 kg de masa, tiene las dimensiones y el eje de giro que se muestran en la figura. ¿Cuál es su energía cinética en el instante en que el módulo de su velocidad angular es de 3 rad/s?



Ejercicio 15

Una polea, con un eje rígido en su centro, tiene 3 kg de masa, 0,2 m de radio, y $0,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto a dicho eje. La polea tiene arrollada una cuerda ideal de cuyo extremo cuelga un bloque de 10 kg. El sistema parte del reposo. Utilizando el teorema de la energía cinética, obténgase el módulo de la tensión en la cuerda, así como el módulo de la velocidad del bloque tras descender 2 m.



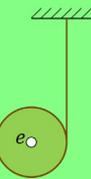
Ejercicio 16

En un instante dado, una barra delgada, de 2 kg de masa y 0,6 m de longitud, se encuentra horizontalmente en el aire. Mediante una cuerda sujeta a uno de sus extremos, se tira con una fuerza \vec{F} de módulo 20 N y la orientación indicada en la figura. Obténgase la aceleración angular y la del centro de masas de la barra en ese instante, expresadas en el sistema de referencia de la figura.



Ejercicio 17

Una polea, con su eje e libre, tiene 3 kg de masa, 0,2 m de radio, y $0,048 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto a dicho eje. La polea tiene arrollada una cuerda ideal cuyo extremo libre está unido al techo. El sistema parte del reposo. Aplicando el teorema del centro de masas y momentos, obténgase: los módulos de la aceleración del eje de la polea, de la aceleración angular, y de la tensión en la cuerda; el módulo de la velocidad del eje tras descender 0,56 m.



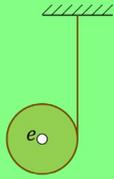
Índice (ejercicios 2)

Ejercicio 18

Un balón de baloncesto, que admitiremos que es una esfera hueca, tiene 0,6 kg de masa y 0,12 m de radio. ¿Cuál es su energía cinética en el instante en que los módulos de su velocidad angular y de la velocidad de su centro de masas son 20 rad/s y 6 m/s, respectivamente?

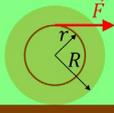
Ejercicio 19

Una polea, con su eje e libre, tiene 3 kg de masa, 0,2 m de radio, y $0,048 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto a dicho eje. La polea tiene arrollada una cuerda ideal cuyo extremo libre está unido al techo. El sistema parte del reposo. Aplicando el teorema de la energía cinética, obténgase el módulo de la velocidad del eje tras descender 0,56 m.



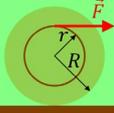
Ejercicio 20

El carrete de la figura tiene 4 kg de masa, $0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto al correspondiente eje que pasa por su centro de masas, y sus radios son $R = 0,5 \text{ m}$ y r . La fuerza horizontal que tira de él tiene módulo $F = 7 \text{ N}$. El coeficiente de rozamiento con el suelo es μ . Obténgase los módulos y sentidos de la aceleración del eje del carrete, de la aceleración angular, y de la fuerza de rozamiento, si $r = 0,3 \text{ m}$ y $\mu = 0,2$.



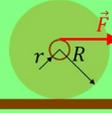
Ejercicio 21

El carrete de la figura tiene 4 kg de masa, $0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto al correspondiente eje que pasa por su centro de masas, y sus radios son $R = 0,5 \text{ m}$ y r . La fuerza horizontal que tira de él tiene módulo $F = 7 \text{ N}$. El coeficiente de rozamiento con el suelo es μ . Obténgase los módulos y sentidos de la aceleración del eje del carrete, de la aceleración angular, y de la fuerza de rozamiento, si $r = 0,3 \text{ m}$ y $\mu = 0,02$.



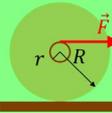
Ejercicio 22

El carrete de la figura tiene 4 kg de masa, $0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto al correspondiente eje que pasa por su centro de masas, y sus radios son $R = 0,5 \text{ m}$ y r . La fuerza horizontal que tira de él tiene módulo $F = 7 \text{ N}$. El coeficiente de rozamiento con el suelo es μ . Obténgase los módulos y sentidos de la aceleración del eje del carrete, de la aceleración angular, y de la fuerza de rozamiento, si $r = 0,1 \text{ m}$ y $\mu = 0,2$.



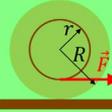
Ejercicio 23

El carrete de la figura tiene 4 kg de masa, $0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto al correspondiente eje que pasa por su centro de masas, y sus radios son $R = 0,5 \text{ m}$ y r . La fuerza horizontal que tira de él tiene módulo $F = 7 \text{ N}$. El coeficiente de rozamiento con el suelo es μ . Obténgase los módulos y sentidos de la aceleración del eje del carrete, de la aceleración angular, y de la fuerza de rozamiento, si $r = 0,1 \text{ m}$ y $\mu = 0,02$.



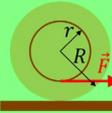
Ejercicio 24

El carrete de la figura tiene 4 kg de masa, $0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto al correspondiente eje que pasa por su centro de masas, y sus radios son $R = 0,5 \text{ m}$ y $r = 0,3 \text{ m}$. La fuerza horizontal que tira de él tiene módulo $F = 7 \text{ N}$. El coeficiente de rozamiento con el suelo es μ . Obténgase los módulos y sentidos de la aceleración del eje del carrete, de la aceleración angular, y de la fuerza de rozamiento, si $\mu = 0,2$.



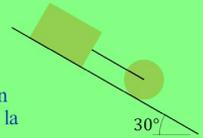
Ejercicio 25

El carrete de la figura tiene 4 kg de masa, $0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto al correspondiente eje que pasa por su centro de masas, y sus radios son $R = 0,5 \text{ m}$ y $r = 0,3 \text{ m}$. La fuerza horizontal que tira de él tiene módulo $F = 7 \text{ N}$. El coeficiente de rozamiento con el suelo es μ . Obténgase los módulos y sentidos de la aceleración del eje del carrete, de la aceleración angular, y de la fuerza de rozamiento, si $\mu = 0,02$.



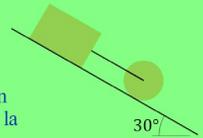
Ejercicio 26

Un bloque de 2 kg de masa está unido, mediante una cuerda ideal, al eje de un cilindro de 2 kg y 20 cm de radio, tal y como indica la figura. Ambos se mueven sobre un plano inclinado 30° respecto a la horizontal. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,4, y el cilindro gira sin deslizarse. Aplicando el teorema del centro de masas y momentos, obténgase el módulo de la tensión en la cuerda que une ambos cuerpos, y el módulo de la velocidad del bloque cuando, tras partir del reposo, ha recorrido 1 m sobre el plano inclinado. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento mínimo que debe existir entre el suelo y el cilindro para que, efectivamente, este ruede sin deslizarse?



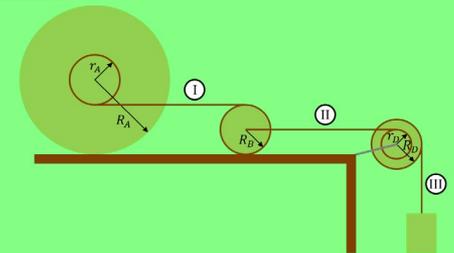
Ejercicio 27

Un bloque de 2 kg de masa está unido, mediante una cuerda ideal, al eje de un cilindro de 2 kg y 20 cm de radio, tal y como indica la figura. Ambos se mueven sobre un plano inclinado 30° respecto a la horizontal. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,4, y el cilindro gira sin deslizarse. Aplicando el teorema de la energía cinética, obténgase el módulo de la tensión en la cuerda que une ambos cuerpos, y el módulo de la velocidad del bloque cuando, tras partir del reposo, ha recorrido 1 m sobre el plano inclinado.



Ejercicio 28

Sea el sistema de la figura, constituido por un carrete A ($R_A = 0,6 \text{ m}$; $r_A = 0,2 \text{ m}$), una esfera B ($R_B = 0,2 \text{ m}$), una polea de doble garganta D ($R_D = 0,2 \text{ m}$; $r_D = 0,12 \text{ m}$) y un bloque E. Las aceleraciones angulares y de centros de masas de estos cuerpos son \vec{a}_{CA} , \vec{a}_A , \vec{a}_{CB} , \vec{a}_B , \vec{a}_D y \vec{a}_{CE} . Se pide escribir las relaciones de aceleraciones debidas a las cuerdas ideales I, II y III.



Sólido rígido

Se denomina **sólido rígido** a un sistema de puntos materiales cuyas distancias mutuas permanecen constantes.

En otras palabras, se trata de un sistema indeformable o que, al menos, no se deforma.

Todos los conceptos y leyes ya introducidos para sistemas de puntos materiales, son aplicables al sólido rígido.

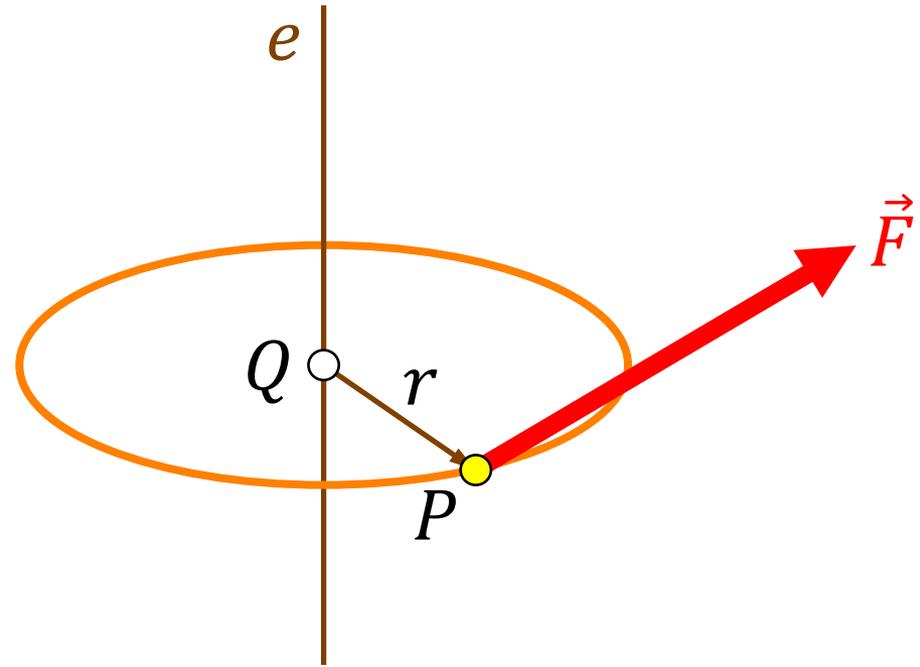
Sin embargo, al tratarse de un caso particular, algunos de estos conceptos y leyes pueden expresarse de una forma más simple. Hacerlo es el objetivo del presente tema.

El denominado momento de inercia, que se introducirá en este tema, es clave para estas expresiones más simples.

I.- Rotación

Rotación de un punto material

Sea un punto material P de masa m que, por la acción de una fuerza \vec{F} , gira alrededor de un eje e , describiendo una trayectoria circular de centro en Q y radio r .



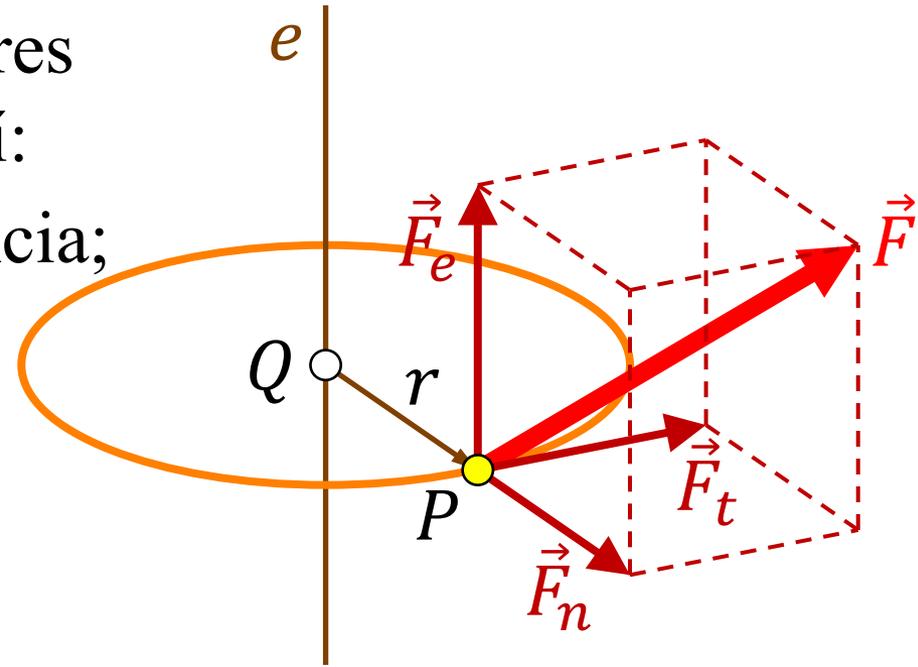
Nótese que:

- el plano de la trayectoria es perpendicular al eje;
- el centro de la trayectoria es el punto del eje más próximo al punto material;
- el radio de la trayectoria es la distancia del punto material al eje.

Rotación de un punto material

Se puede descomponer \vec{F} en tres partes perpendiculares entre sí:

- \vec{F}_t , tangente a la circunferencia;
- \vec{F}_n , en la dirección normal dada por su radio;
- \vec{F}_e , paralela al eje de giro.



Así,

$$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n + \vec{F}_e$$

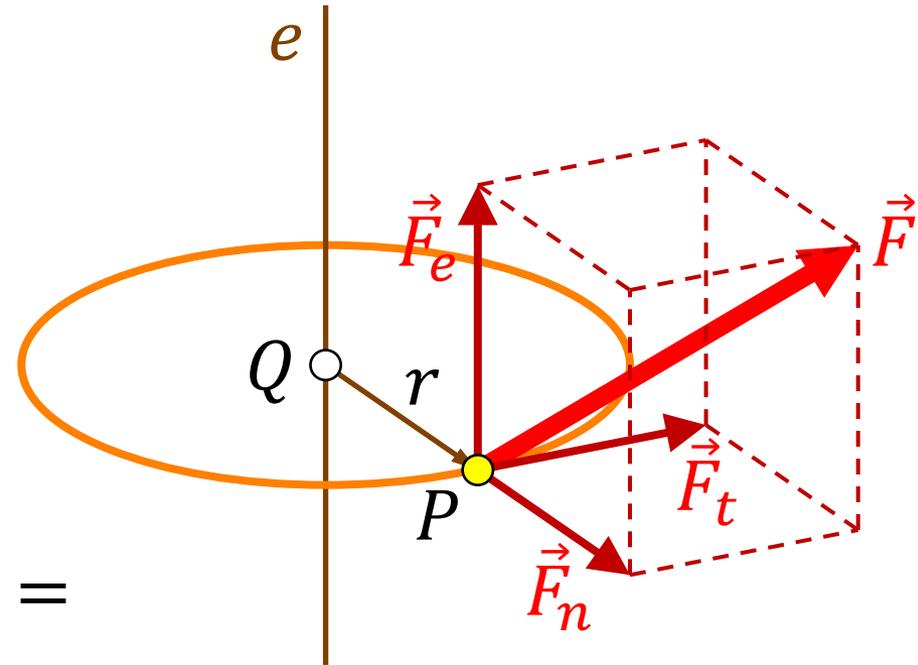
Rotación de un punto material

El momento de \vec{F} respecto al punto Q es

$$\vec{M}_Q = \overrightarrow{QP} \times \vec{F}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\vec{M}_Q &= \overrightarrow{QP} \times (\vec{F}_t + \vec{F}_n + \vec{F}_e) = \\ &= \overrightarrow{QP} \times \vec{F}_t + \overrightarrow{QP} \times \vec{F}_n + \overrightarrow{QP} \times \vec{F}_e = \\ &= \overrightarrow{QP} \times \vec{F}_t + \overrightarrow{QP} \times \vec{F}_e\end{aligned}$$



Es $\vec{0}$ porque $\overrightarrow{QP} \parallel \vec{F}_n$.

Rotación de un punto material

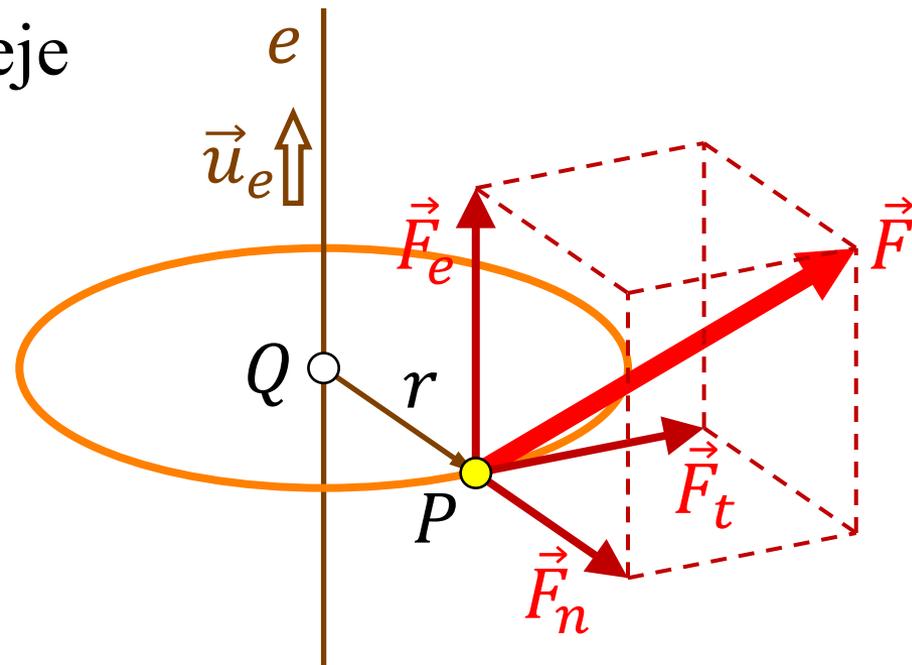
Sea \vec{u}_e un vector unitario del eje de giro e .

El momento de \vec{F} respecto al eje de giro es

$$\vec{M}_e = (\vec{M}_Q \cdot \vec{u}_e) \vec{u}_e$$

Su módulo es

$$\begin{aligned} M_e &= |\vec{M}_Q \cdot \vec{u}_e| = |(\overrightarrow{QP} \times \vec{F}_t + \overrightarrow{QP} \times \vec{F}_e) \cdot \vec{u}_e| = \\ &= |(\overrightarrow{QP} \times \vec{F}_t) \cdot \vec{u}_e + (\overrightarrow{QP} \times \vec{F}_e) \cdot \vec{u}_e| = \\ &= |(\overrightarrow{QP} \times \vec{F}_t) \cdot \vec{u}_e| \end{aligned}$$



Es 0 porque $\vec{F}_e \parallel \vec{u}_e$, y por tanto se trata del producto mixto de tres vectores coplanarios.

Rotación de un punto material

Los vectores \overrightarrow{QP} , \vec{F}_t y \vec{u}_e son perpendiculares entre sí, por lo que el valor absoluto de su producto mixto es igual al producto de sus módulos.

Así,

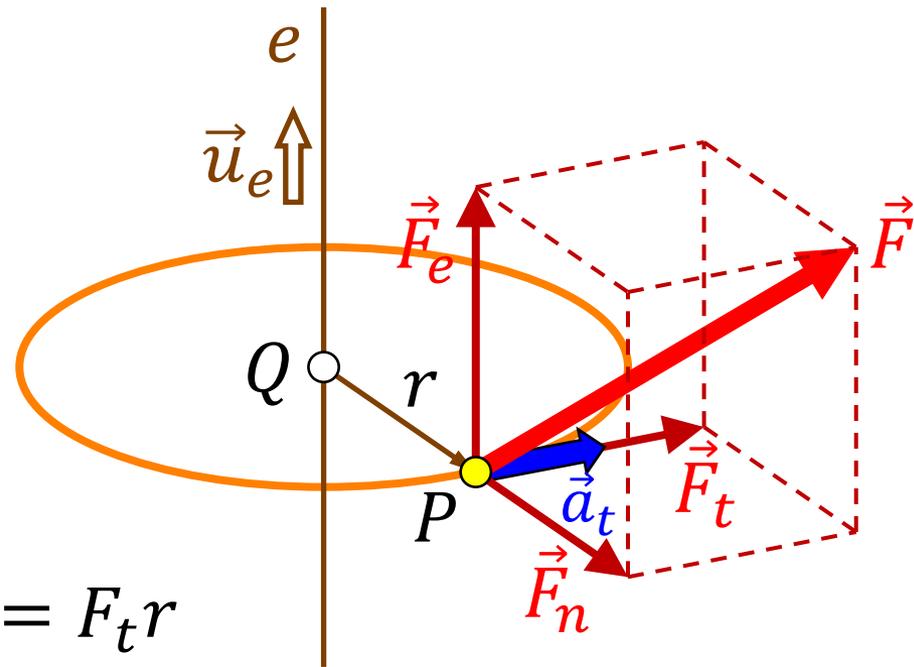
$$M_e = |\overrightarrow{QP}| |\vec{F}_t| |\vec{u}_e| = r F_t 1 = F_t r$$

Sean \vec{a} la aceleración del punto P , \vec{a}_t su aceleración tangencial, y $\vec{\alpha}$ su aceleración angular.

Aplicando la segunda ley de Newton se tiene que:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F_t = ma_t = m\alpha r$$

$$M_e = (m\alpha r)r = (mr^2)\alpha$$



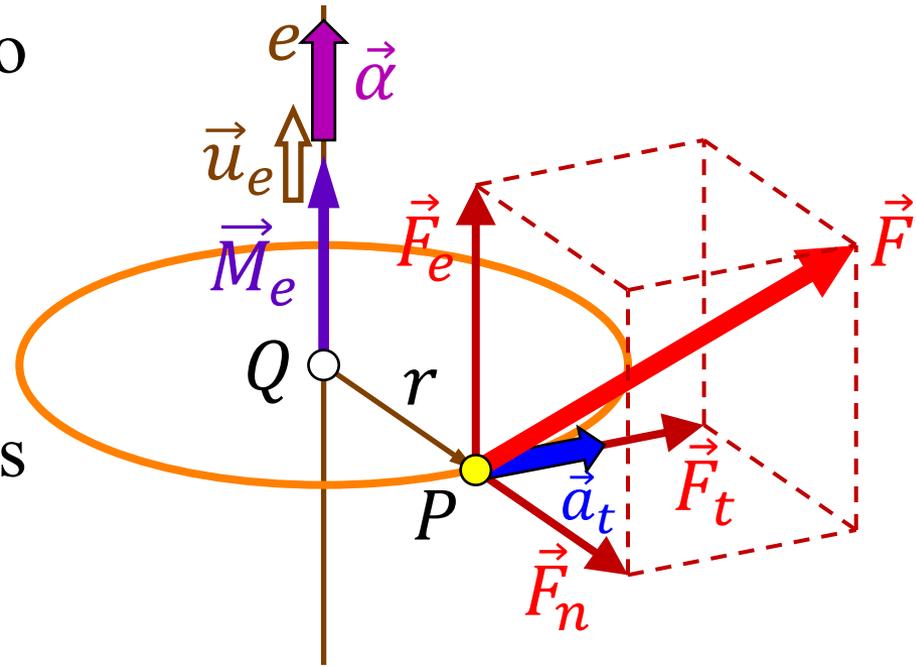
Rotación de un punto material

Tanto el momento \vec{M}_e respecto al eje, como la aceleración angular $\vec{\alpha}$, tienen la dirección del eje de giro.

Puede comprobarse que ambos vectores tienen también el mismo sentido.

Por tanto,

$$\vec{M}_e = (mr^2)\vec{\alpha}$$



Rotación de un punto material

De acuerdo con la segunda ley de Newton, la relación entre fuerza \vec{F} y aceleración \vec{a} de un punto material es la masa m .

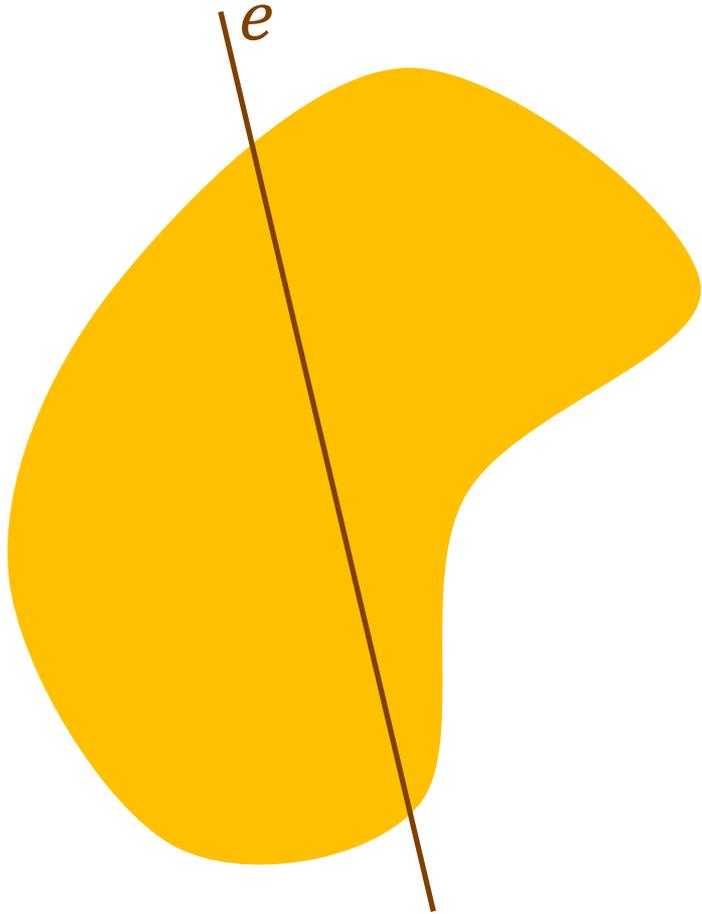
Para un punto material en rotación alrededor de un eje existe una relación análoga, en este caso entre momento \vec{M}_e respecto a dicho eje, y aceleración angular $\vec{\alpha}$.

Dicha relación, $I = mr^2$, recibe el nombre de **momento de inercia** del punto material respecto al eje.

Por tanto, para un punto material en rotación alrededor de un eje es

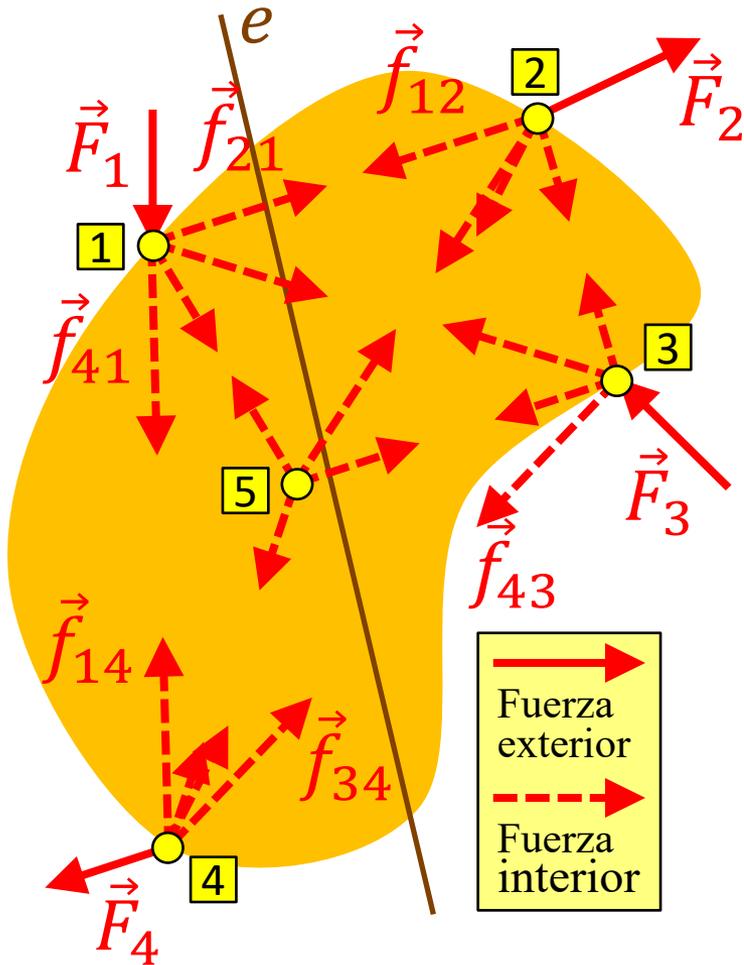
$$\vec{M}_e = I\vec{\alpha}$$

Rotación de un sistema



¿Y qué ocurre cuando se tiene un sistema de puntos materiales en rotación alrededor de un eje?

Rotación de un sistema



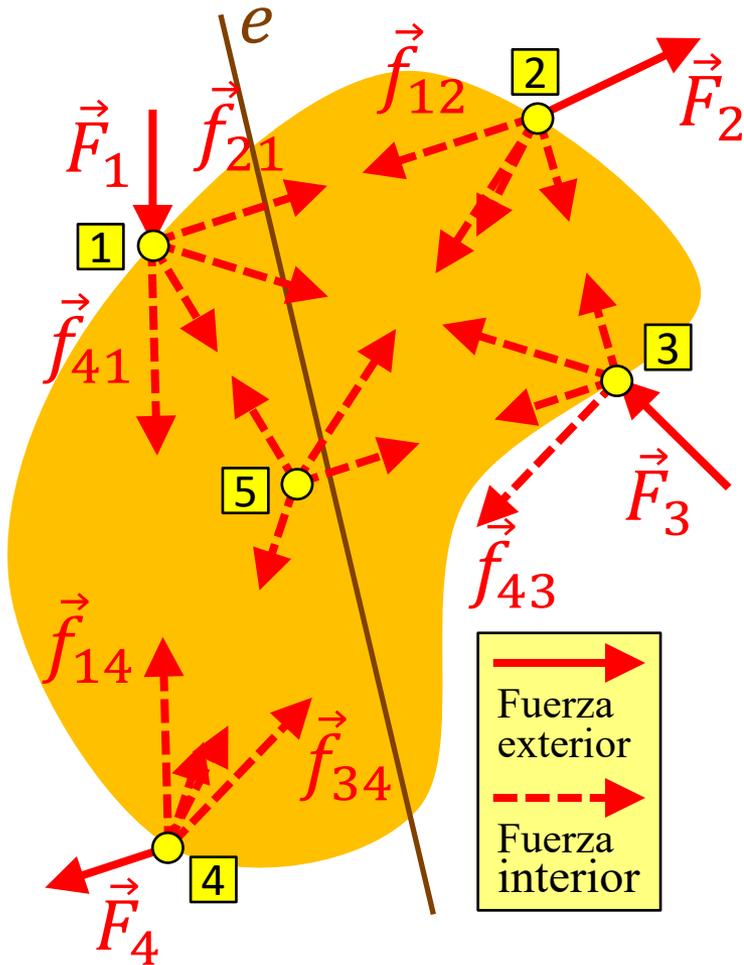
Notación

\vec{F}_i : fuerza neta exterior que actúa sobre el punto i .

\vec{f}_{ji} : fuerza interior ejercida por el punto j sobre el i .

Por claridad, la figura solo muestra algunas fuerzas exteriores y parejas de interiores. En realidad hay que tener en cuenta todos los puntos del sistema, las fuerzas que actúan sobre ellos, y las que se ejercen mutuamente. Basta considerar $\vec{0}$ aquellas fuerzas que no estén realmente presentes.

Rotación de un sistema



Notación (2)

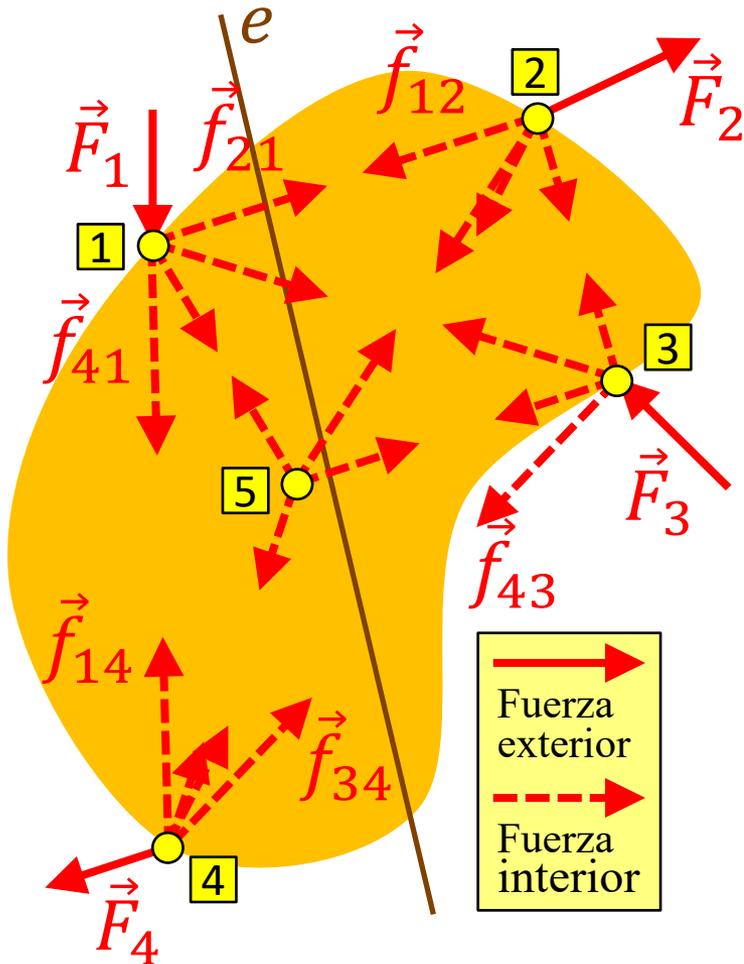
\vec{M}_{e_i} : momento, respecto al eje, de la fuerza neta exterior \vec{F}_i que actúa sobre el punto i .

$\vec{m}_{e_{ji}}$: momento, respecto al eje, de la fuerza interior \vec{f}_{ji} ejercida por el punto j sobre el i .

\vec{m}_{e_i} : momento, respecto al eje, de la totalidad de fuerzas interiores ejercidas sobre el punto i .

Es
$$\vec{m}_{e_i} = \vec{m}_{e_{1i}} + \vec{m}_{e_{2i}} + \dots$$

Rotación de un sistema



Aplicando la relación $\vec{M}_e = I\vec{\alpha}$ al punto material i se tiene que

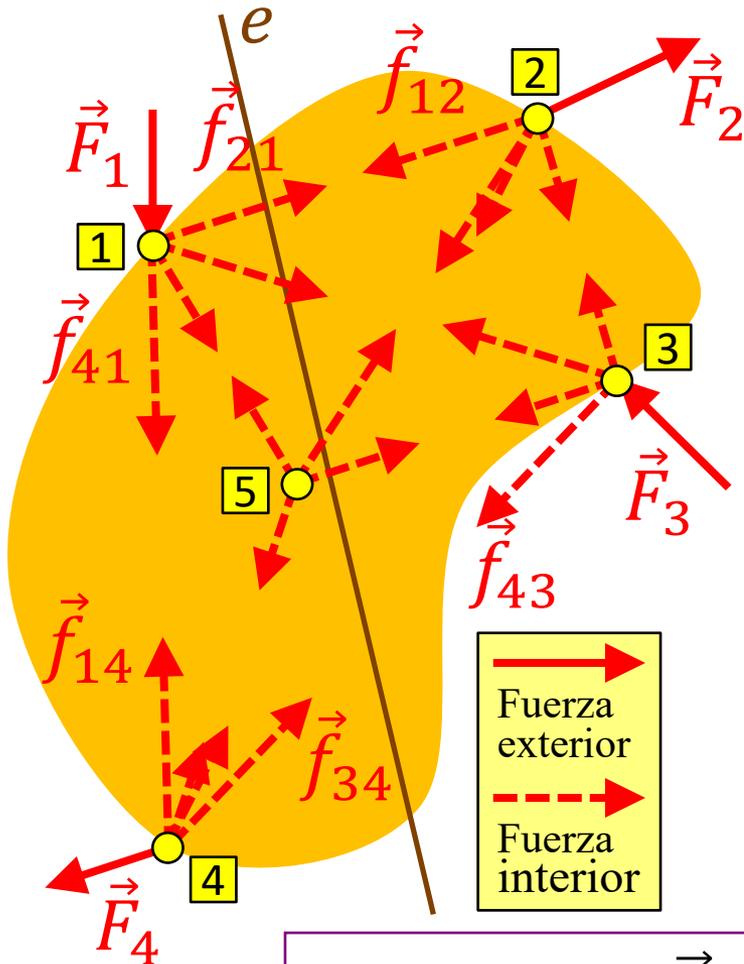
$$\vec{M}_{e_i} + \vec{m}_{e_i} = I_i\vec{\alpha}_i$$

Aquí, I_i y $\vec{\alpha}_i$ son el momento de inercia y la aceleración angular, respectivamente, del punto i .

Se tiene una igualdad de este tipo para cada punto i . Sumándolas todas resulta

$$\sum \vec{M}_{e_i} + \sum \vec{m}_{e_i} = \sum I_i\vec{\alpha}_i$$

Rotación de un sistema



$\sum \vec{M}_{ei} \rightarrow$ Es el momento \vec{M}_e de la totalidad de fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema.

$\sum \vec{m}_{ei} \rightarrow$ Es el momento $\vec{0}$ de la totalidad de fuerzas interiores que actúan entre puntos del sistema.

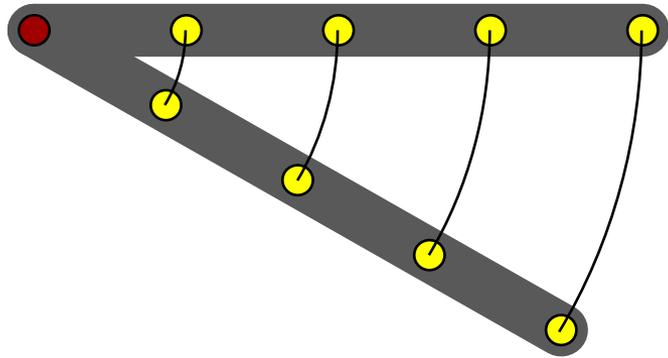
¿Y por qué es $\vec{0}$? Porque para cada pareja de puntos $(i; j)$ es $\vec{m}_{eij} = -\vec{m}_{eji}$ (es $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ en virtud de la tercera ley de Newton, y además comparten línea de acción).

Rotación de un sistema

Recapitulando, a partir de la segunda y tercera leyes de Newton, hemos obtenido que

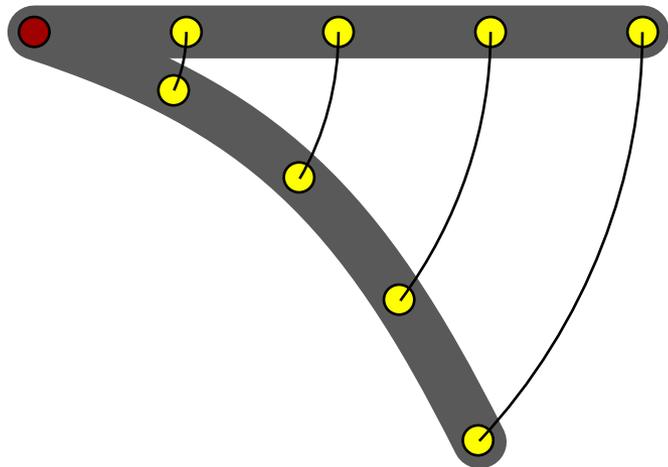
$$\vec{M}_e = \sum (I_i \vec{\alpha}_i)$$

Rotación de un sólido rígido



En un sólido rígido en rotación, los puntos tienen desplazamientos diferentes, y por tanto velocidades y aceleraciones diferentes.

En cambio, los ángulos girados son idénticos, y por tanto la velocidad angular y la aceleración angular son únicas.



Si los puntos giraran ángulos diferentes, el cuerpo se deformaría. Esto no es posible si se trata de un sólido rígido.

Rotación de un sólido rígido

Puesto que todos los puntos materiales de un sólido rígido tienen la misma aceleración angular $\vec{\alpha}$, resulta

$$\vec{M}_e = \sum (I_i \vec{\alpha}) = \left(\sum I_i \right) \vec{\alpha}$$

En consecuencia, para un sólido rígido en rotación alrededor de un eje existe una relación entre momento \vec{M}_e , respecto a dicho eje, del conjunto de fuerzas exteriores, y aceleración angular $\vec{\alpha}$.

Dicha relación, $I = \sum I_i$, recibe el nombre de **momento de inercia** del sólido rígido respecto al eje.

Rotación de un sólido rígido

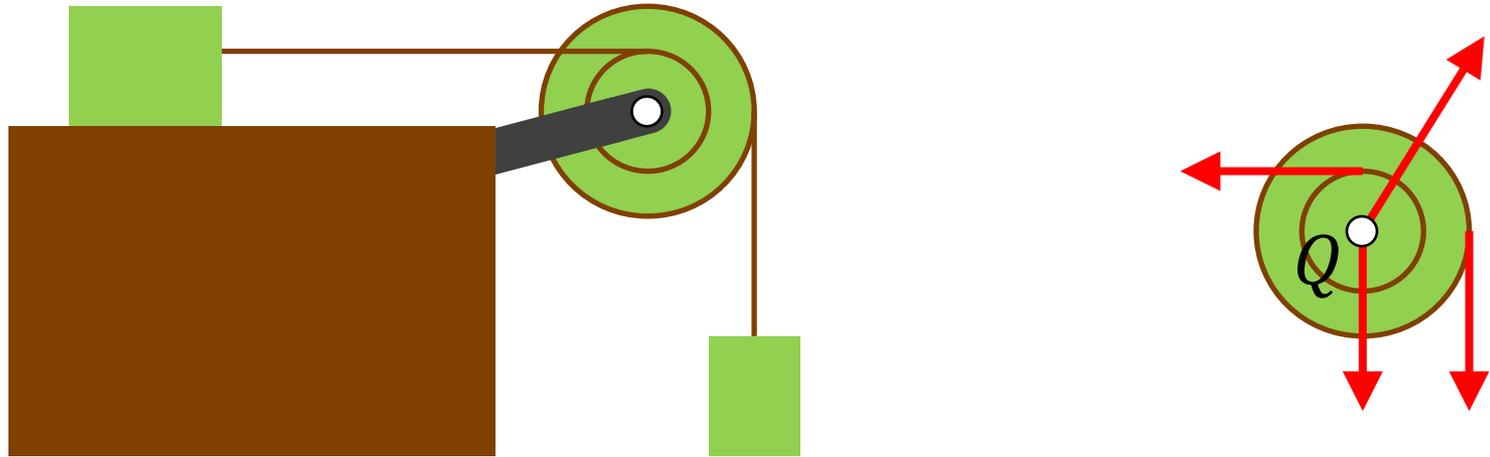
En conclusión,

$$\vec{M}_e = I \vec{\alpha}$$

Esta expresión recibe el nombre de **ecuación fundamental de la Dinámica de rotación**.

Conviene resaltar que el momento de inercia no es una propiedad característica de un sólido rígido, ya que no depende tan solo de su distribución de masas, sino también del eje respecto al que gira.

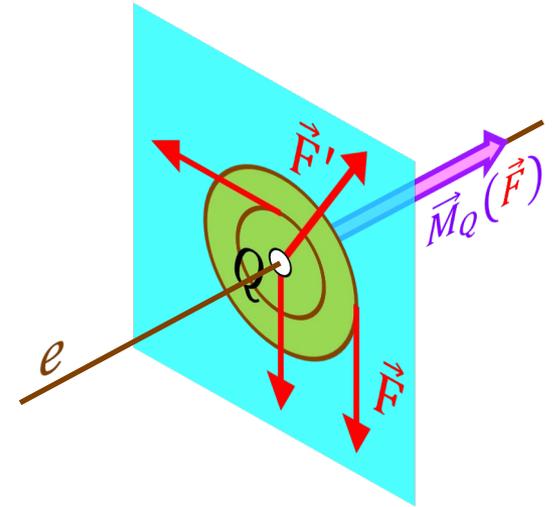
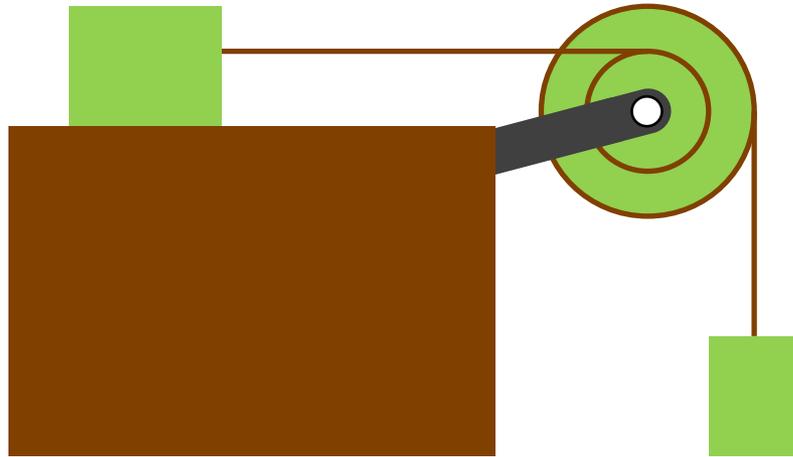
Fuerzas en plano perpendicular al eje



Sea una situación como la mostrada en la figura, en la que se puede considerar que todas las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido (la polea en el ejemplo) se encuentran situadas en un mismo plano, perpendicular al eje de giro.

Sea el punto Q en que el eje interseca a dicho plano.

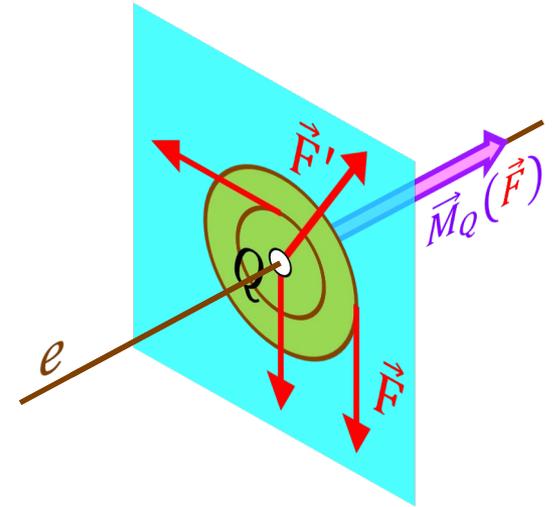
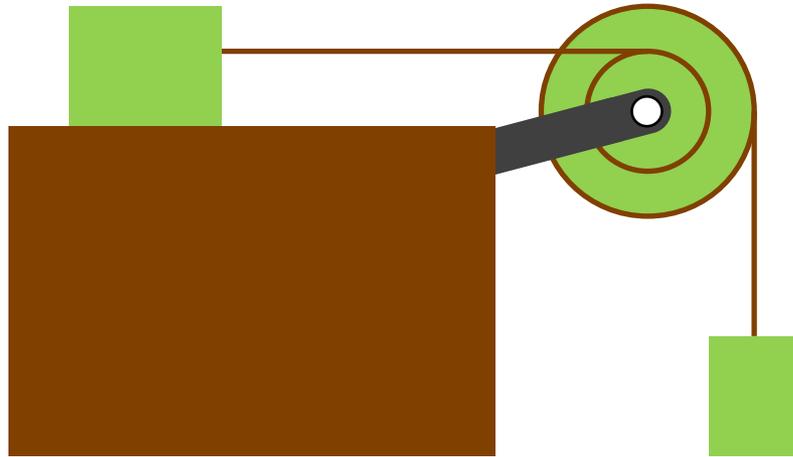
Fuerzas en plano perpendicular al eje



El momento de un vector respecto a un punto, por su definición, es perpendicular al plano definido por la línea de acción de ese vector y dicho punto.

Por tanto, en el caso analizado, todos los momentos respecto a Q tienen la dirección del eje de giro (como el de \vec{F}), o son $\vec{0}$ (como el de \vec{F}').

Fuerzas en plano perpendicular al eje



En consecuencia, los momentos \vec{M}_e respecto al eje (las proyecciones de los \vec{M}_Q) son iguales a los momentos respecto al punto Q .

$$\vec{M}_e = \vec{M}_Q$$

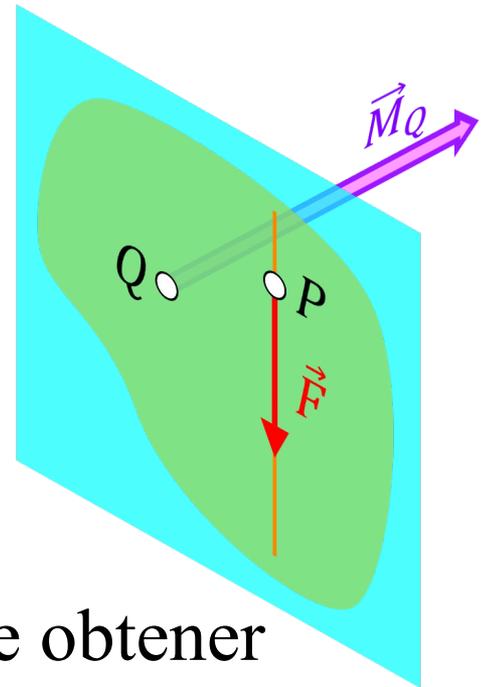
Hay que insistir en que esta igualdad (que será utilizada en los ejercicios de este documento) solo es cierta en el caso particular estudiado: las fuerzas se encuentran situadas en un mismo plano, perpendicular al eje de giro.

Cálculo de momento respecto a un punto

Sea una fuerza \vec{F} cuya línea de acción pasa por un punto P . El momento de \vec{F} respecto a un punto Q puede ser obtenido analíticamente a partir de su definición,

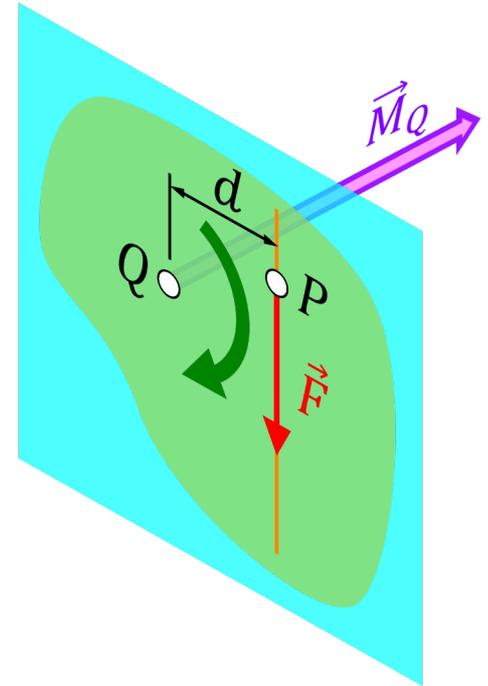
$$\vec{M}_Q = \overrightarrow{QP} \times \vec{F}$$

Recordemos que, como alternativa, se puede obtener su módulo, dirección y sentido mediante el método, más geométrico, que se describe a continuación.



Cálculo de momento respecto a un punto

- Módulo: producto del módulo de \vec{F} por su brazo d respecto a Q ; $M_Q = Fd$.
- Dirección: perpendicular al plano definido por la línea de acción de \vec{F} y por Q .
- Sentido: el que corresponde, aplicando la regla de Maxwell, a cómo \vec{F} hace girar al sólido alrededor de Q .

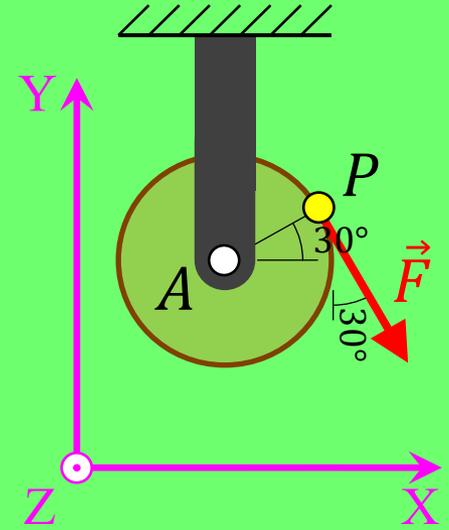


En el próximo ejercicio se muestra cómo aplicar, tanto un método, como el otro. En el resto del documento utilizaremos preferentemente el geométrico.

Recordemos, una vez más, que si el eje e pasa por Q y es perpendicular al plano de la figura, es $\vec{M}_e = \vec{M}_Q$.

Ejercicio 1

Una polea, con un eje rígido en su centro, tiene 0,15 m de radio. Se tira del punto P indicado con una fuerza \vec{F} de módulo 12 N y la orientación mostrada en la figura. ¿Cuál es el momento de \vec{F} respecto al eje de giro, expresado en base al sistema de referencia dextrógiro* incluido en la figura?



La fuerza se encuentra en el plano de esta página, que es perpendicular al eje de giro de la polea.

Por tanto, el momento \vec{M}_e respecto al eje es igual al momento \vec{M}_A respecto al punto A , en el que dicho eje interseca al plano de la página.

* El eje Z se dirige hacia el lector. Recordemos que, con carácter general, algo perpendicular a una página se representa por \cdot si se dirige hacia fuera, y por \times si lo hace hacia dentro.

Método analítico

El radio de la polea es 0,15 m, de modo que

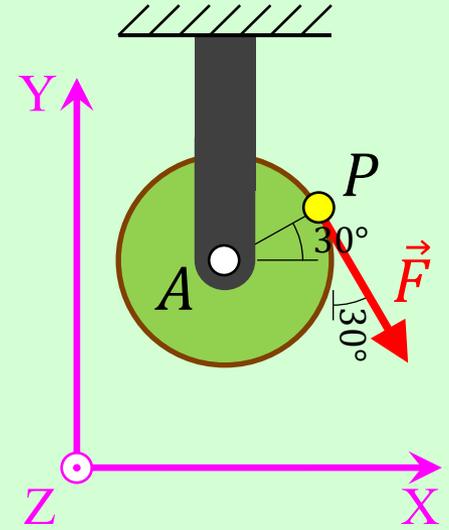
$$\begin{aligned}\vec{AP} &= (0,15 \cos 30^\circ; 0,15 \sin 30^\circ; 0) = \\ &= (0,1299; 0,075; 0) \text{ m}\end{aligned}$$

El módulo de la fuerza es 12 N, resultando

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (12 \sin 30^\circ; -12 \cos 30^\circ; 0) = \\ &= (6; -10,392; 0) \text{ N}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\vec{M}_e &= \vec{M}_A = \vec{AP} \times \vec{F} = (0,1299; 0,075; 0) \times (6; -10,392; 0) = \\ &= (0; 0; -1,800) \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$



Método geométrico

El brazo de la fuerza (módulo 12 N) respecto al punto A es igual al radio de la polea (0,15 m).

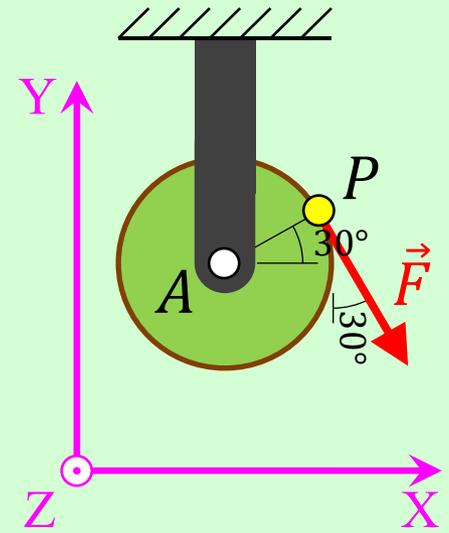
Por tanto, el módulo de \vec{M}_A es

$$M_A = 12 \times 0,15 = 1,8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

El plano definido por la línea de acción de \vec{F} y el punto A , es el de esta página. Por tanto, \vec{M}_A tiene la dirección perpendicular, la del eje Z . Así, las componentes X e Y serán 0.

\vec{F} , de actuar sola, haría girar la polea en sentido horario alrededor del punto A . Aplicando la regla de Maxwell, a este sentido le corresponde un momento hacia dentro del plano de la página, esto es, contrario al del eje Z utilizado.

$$\text{Por tanto, } \vec{M}_e = \vec{M}_A = (0; 0; -1,8) \text{ N} \cdot \text{m}$$



Momento de inercia

A lo largo del desarrollo hemos obtenido dos resultados fundamentales.

- El momento de inercia de un punto material respecto a un eje es igual al producto de su masa por el cuadrado de su distancia a dicho eje.

$$I = mr^2$$

- El momento de inercia de un sólido rígido respecto a un eje es la suma de los de los puntos materiales que lo constituyen.

$$I = \sum I_i = \sum m_i r_i^2$$

Momento de inercia

De acuerdo con su definición, el momento de inercia es una magnitud escalar, y su producto dimensional es

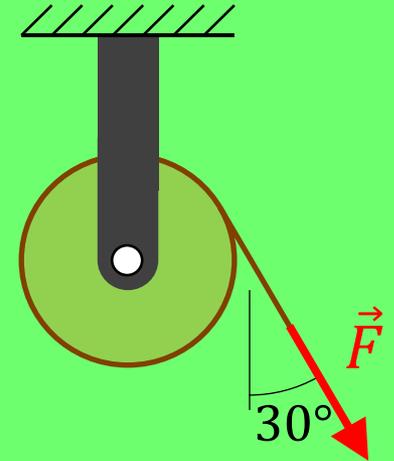
$$\dim I = L^2 M$$

La unidad SI coherente del momento de inercia es el $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

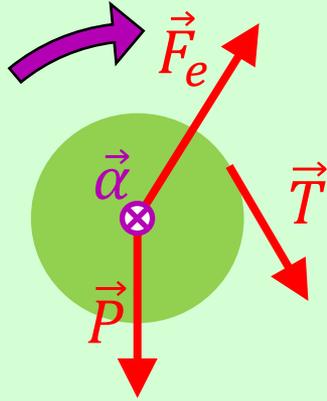
La definición de momento de inercia es de tipo geométrico, pero interviniendo los valores de las masas. Junto con otros conceptos del mismo tipo, como el de centro de masas, constituyen la denominada **geometría de masas**.

Ejercicio 2

Una polea, con un eje rígido en su centro, tiene 3 kg de masa, 0,15 m de radio, y $0,04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto a dicho eje. La polea tiene arrollada una cuerda ideal. Partiendo del reposo, se tira del extremo libre de esa cuerda con una fuerza \vec{F} de módulo 12 N y la orientación mostrada en la figura. Aplicando el teorema del centro de masas y momentos, obténgase: el módulo de la aceleración angular de la polea; la fuerza que realiza el eje; el módulo de la velocidad angular de la polea tras dar dos vueltas.



El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, la polea en este caso.



Las fuerzas que actúan sobre la polea son:

\vec{T} : fuerza ejercida por la cuerda.

\vec{P} : peso.

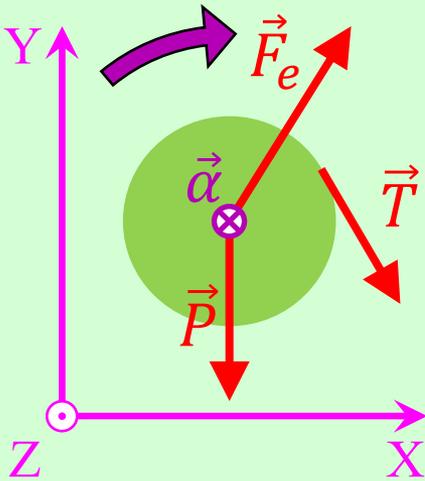
\vec{F}_e : fuerza ejercida por el eje.

Como consecuencia de la acción de estas fuerzas, el centro de masas de la polea, que está en el eje, tiene una aceleración \vec{a}_C nula, y una aceleración angular $\vec{\alpha}$ perpendicular al plano de esta página, y hacia dentro* por la regla de Maxwell.

* El vector $\vec{\alpha}$ aparece representado en este diagrama de cuerpo libre como un círculo con \times en el interior, como se hace con carácter general con los elementos perpendiculares a la página que se dirigen hacia dentro de esta. Si $\vec{\alpha}$ se dirigiera hacia fuera de la página, se utilizaría \cdot en el interior del círculo.

Hay que establecer un sistema de referencia, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.

Nótese que el sistema de referencia tiene tres ejes, y que el sentido tomado para el Z (hacia fuera de esta página) es tal que dicho sistema es dextrógiro.



Por ser la cuerda ideal, es $T = F$. Por tanto, se conocen su módulo y su orientación.

De \vec{P} se conocen su módulo y su orientación.

De \vec{F}_e no se conocen módulo ni orientación. Por tanto, se desconocen sus componentes X e Y, aunque sí se sabe que la Z es 0.

De $\vec{\alpha}$ se conoce su orientación, pero no su módulo.

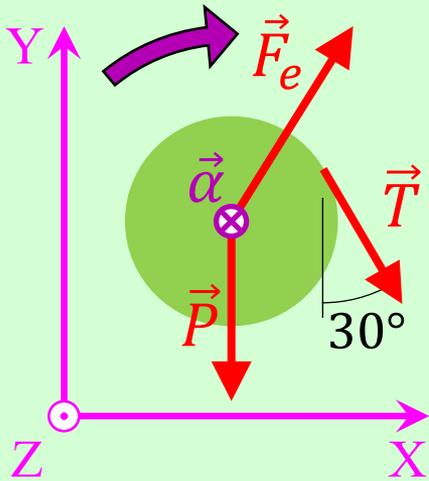
Por tanto, tenemos 3 incógnitas: F_{e_x} , F_{e_y} y α . Necesitamos pues 3 ecuaciones.

Aplicando el teorema del centro de masas, es

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_e = m\vec{a}_C = \vec{0}$$

$$(12 \operatorname{sen} 30^\circ; -12 \operatorname{cos} 30^\circ; 0) + (0; -3 \times 9,8; 0) + (F_{e_x}; F_{e_y}; 0) = (0; 0; 0)$$

$$\begin{cases} 6 + F_{e_x} = 0 \\ -10,39 - 29,4 + F_{e_y} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

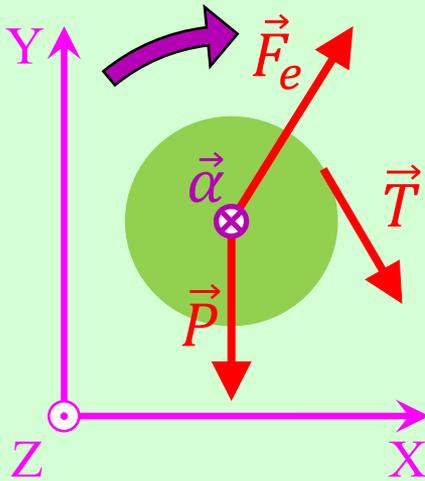


Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación, es

$$\vec{M}_{\vec{T}} + \vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{F}_e} = I\vec{\alpha}$$

Todos estos vectores tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación, resulta

$$(-12 \times 0,15) + 0 + 0 = 0,04(-\alpha)$$



- Fuerza de módulo 12 N.
- Brazo 0,15 m.
- Sentido hacia dentro del plano de la página, contrario pues al del eje Z.

Sentido hacia dentro del plano de la página, contrario pues al del eje Z.

Fuerza de brazo 0 m.

Fuerza de brazo 0 m.

Por tanto,

$$-1,8 = -0,04\alpha$$

Ya tenemos el sistema de 3 ecuaciones con las 3 incógnitas previstas:

F_{e_x} , F_{e_y} y α .

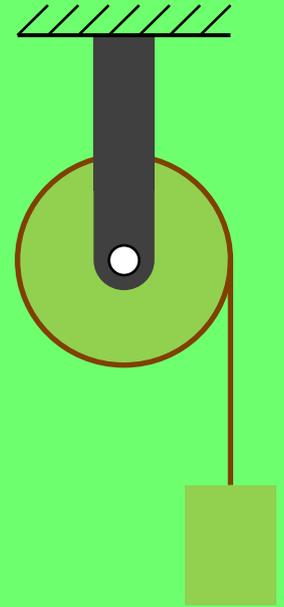
$$\left\{ \begin{array}{l} 6 + F_{e_x} = 0 \longrightarrow F_{e_x} = -6 \text{ N} \\ -10,39 - 29,4 + F_{e_y} = 0 \rightarrow F_{e_y} = 39,79 \text{ N} \\ -1,8 = -0,04\alpha \longrightarrow \alpha = 45 \text{ rad/s}^2 \end{array} \right\} \rightarrow \vec{F}_e = (-6; 39,79; 0) \text{ N}$$

Por último, dado que la rotación de la polea tiene aceleración angular constante, se tiene que el módulo de su velocidad angular tras dar dos vueltas es

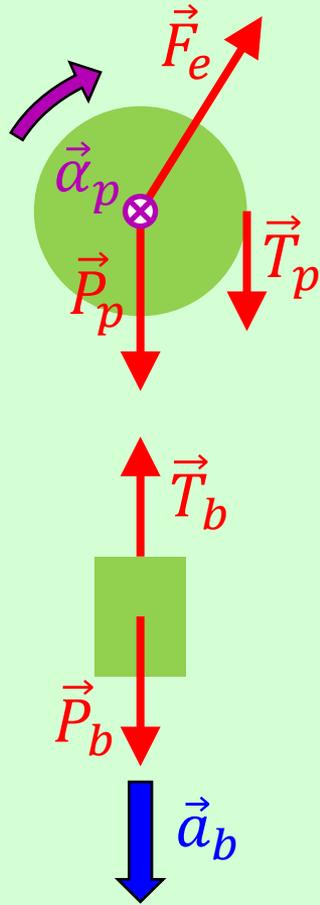
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)} = \sqrt{0^2 + 2 \times 45 \times (2 \times 2\pi)} = 33,63 \text{ rad/s}$$

Ejercicio 3

Una polea, con un eje rígido en su centro, tiene 3 kg de masa, 0,2 m de radio, y $0,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto a dicho eje. La polea tiene arrollada una cuerda ideal de cuyo extremo cuelga un bloque de 10 kg. El sistema parte del reposo. Aplicando el teorema del centro de masas y momentos, obténgase: los módulos de la aceleración del bloque, de la aceleración angular de la polea, y de la tensión en la cuerda; la fuerza que realiza el eje; el módulo de la velocidad del bloque tras descender 2 m.



El primer paso es realizar los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos implicados: la polea y el bloque.



\vec{P}_p : peso de la polea.

\vec{T}_p : fuerza ejercida por la cuerda sobre la polea.

\vec{F}_e : fuerza ejercida por el eje sobre la polea.

\vec{P}_b : peso del bloque.

\vec{T}_b : fuerza ejercida por la cuerda sobre el bloque.

Como consecuencia de la acción de estas fuerzas, el centro de masas de la polea, que está en el eje, tiene una aceleración \vec{a}_{c_p} nula, y una aceleración angular $\vec{\alpha}_p$ perpendicular al plano de esta página, y hacia dentro por la regla de Maxwell.

Por su parte, el bloque tiene una aceleración \vec{a}_b (común al centro de masas y a todos los puntos del bloque, ya que el movimiento resultante es de traslación).

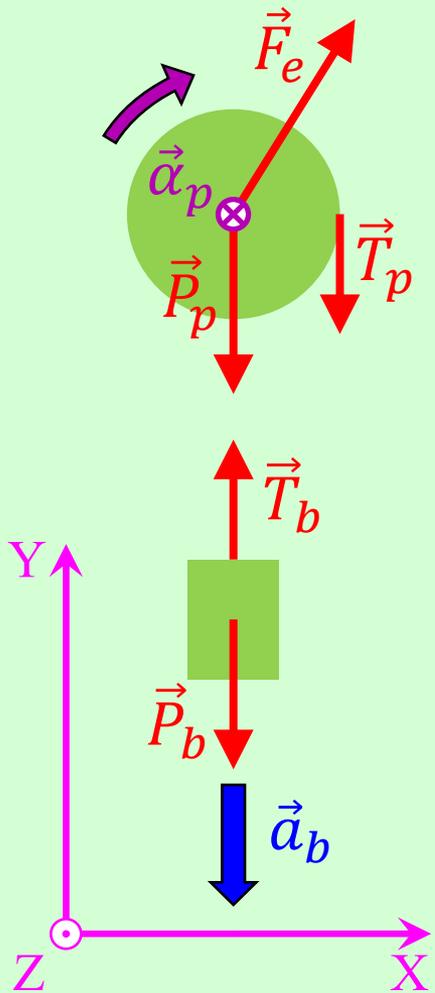
Hay que establecer un sistema de referencia dextrogiro, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.

De \vec{P}_p y \vec{P}_b se conocen módulos y orientaciones.

De \vec{F}_e no se conocen módulo ni orientación. Por tanto, se desconocen sus componentes X e Y, aunque sí se sabe que la Z es 0.

De \vec{T}_p y \vec{T}_b se conocen sus orientaciones, pero no su módulo T (común por ser cuerda ideal).

De $\vec{\alpha}_p$ y \vec{a}_b se conocen sus orientaciones, pero no sus módulos.



Por tanto, tenemos 5 incógnitas: F_{e_x} , F_{e_y} , T , α_p y a_b . Necesitamos pues 5 ecuaciones.

Aplicando el teorema del centro de masas a la polea, es

$$\vec{P}_p + \vec{T}_p + \vec{F}_e = m_p \vec{a}_{c_p} = \vec{0}$$

$$(0; -3 \times 9,8; 0) + (0; -T; 0) + (F_{e_x}; F_{e_y}; 0) = (0; 0; 0)$$

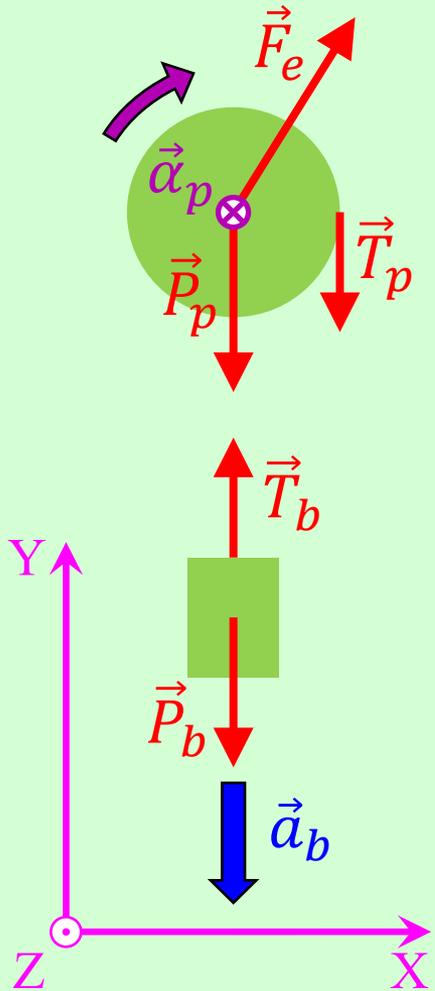
$$\begin{cases} F_{e_x} = 0 \\ -29,4 - T + F_{e_y} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Aplicando el teorema del centro de masas al bloque, es

$$\vec{P}_b + \vec{T}_b = m_b \vec{a}_b$$

$$(0; -10 \times 9,8; 0) + (0; T; 0) = 10(0; -a_b; 0)$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -98 + T = -10a_b \\ 0 = 0 \end{cases}$$

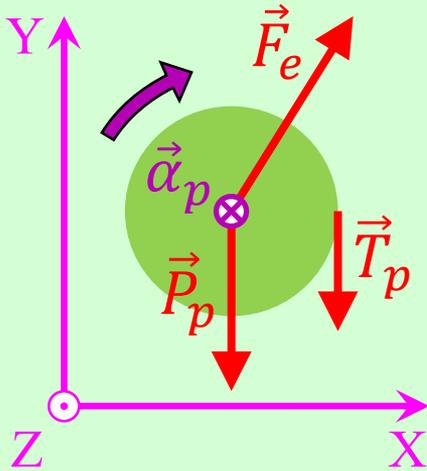


Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación a la polea, es

$$\vec{M}_{\vec{P}_p} + \vec{M}_{\vec{T}_p} + \vec{M}_{\vec{F}_e} = I_p \vec{\alpha}_p$$

Todos estos vectores tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación, resulta

$$0 + (-T \times 0,2) + 0 = 0,1(-\alpha_p)$$



Fuerza de brazo 0 m.

Sentido hacia dentro del plano de la página, contrario pues al del eje Z.

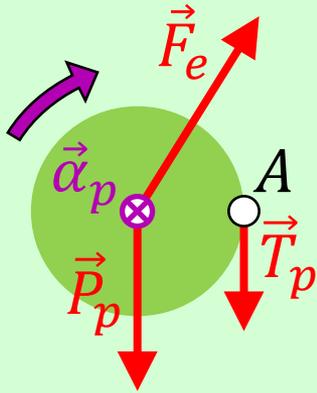
Fuerza de brazo 0 m.

Por tanto:

$$-0,2T = -0,1\alpha_p$$

$$0,2T = 0,1\alpha_p$$

- Fuerza de módulo T .
- Brazo 0,2 m.
- Sentido hacia dentro del plano de la página, contrario pues al del eje Z.

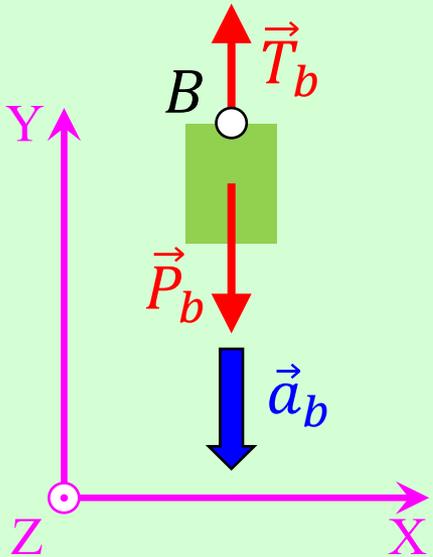


$$\left\{ \begin{array}{l} F_{e_x} = 0 \\ -29,4 - T + F_{e_y} = 0 \\ 0,2T = 0,1\alpha_p \\ -98 + T = -10a_b \end{array} \right\} \quad \text{¡Aún nos falta una ecuación!}$$

La cuerda es ideal: es inextensible y carece de masa.

La carencia de masa ha permitido considerar que el módulo T no varía entre puntos de la cuerda.

Falta aplicar la consecuencia de que la cuerda es inextensible: sus puntos A y B han de tener aceleraciones del mismo módulo.



En el punto A , donde la cuerda se mueve solidariamente con el punto de la polea con el que está en contacto, es

$$a_A = \alpha_p R$$

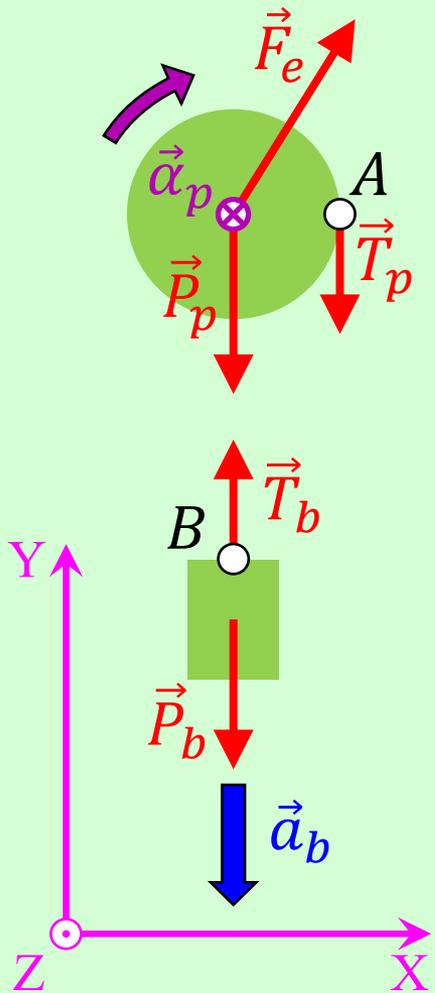
En el punto B , donde la cuerda se mueve solidariamente con el punto del bloque al que está anclada, es

$$a_B = a_b$$

Por la presencia de la cuerda ideal, es

$$a_A = a_B \Rightarrow \alpha_p R = a_b$$

En lo sucesivo nos referiremos a este tipo de expresión como “relación de aceleraciones por cuerda” (o hilo, o cable, según el caso).



$$\left\{ \begin{array}{l} F_{e_x} = 0 \\ -29,4 - T + F_{e_y} = 0 \rightarrow F_{e_y} = T + 29,4 \\ 0,2T = 0,1\alpha_p \rightarrow 0,2T = 0,5a_b \rightarrow T = 2,5a_b \\ \alpha_p 0,2 = a_b \rightarrow \alpha_p = 5a_b \\ -98 + T = -10a_b \rightarrow -98 + 2,5a_b = -10a_b \end{array} \right.$$

Por tanto,

$$12,5a_b = 98 \Rightarrow a_b = 7,84 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_p = 5a_b = 5 \times 7,84 = 39,2 \text{ rad/s}^2$$

$$T = 2,5a_b = 2,5 \times 7,84 = 19,6 \text{ N}$$

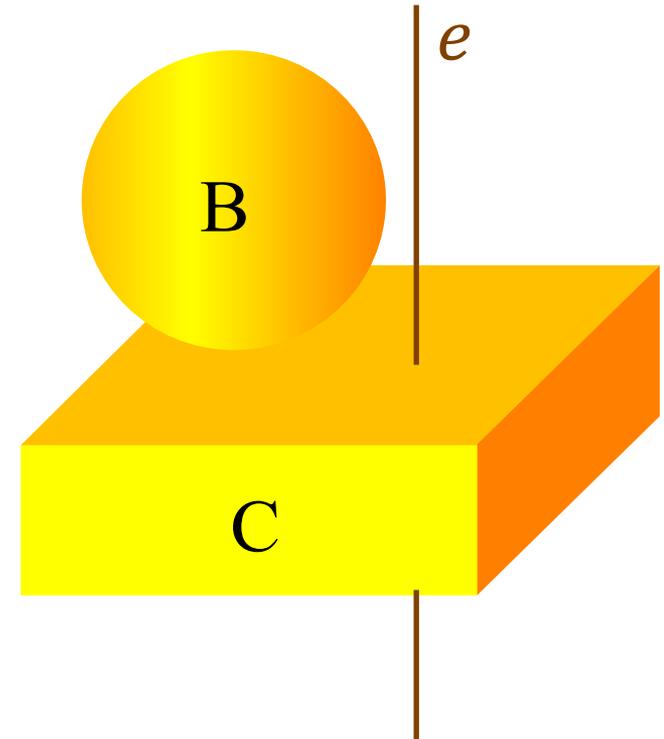
$$\left. \begin{array}{l} F_{e_x} = 0 \text{ N} \\ F_{e_y} = T + 29,4 = 19,6 + 29,4 = 49 \text{ N} \end{array} \right\} \rightarrow \vec{F}_e = (0; 49; 0) \text{ N}$$

El movimiento del bloque es rectilíneo con a_b constante. Por tanto,

$$v_b = \sqrt{v_{b_0}^2 + 2a_b(s_b - s_{b_0})} = \sqrt{0^2 + 2 \times 7,84 \times 2} = 5,6 \text{ m/s}$$

Cálculo de momentos de inercia

Sea un sólido rígido A, de momento de inercia I_A respecto a un eje de giro e . Lo vamos a considerar constituido por dos sólidos rígidos B y C, cuyos momentos de inercia respecto al mismo eje son I_B e I_C respectivamente.



Es:

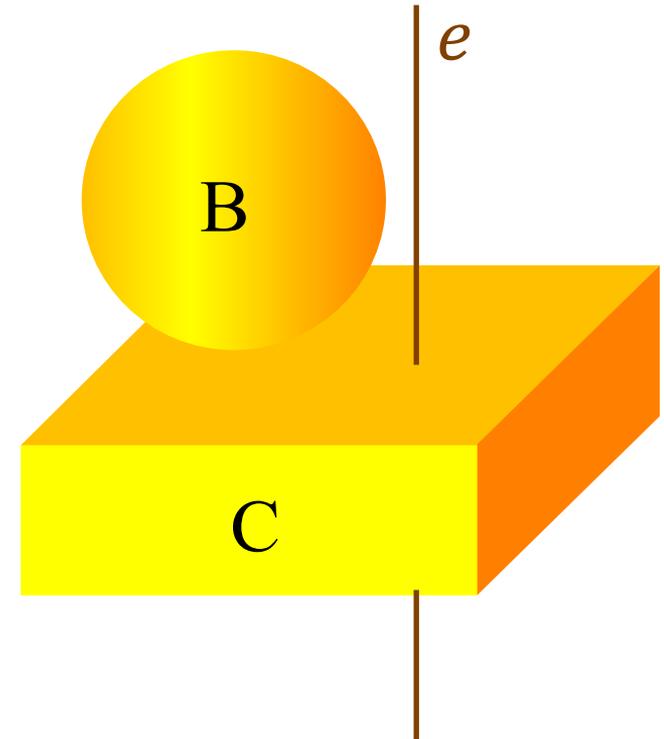
$$I_B = \sum_B m_i r_i^2 \quad I_C = \sum_C m_i r_i^2$$

$$I_A = \sum_A m_i r_i^2 = \sum_B m_i r_i^2 + \sum_C m_i r_i^2 = I_B + I_C$$

Cálculo de momentos de inercia

Generalización

El momento de inercia, respecto a un eje, de un sólido rígido compuesto por cualquier cantidad de otros más simples, es la suma de los momentos de inercia de estos respecto al mismo eje.



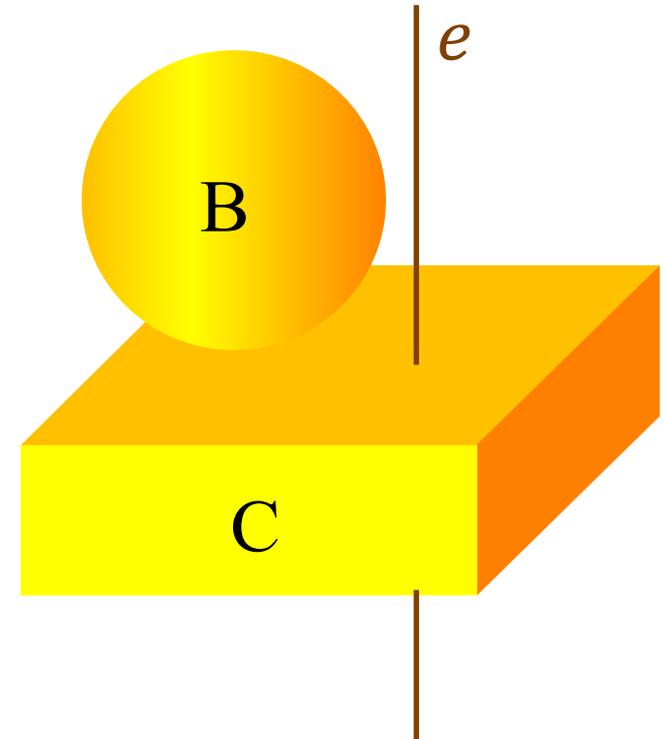
Cálculo de momentos de inercia

A partir de la relación

$$I_A = I_B + I_C$$

obtenida en el desarrollo anterior,
también se deduce que

$$I_C = I_A - I_B$$



Por tanto, se puede obtener el momento de inercia, respecto a un eje, de un sistema compuesto por adición y sustracción de otros más simples, a partir de las correspondientes sumas y restas de los momentos de inercia de estos respecto al mismo eje.

Cálculo de momentos de inercia

Ya sabemos que el momento de inercia de un sólido rígido es

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Si se trata de una distribución continua de masas infinitesimales dm , el momento de inercia de una de ellas, situada a una distancia r del eje de giro, es

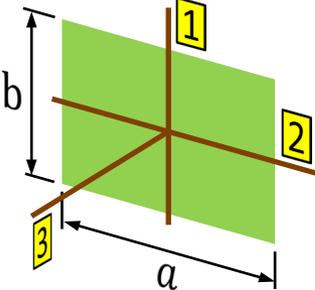
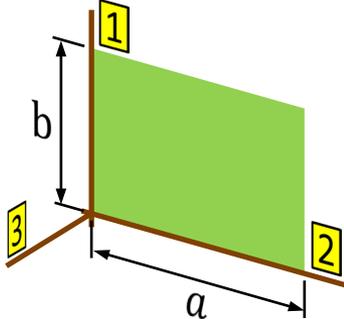
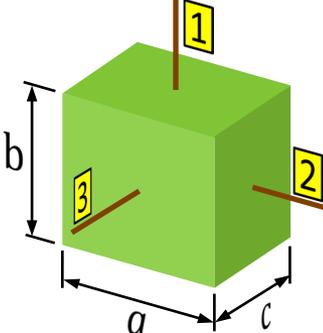
$$dI = r^2 dm$$

El momento de inercia del sólido es la suma de los de las masas infinitesimales.

$$I = \int r^2 dm$$

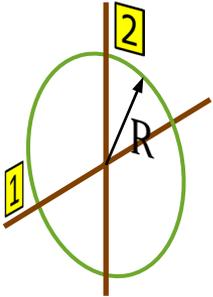
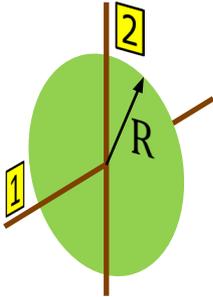
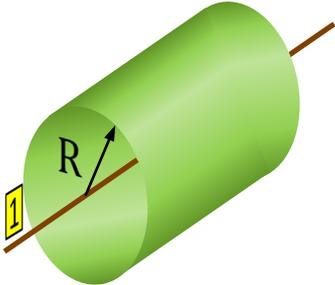
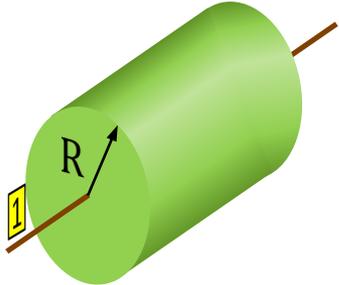
Ejemplos de momentos de inercia

Momentos de inercia de cuerpos homogéneos típicos

Placa rectangular delgada	Ortoedro	
 <p data-bbox="144 772 595 1158">$I_1 = \frac{1}{12} m a^2$$I_2 = \frac{1}{12} m b^2$$I_3 = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$</p>	 <p data-bbox="768 772 1186 1158">$I_1 = \frac{1}{3} m a^2$$I_2 = \frac{1}{3} m b^2$$I_3 = \frac{1}{3} m (a^2 + b^2)$</p>	 <p data-bbox="1344 772 1798 1158">$I_1 = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2)$$I_2 = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2)$$I_3 = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$</p>

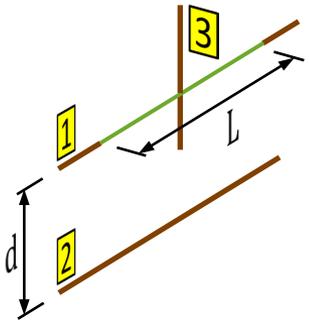
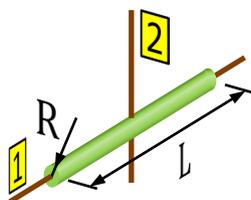
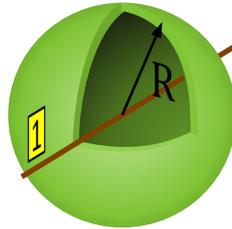
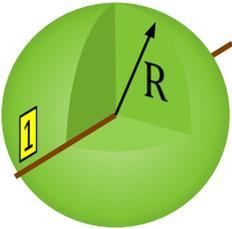
Ejemplos de momentos de inercia

Momentos de inercia de cuerpos homogéneos típicos

Anillo delgado	Disco delgado	Cilindro delgado	Cilindro macizo
			
$I_1 = mR^2$ $I_2 = \frac{1}{2}mR^2$	$I_1 = \frac{1}{2}mR^2$ $I_2 = \frac{1}{4}mR^2$	$I_1 = mR^2$	$I_1 = \frac{1}{2}mR^2$

Ejemplos de momentos de inercia

Momentos de inercia de cuerpos homogéneos típicos

Alambre	Barra delgada	Esfera hueca	Esfera maciza
			
$I_1 = 0$ $I_2 = md^2$ $I_3 = \frac{1}{12}mL^2$	$I_1 = \frac{1}{2}mR^2$ $I_2 = \frac{1}{12}mL^2$	$I_1 = \frac{2}{3}mR^2$	$I_1 = \frac{2}{5}mR^2$

Ejercicio 4

Determinése el momento de inercia de un alambre homogéneo muy fino, de masa m , respecto a un eje paralelo situado a una distancia d .

Se puede dividir el alambre en infinitos trozos infinitesimales de masa dm .

Cada trozo se puede considerar un punto, por lo que su momento de inercia es

$$dI = dm d^2$$

Como todos los trozos tienen el mismo valor de d , la suma de los momentos de inercia de todos ellos (esto es, la integral) es

$$I = \int (dm d^2) = \left[\int dm \right] d^2 = md^2$$



Ejercicio 5

Determinése el momento de inercia de un anillo homogéneo muy fino, de masa m y radio R , respecto al eje de simetría perpendicular a su plano.

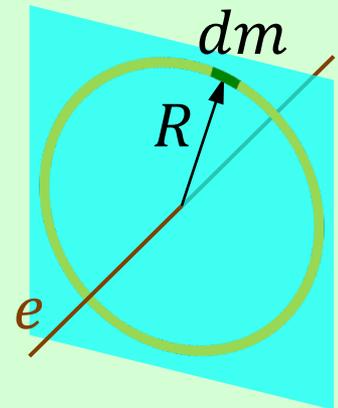
Se puede dividir el anillo en infinitos trozos infinitesimales de masa dm .

Cada trozo se puede considerar un punto, por lo que su momento de inercia es

$$dI = dmR^2$$

Como todos los trozos tienen el mismo valor de R , la suma de los momentos de inercia de todos ellos (esto es, la integral) es

$$I = \int (dmR^2) = \left[\int dm \right] R^2 = mR^2$$



Ejercicio 6

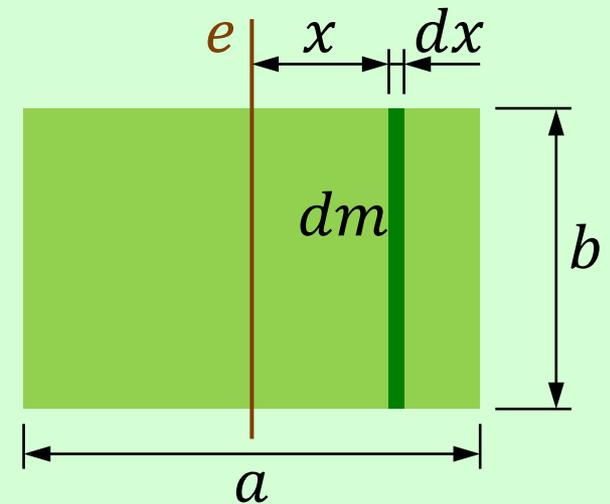
Determinése el momento de inercia de un rectángulo homogéneo, de masa m y lados de longitud a y b , respecto al eje de simetría paralelo al segundo de esos lados.

Sea la banda de la figura, de altura b , situada a una distancia x del eje. La anchura infinitesimal de la banda es dx , y su masa es dm .

Como el rectángulo es homogéneo, la relación de la masa dm a la masa total m es la misma que existe entre las respectivas áreas, dS y S .

Por tanto,

$$\frac{dm}{m} = \frac{dS}{S} = \frac{b dx}{ab} = \frac{dx}{a} \Rightarrow dm = \frac{m dx}{a}$$

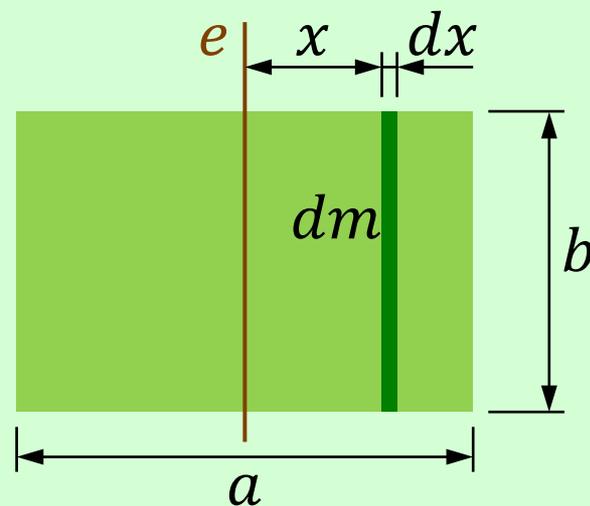


La banda es un alambre recto homogéneo muy fino paralelo al eje. Por tanto es de aplicación la expresión del momento de inercia que corresponde a ese caso particular.

$$dI = dm x^2 = \frac{m dx}{a} x^2 = \frac{m x^2}{a} dx$$

La suma de los momentos de inercia de todas las bandas (esto es, la integral), cuyas posiciones son $x \in [-a/2; a/2]$, es

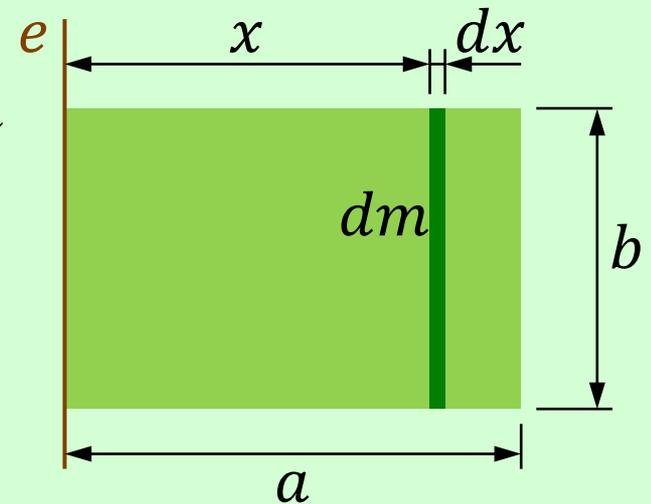
$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-a/2}^{a/2} \frac{m x^2}{a} dx = \left[\frac{m x^3}{3a} \right]_{-a/2}^{a/2} = \\
 &= \frac{m(a/2)^3}{3a} - \frac{m(-a/2)^3}{3a} = \frac{m a^3}{24a} - \left(-\frac{m a^3}{24a} \right) = \frac{1}{12} m a^2
 \end{aligned}$$



Ejercicio 7

Determinése el momento de inercia de un rectángulo homogéneo, de masa m y dimensiones a y b , respecto a un eje que recorre uno de los lados de longitud b .

El proceso es idéntico al del ejercicio anterior, salvo que ahora x es la distancia de cada banda al nuevo eje. Por tanto, $x \in [0; a]$.



$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \frac{mx^2}{a} dx = \left[\frac{mx^3}{3a} \right]_0^a = \\ &= \frac{ma^3}{3a} - \frac{m0^3}{3a} = \frac{1}{3}ma^2 \end{aligned}$$

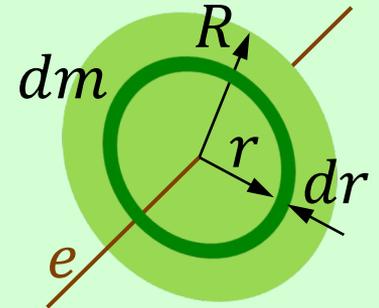
Ejercicio 8

Determinése el momento de inercia de un disco homogéneo muy fino, de masa m y radio R , respecto al eje de simetría perpendicular a su plano.

Sea el anillo de la figura, de radio r . La anchura infinitesimal del anillo es dr , y su masa es dm .

Como el disco es homogéneo, la relación de la masa dm a la masa total m es la misma que existe entre las respectivas áreas, dS y S . Por tanto,

$$\frac{dm}{m} = \frac{dS}{S} = \frac{2\pi r dr}{\pi R^2} = \frac{2r dr}{R^2} \Rightarrow dm = \frac{2mr dr}{R^2}$$

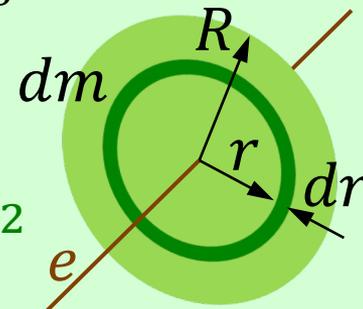


El anillo es homogéneo y muy fino. Por tanto es de aplicación la expresión del momento de inercia que corresponde a ese caso particular.

$$dI = dm r^2 = \frac{2mr dr}{R^2} r^2 = \frac{2mr^3}{R^2} dr$$

La suma de los momentos de inercia de todos los anillos (esto es, la integral), cuyos radios son $r \in [0; R]$, es

$$I = \int_0^R \frac{2mr^3}{R^2} dr = \left[\frac{mr^4}{2R^2} \right]_0^R = \frac{mR^4}{2R^2} - \frac{m0^4}{2R^2} = \frac{1}{2} mR^2$$

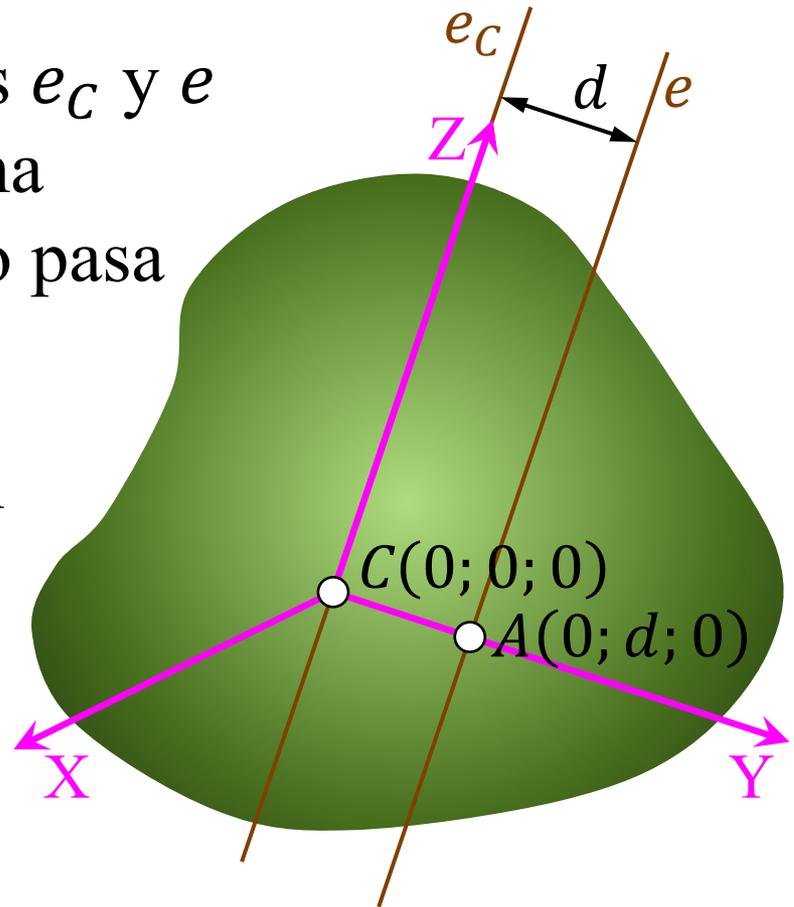


Teorema de Steiner

Sea un sólido rígido, y dos ejes e_C y e paralelos entre sí, separados una distancia d , y donde el primero pasa por el centro de masas C .

Por simplicidad, adoptamos un sistema de referencia tal que:

- el origen de coordenadas está en C ;
- el eje Z coincide con e_C ;
- e está en el plano YZ .



Por tanto es $C(0; 0; 0)$, y e pasa por $A(0; d; 0)$.

Teorema de Steiner

Sea $P_i(x_i; y_i; z_i)$ un punto material cualquiera, de masa m_i , del sólido.

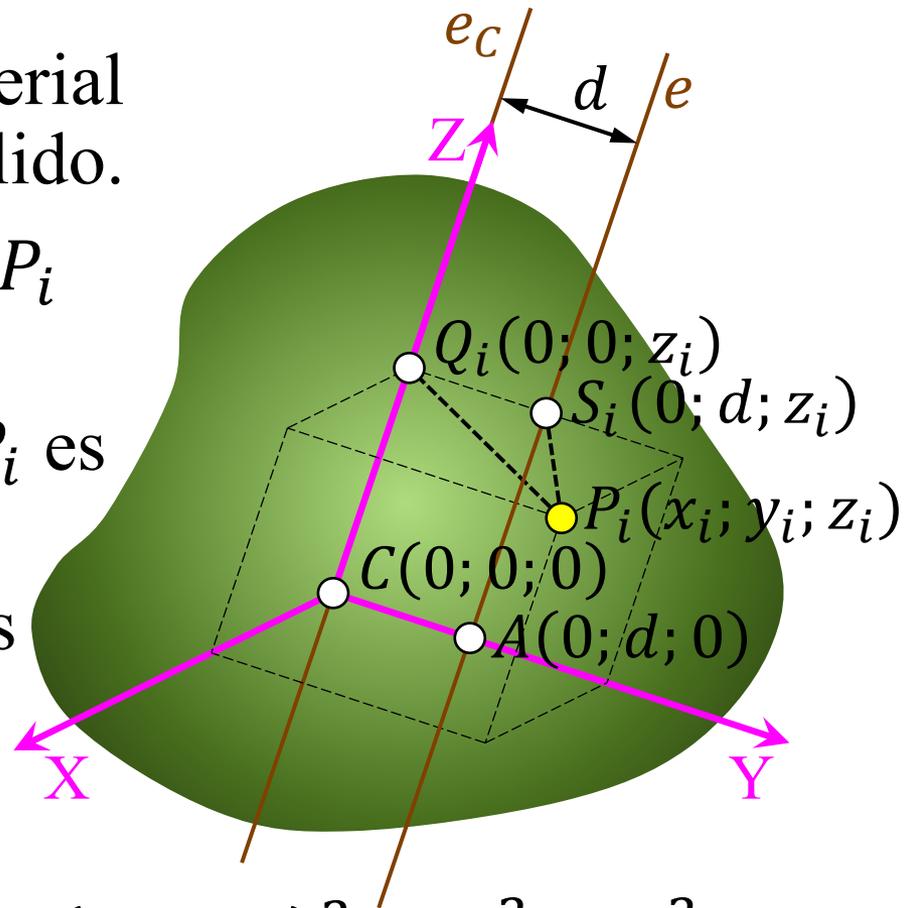
El punto de e_C más próximo a P_i es $Q_i(0; 0; z_i)$.

El punto de e más próximo a P_i es $S_i(0; d; z_i)$.

Los cuadrados de las distancias de P_i a los ejes e_C y e son:

$$\begin{aligned} r_{C_i}^2 &= |\overrightarrow{Q_i P_i}|^2 = \\ &= (x_i - 0)^2 + (y_i - 0)^2 + (z_i - z_i)^2 = x_i^2 + y_i^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_i^2 &= |\overrightarrow{S_i P_i}|^2 = (x_i - 0)^2 + (y_i - d)^2 + (z_i - z_i)^2 = \\ &= x_i^2 + y_i^2 + d^2 - 2y_i d \end{aligned}$$



Teorema de Steiner

Los momentos de inercia del sólido respecto a los ejes e_C y e son, respectivamente,

$$I_C = \sum m_i r_{C_i}^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + d^2 - 2y_i d) = \\ &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) + \sum (m_i d^2) - \sum (m_i 2y_i d) = \\ &= I_C + \left(\sum m_i \right) d^2 - 2d \sum m_i y_i = \\ &= I_C + m d^2 - 2d \sum m_i y_i \end{aligned}$$

Teorema de Steiner

Utilizando la expresión del centro de masas de un sistema, se tiene que

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \Rightarrow \sum m_i \vec{r}_i = m \vec{r}_C \Rightarrow \sum m_i y_i = m y_C = 0$$

ya que en nuestro sistema de referencia es $C(0; 0; 0)$.

Por tanto,

$$I = I_C + md^2$$

Teorema de Steiner

Teorema de Steiner.

El momento de inercia de un sólido rígido respecto a un eje, es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo al primero pasando por el centro de masas del sólido, más el producto de su masa por el cuadrado de la distancia entre ambos ejes.

$$I = I_C + md^2$$

Una consecuencia es que, de todos los ejes paralelos a una dirección, el momento de inercia mínimo corresponde al que pasa por el centro de masas.



Fuente: Public domain, via
Wikimedia Commons

Ejercicio 9

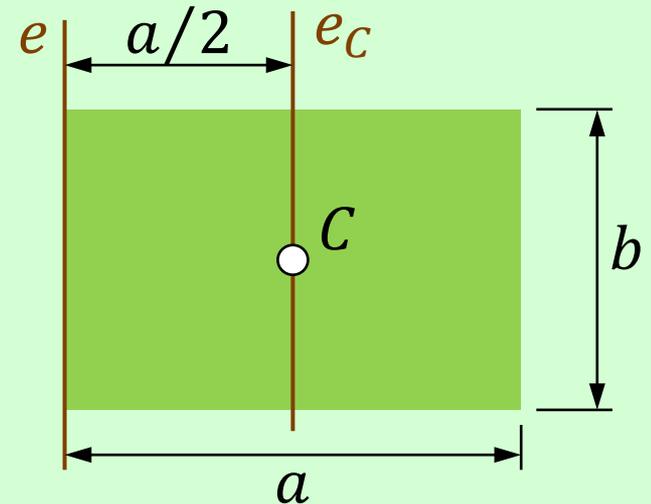
Determinése el momento de inercia de un rectángulo homogéneo, de masa m y dimensiones a y b , respecto a un eje que recorre uno de los lados de longitud b . Para ello, utilícese el teorema de Steiner a partir del eje paralelo que pasa por el centro de masas del rectángulo.

La distancia entre los ejes paralelos e y e_c es $a/2$.

$$I_C = \frac{1}{12} ma^2$$

Aplicando el teorema de Steiner,

$$\begin{aligned} I &= I_C + md^2 = \frac{1}{12} ma^2 + m \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{12} ma^2 + \frac{1}{4} ma^2 = \frac{1}{12} ma^2 + \frac{3}{12} ma^2 = \frac{4}{12} ma^2 = \frac{1}{3} ma^2 \end{aligned}$$



Teorema de las tres perpendiculares

Sea un sólido rígido plano, y tres ejes perpendiculares entre sí, dos de ellos (X e Y) situados sobre dicho sólido, y el tercero (Z) perpendicular a él.

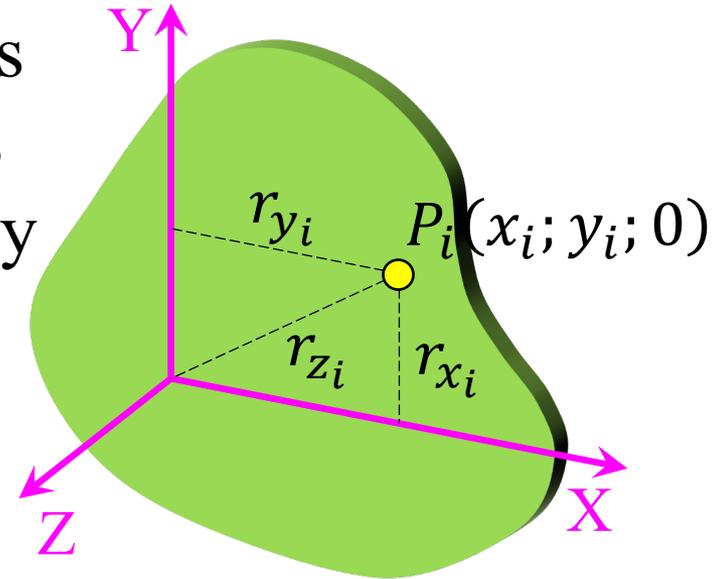
Sea $P_i(x_i; y_i; 0)$ un punto material cualquiera, de masa m_i , del sólido.

Los cuadrados de las distancias de P_i a los ejes X, Y y Z son, respectivamente,

$$r_{x_i}^2 = y_i^2$$

$$r_{y_i}^2 = x_i^2$$

$$r_{z_i}^2 = x_i^2 + y_i^2$$



Teorema de las tres perpendiculares

Los momentos de inercia del sólido plano respecto a los ejes X, Y y Z son, respectivamente,

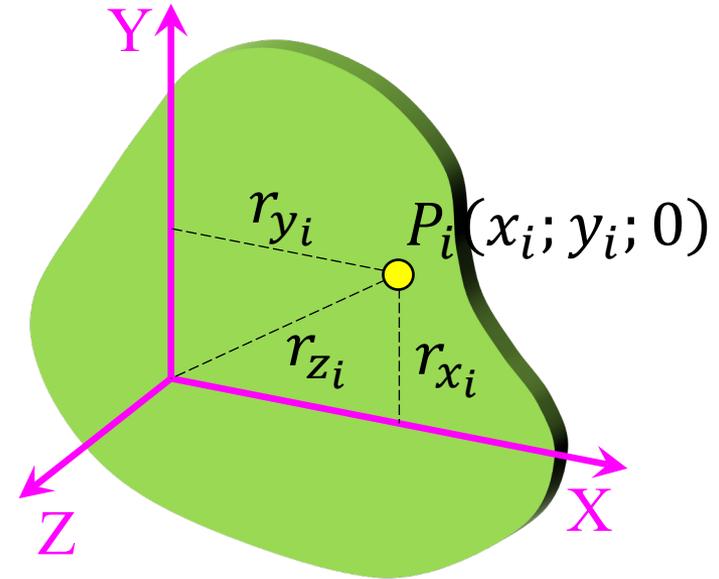
$$I_x = \sum m_i r_{x_i}^2 = \sum m_i y_i^2$$

$$I_y = \sum m_i r_{y_i}^2 = \sum m_i x_i^2$$

$$I_z = \sum m_i r_{z_i}^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2$$

Por tanto,

$$I_z = I_x + I_y$$



Teorema de las tres perpendiculares

Teorema de las tres perpendiculares.

El momento de inercia de un sólido rígido plano respecto a un eje perpendicular a él en un punto, es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes situados en el plano del sólido, perpendiculares entre sí, y que pasan por el mismo punto.

Ejercicio 10

Determinése el momento de inercia de un rectángulo homogéneo, de masa m y dimensiones a y b , respecto al eje perpendicular que pasa por su centro de masas.

Ya obtuvimos que el momento de inercia respecto al eje 1 es

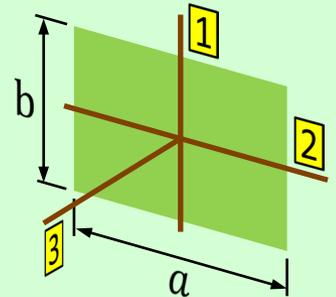
$$I_1 = \frac{1}{12} m a^2$$

Por analogía, el momento de inercia respecto al eje 2 es

$$I_2 = \frac{1}{12} m b^2$$

Aplicando el teorema de las tres perpendiculares (el rectángulo es un sistema plano), el momento de inercia respecto al eje 3 es

$$I_3 = I_1 + I_2 = \frac{1}{12} m a^2 + \frac{1}{12} m b^2 = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$



Ejercicio 11

Determinése el momento de inercia de un anillo homogéneo muy fino, de masa m y radio R , respecto a un eje diametral.

Ya obtuvimos que el momento de inercia respecto al eje 1 es

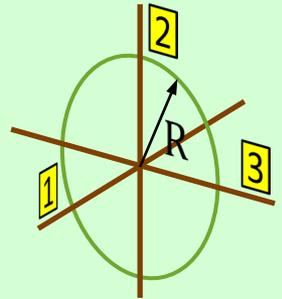
$$I_1 = mR^2$$

Por simetría, los momentos de inercia respecto a los ejes diametrales 2 y 3 son iguales entre sí.

$$I_2 = I_3$$

Aplicando el teorema de las tres perpendiculares (el anillo es un sistema plano), se obtiene el momento de inercia respecto al eje 2.

$$I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow mR^2 = I_2 + I_2 = 2I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}mR^2$$

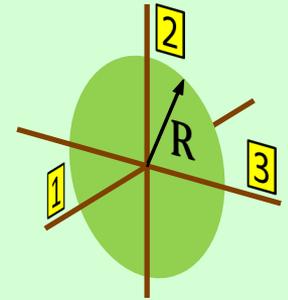


Ejercicio 12

Determinése el momento de inercia de un disco homogéneo muy fino, de masa m y radio R , respecto un eje diametral.

Ya obtuvimos que el momento de inercia respecto al eje 1 es

$$I_1 = \frac{1}{2} mR^2$$



Por simetría, los momentos de inercia respecto a los ejes diametrales 2 y 3 son iguales entre sí.

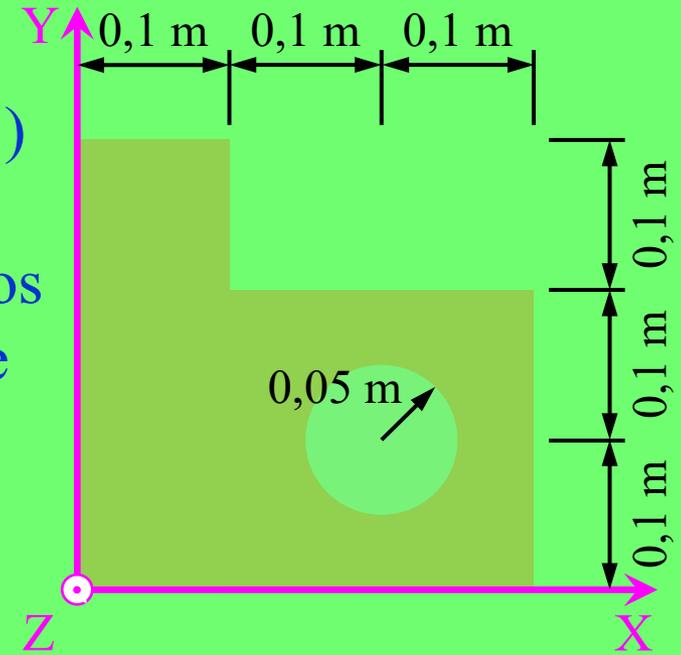
$$I_2 = I_3$$

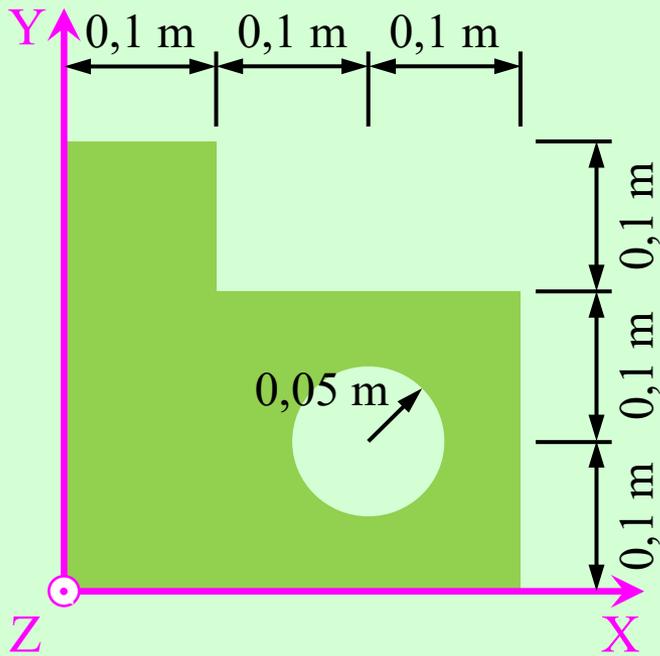
Aplicando el teorema de las tres perpendiculares (el disco es un sólido plano), se obtiene el momento de inercia respecto al eje 2.

$$I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow \frac{1}{2} mR^2 = I_2 + I_2 = 2I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4} mR^2$$

Ejercicio 13

Una placa (densidad superficial 15 kg/m^2) tiene la forma y dimensiones que se muestran en la figura. Determinélese sus momentos de inercia respecto a los ejes del sistema de referencia indicado.





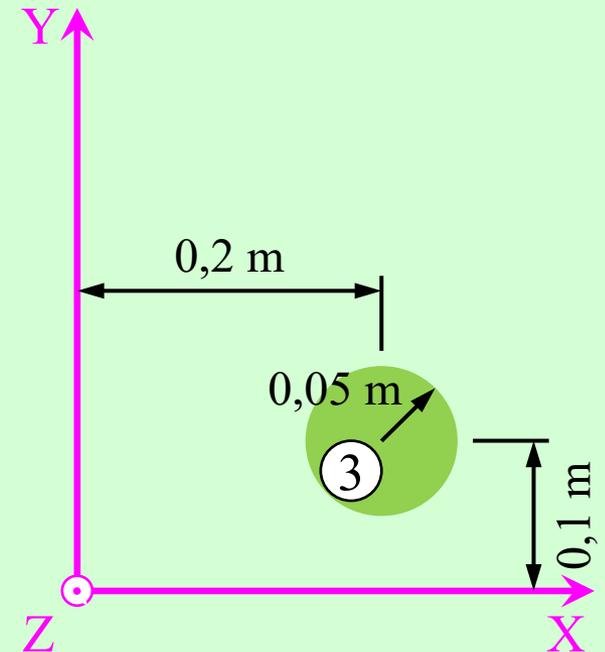
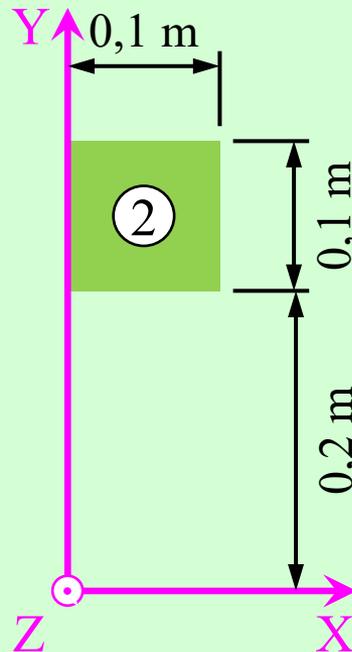
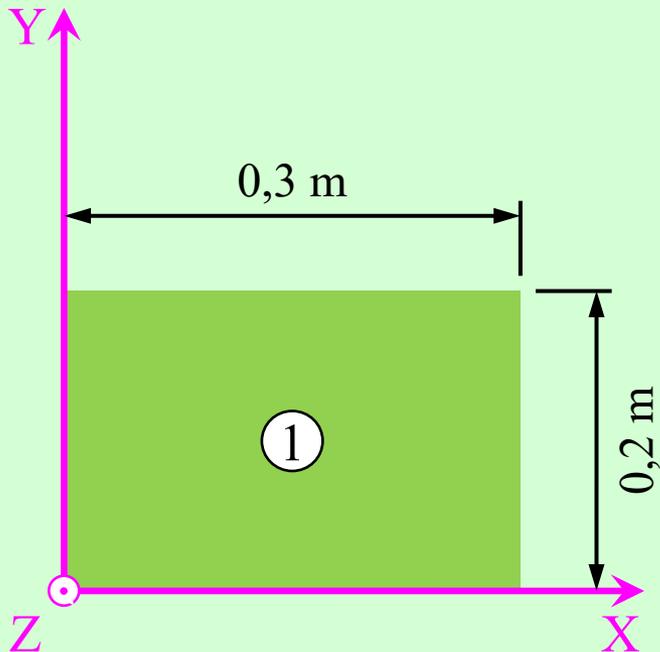
Consideremos la placa constituida por los rectángulos 1 y 2, extrayendo del primero el círculo 3.

Las masas de estas partes son:

$$m_1 = 15 \times 0,3 \times 0,2 = 0,9 \text{ kg}$$

$$m_2 = 15 \times 0,1 \times 0,1 = 0,15 \text{ kg}$$

$$m_3 = 15 \times \pi \times 0,05^2 = 0,1178 \text{ kg}$$



Los momentos de inercia de la parte 1 respecto a los ejes X e Y son:

$$I_{1x} = \frac{1}{3} 0,9 \times 0,2^2 = 0,012 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

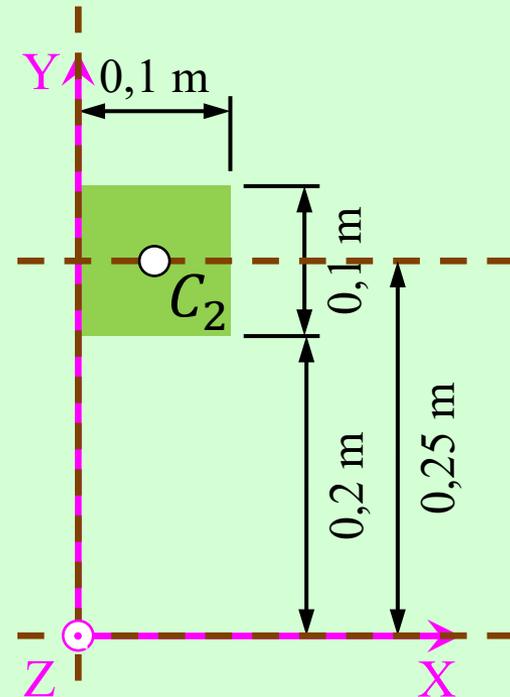
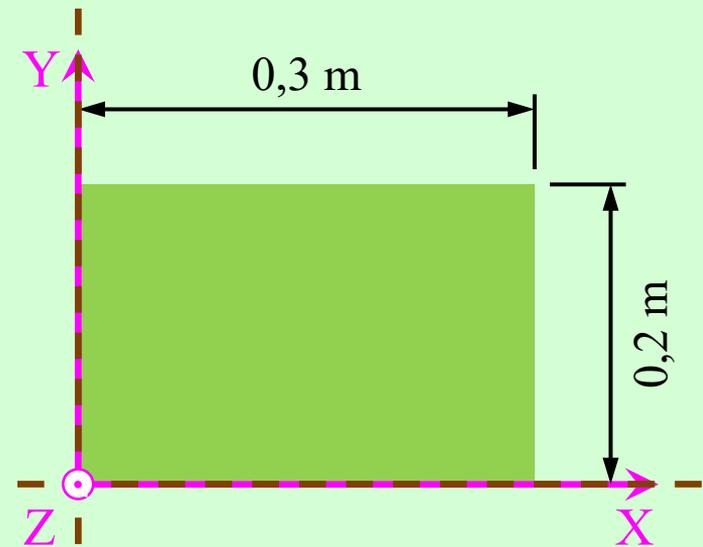
$$I_{1y} = \frac{1}{3} 0,9 \times 0,3^2 = 0,027 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Los de la parte 2 son:

$$I_{2x} = \frac{1}{12} 0,15 \times 0,1^2 + 0,15 \times 0,25^2 =$$

$$= 0,0095 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

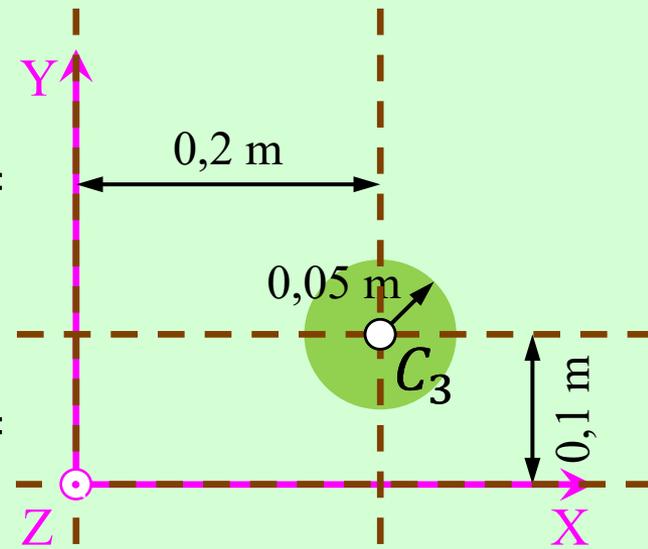
$$I_{2y} = \frac{1}{3} 0,15 \times 0,1^2 = 0,0005 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



Los de la parte 3 son:

$$I_{3_x} = \frac{1}{4} 0,1178 \times 0,05^2 + 0,1178 \times 0,1^2 =$$
$$= 0,001252 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{3_y} = \frac{1}{4} 0,1178 \times 0,05^2 + 0,1178 \times 0,2^2 =$$
$$= 0,004786 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



Por tanto,

$$I_x = I_{1_x} + I_{2_x} - I_{3_x} = 0,012 + 0,0095 - 0,001252 =$$
$$= 0,02025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = I_{1_y} + I_{2_y} - I_{3_y} = 0,027 + 0,0005 - 0,004786 =$$
$$= 0,02271 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Se trata de un sólido rígido plano. Aplicando el teorema de las tres perpendiculares,

$$I_z = I_x + I_y = 0,02025 + 0,02271 = 0,04296 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

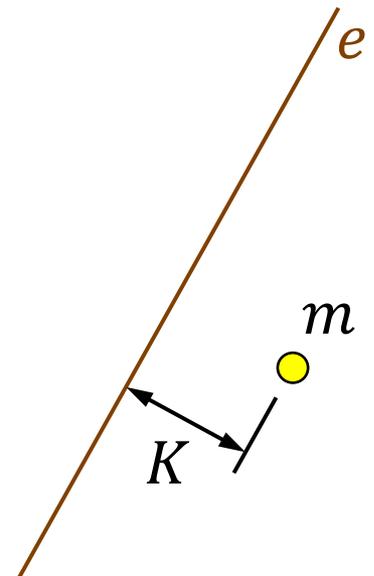
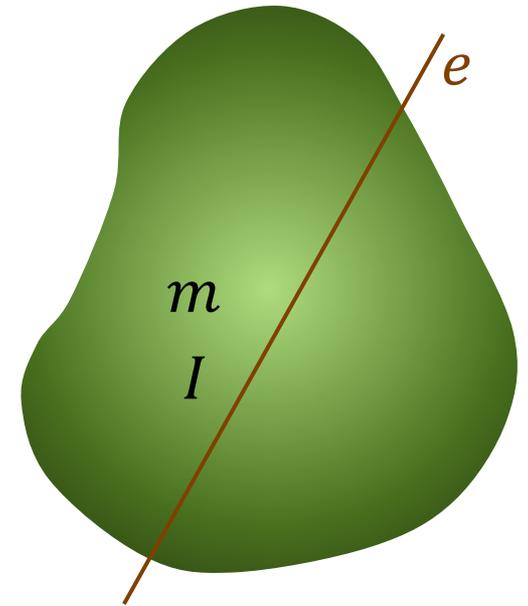
Radio de giro

Se denomina **radio de giro** de un sólido rígido respecto a un eje, a la distancia del eje a la que tendría que colocarse un único punto material, con toda la masa del sólido, para que tuviera su mismo momento de inercia.

Sea m la masa del sólido, e I su momento de inercia respecto al eje considerado.

El momento de inercia de un punto material de la misma masa m , situado a una distancia K del mismo eje, es

$$I_p = mK^2$$



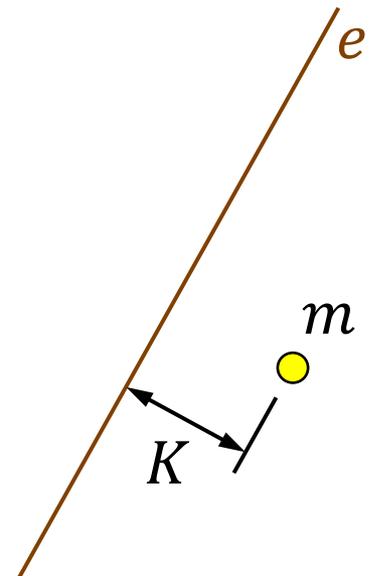
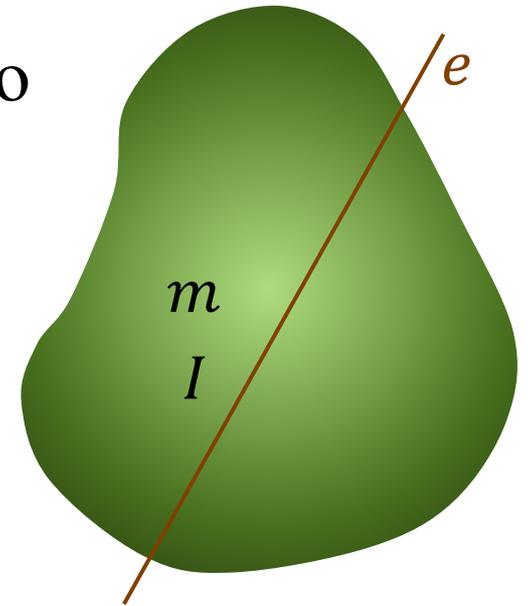
Radio de giro

Para que el punto tenga el mismo momento de inercia que el sólido, ha de ser

$$I = I_p = mK^2$$

Por tanto, la distancia del eje a la que ha de hallarse (el radio de giro) es

$$K = \sqrt{I/m}$$



Energía cinética

La energía cinética de un sistema de puntos materiales es

$$E_c = \sum E_{c_i} = \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$$

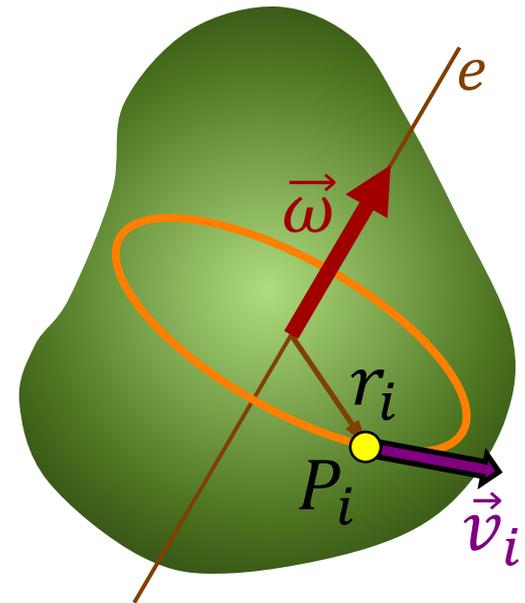
¿Y si se trata, en particular, de un sólido rígido en rotación alrededor de un eje e ?

Sea P_i un punto material cualquiera, de masa m_i , del sólido.

Sea r_i la distancia de P_i al eje de giro.

Por tratarse de un sólido rígido, todos sus puntos tienen en un instante dado la misma velocidad angular $\vec{\omega}$.

El módulo de la velocidad de P_i es $v_i = \omega r_i$.



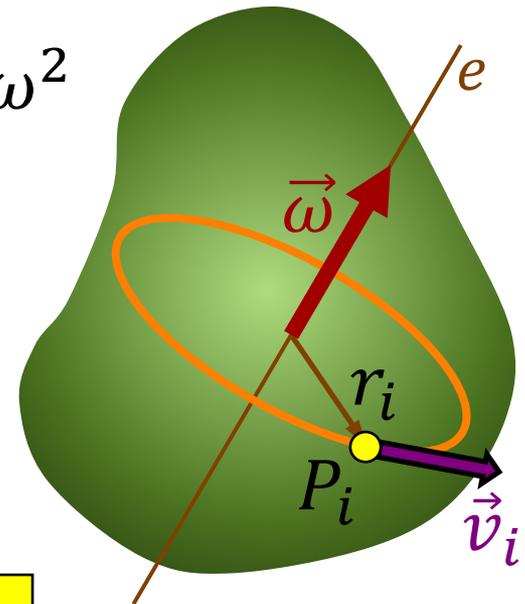
Energía cinética

Por tanto,

$$E_c = \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \sum \left(\frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 \right) =$$
$$= \sum \left(\frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

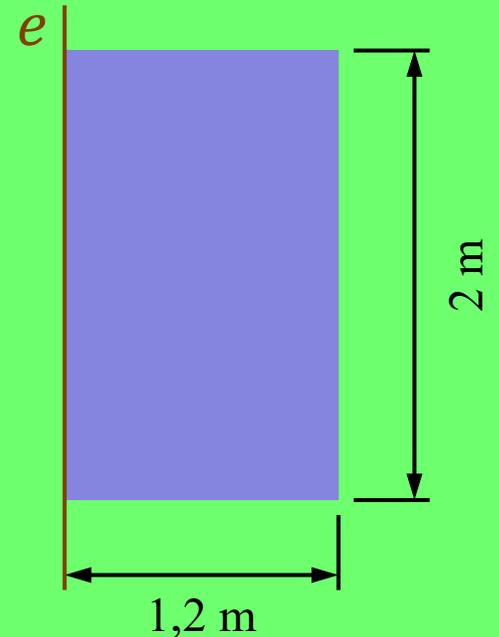
Es el momento de inercia del sólido rígido respecto al eje de giro.

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$$



Ejercicio 14

Una puerta, prácticamente plana, de 20 kg de masa, tiene las dimensiones y el eje de giro que se muestran en la figura. ¿Cuál es su energía cinética en el instante en que el módulo de su velocidad angular es de 3 rad/s?



El momento de inercia de la puerta respecto a su eje de giro es

$$I = \frac{1}{3} 20 \times 1,2^2 = 9,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Por tanto, la energía cinética de la puerta en el instante indicado es

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} 9,6 \times 3^2 = 43,2 \text{ J}$$

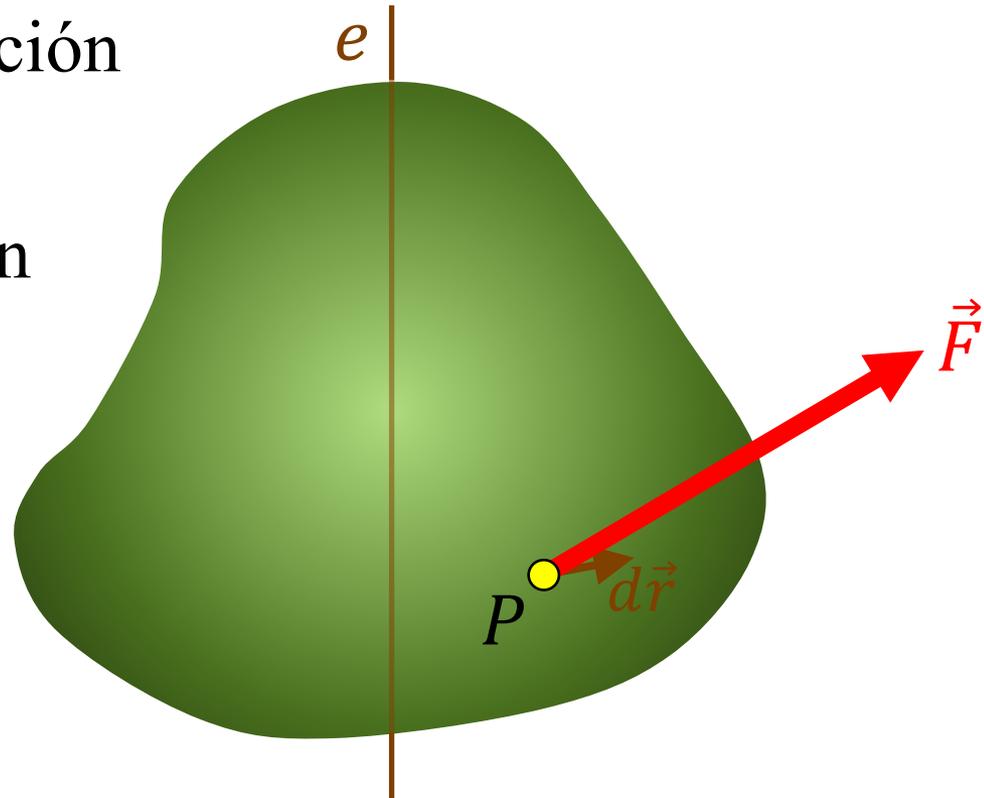
Trabajo de una fuerza en una rotación

Sea un sólido rígido en rotación alrededor de un eje e .

Sea una fuerza \vec{F} aplicada en un punto P del sólido.

Por definición, el trabajo realizado por \vec{F} a lo largo de un diferencial de desplazamiento* $d\vec{r}$ de P es

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



* Aun siendo diferencial, en este documento se representa gráficamente con módulo finito para visualizar su orientación.

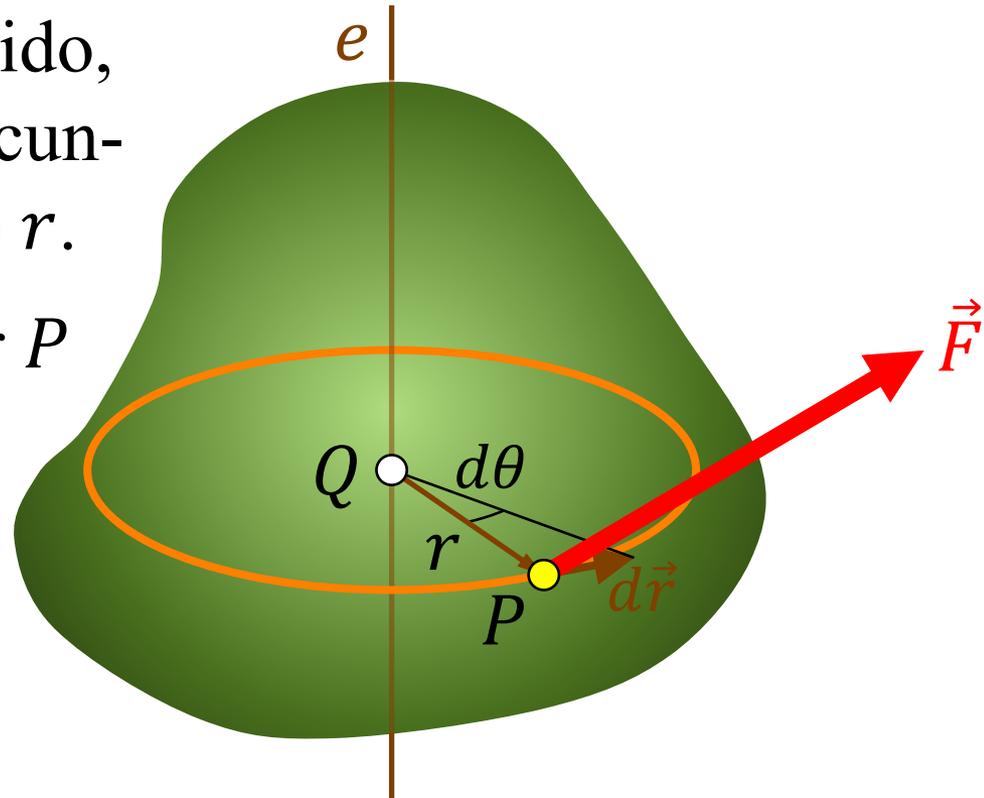
Trabajo de una fuerza en una rotación

Puesto que P gira con el sólido, $d\vec{r}$ se encuentra sobre la circunferencia de centro Q y radio r .

Sea $d\theta$ el ángulo girado por P al desplazarse $d\vec{r}$.

El módulo de $d\vec{r}$ es la longitud del arco recorrido sobre la circunferencia. Por tanto,

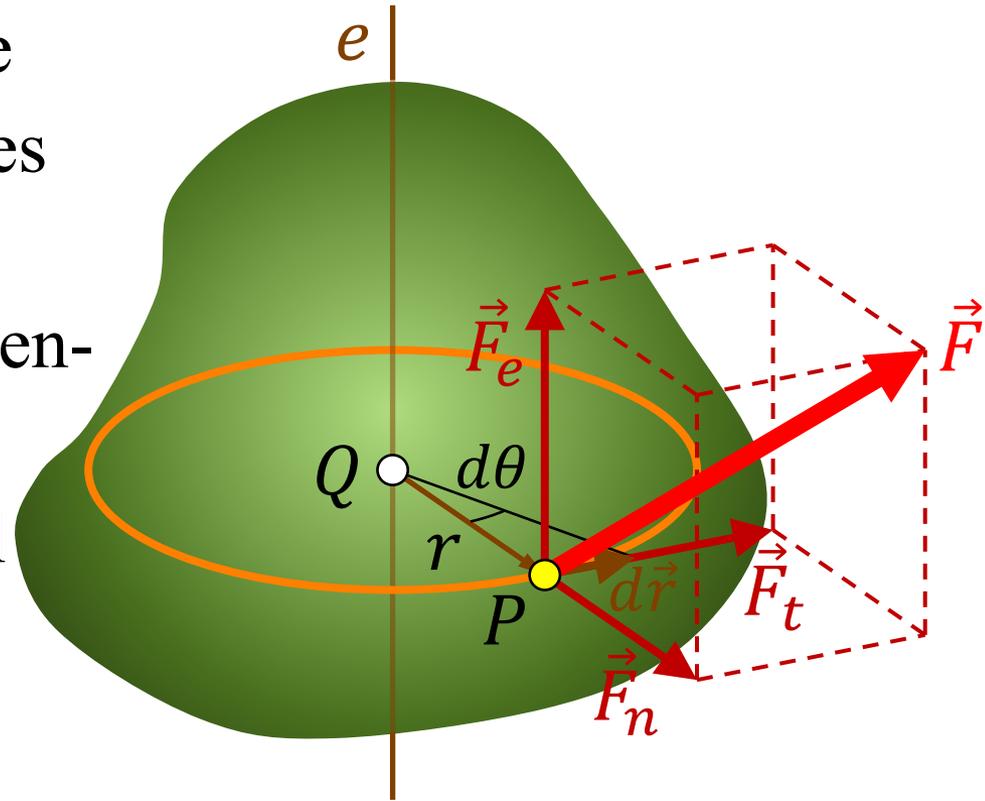
$$dr = r d\theta$$



Trabajo de una fuerza en una rotación

Como ya sabemos, se puede descomponer \vec{F} en tres partes perpendiculares entre sí:

- \vec{F}_t , tangente a la circunferencia;
- \vec{F}_n , en la dirección normal dada por su radio;
- \vec{F}_e , paralela al eje de giro.



Así,

$$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n + \vec{F}_e$$

Trabajo de una fuerza en una rotación

Por tanto,

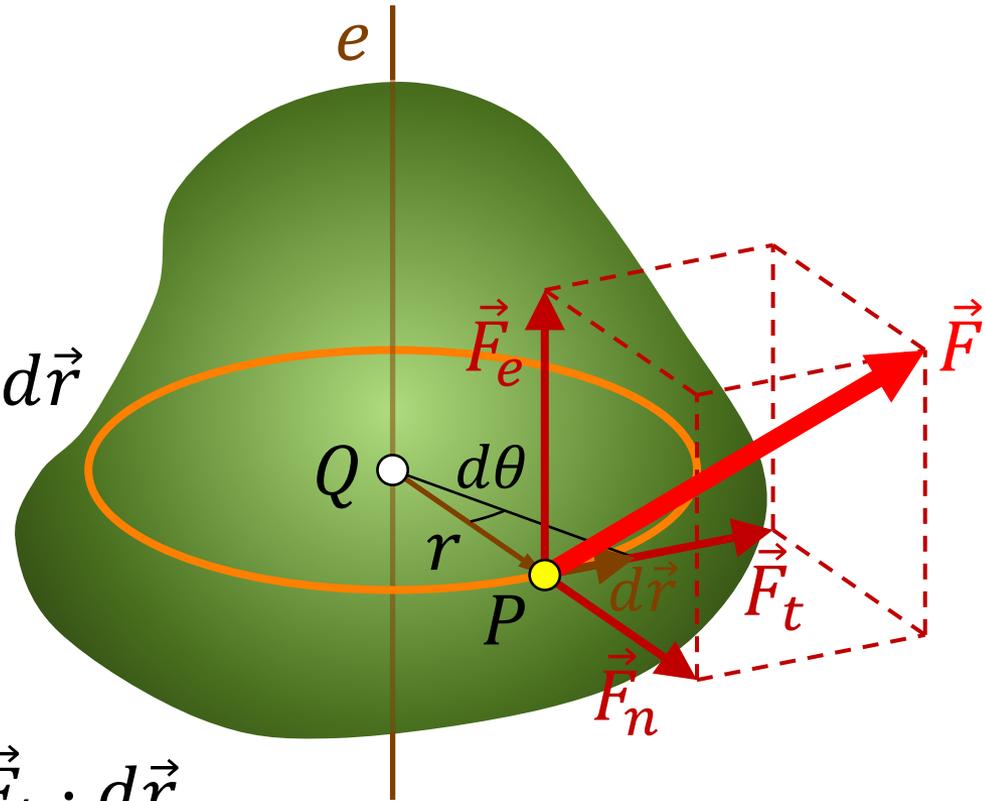
$$\begin{aligned}dW &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = \\&= (\vec{F}_t + \vec{F}_n + \vec{F}_e) \cdot d\vec{r} = \\&= \vec{F}_t \cdot d\vec{r} + \vec{F}_n \cdot d\vec{r} + \vec{F}_e \cdot d\vec{r}\end{aligned}$$

\vec{F}_n y \vec{F}_e son perpendiculares a $d\vec{r}$, por lo que es

$$dW = \vec{F}_t \cdot d\vec{r} + 0 + 0 = \vec{F}_t \cdot d\vec{r}$$

Suponiendo que \vec{F}_t tiene el mismo sentido que $d\vec{r}$, resulta

$$dW = F_t dr \cos 0 = F_t dr = F_t (r d\theta) = (F_t r) d\theta$$



Trabajo de una fuerza en una rotación

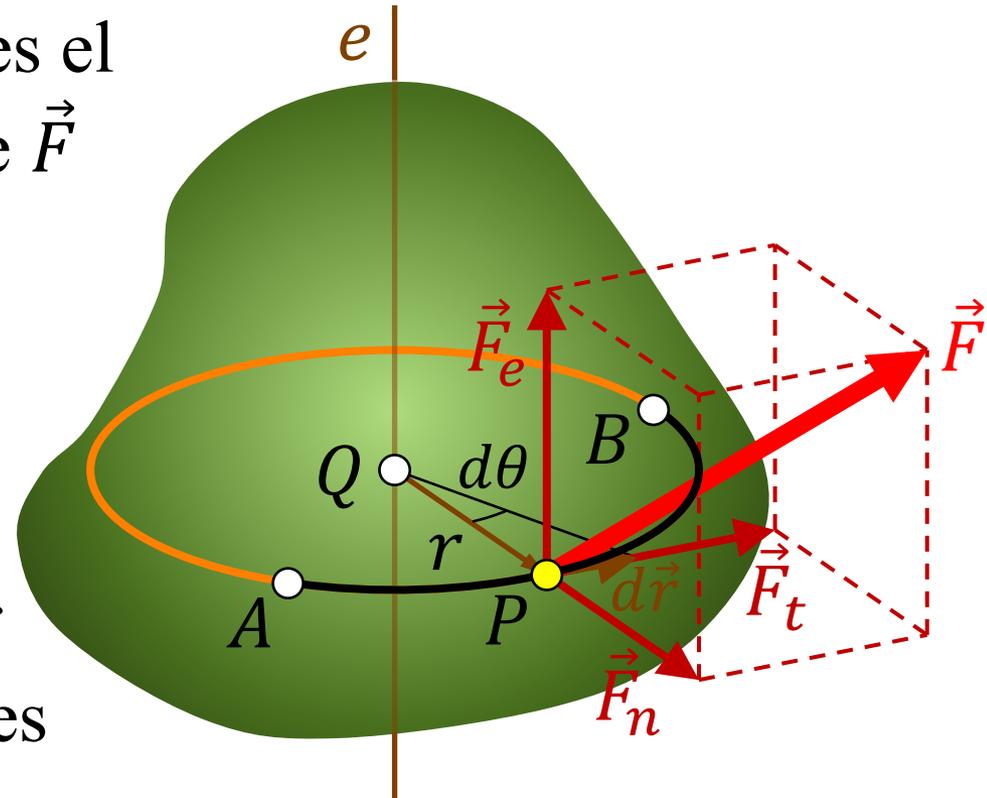
Como ya se demostró, $F_t r$ es el módulo del momento \vec{M}_e de \vec{F} respecto al eje de giro.

Por tanto,

$$dW = (F_t r) d\theta = M_e d\theta$$

Así, el trabajo realizado por \vec{F} a lo largo de un arco AB es

$$W = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M_e d\theta$$



Criterio de signos:*

M_e es positivo si ayuda a la rotación; negativo si la dificulta.

* En el desarrollo se supuso que \vec{F}_t tiene el mismo sentido que $d\vec{r}$. Si tienen sentidos contrarios, dW será negativo. Se puede generalizar el resultado obtenido haciendo que M_e sea un “módulo con signo”.

Trabajo de una fuerza en una rotación

Caso particular

Si M_e es constante, resulta

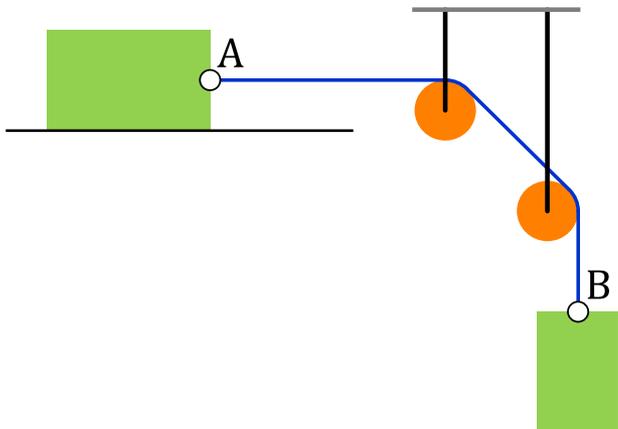
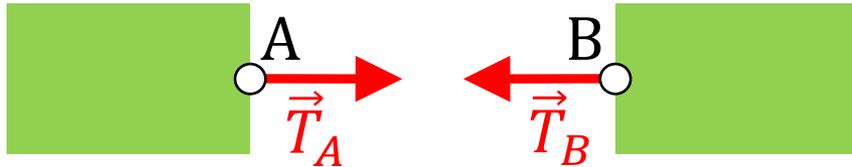
$$W = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M_e d\theta = M_e \int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta = M_e [\theta]_{\theta_A}^{\theta_B} = M_e (\theta_B - \theta_A)$$

Así, si $\theta = \theta_B - \theta_A$ es el ángulo girado y M_e es el “módulo con signo” constante del momento de \vec{F} respecto al eje de giro, el trabajo de dicha fuerza durante ese giro es

$$W = M_e \theta$$

Trabajo de las tensiones

Sea una cuerda (o hilo, o cable) ideal tensa, actuando entre dos sólidos rígidos.



Sabemos que, por ser inextensible, los puntos A y B tienen el mismo desplazamiento.

Sabemos que, por carecer de masa, es

$$\vec{T}_A = -\vec{T}_B$$

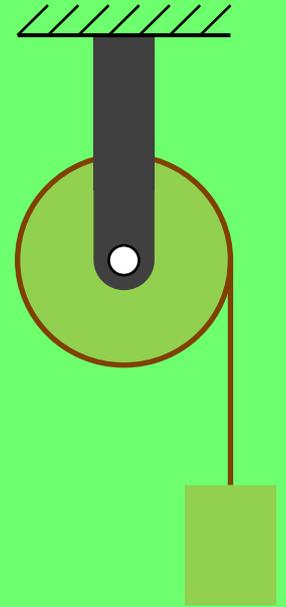
Como consecuencia de ambos hechos, sus trabajos son

$$W_{\vec{T}_A} = -W_{\vec{T}_B}$$

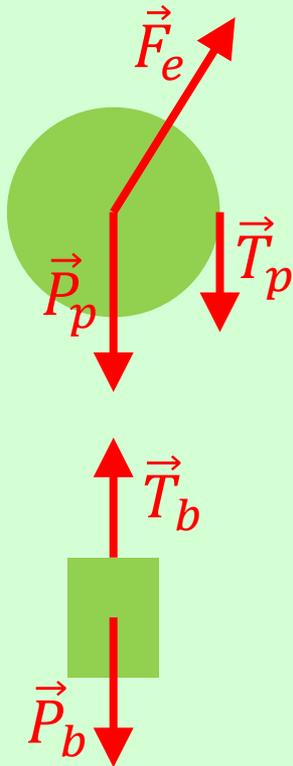
Se puede llegar a la misma conclusión con sistemas más complejos.

Ejercicio 15

Una polea, con un eje rígido en su centro, tiene 3 kg de masa, 0,2 m de radio, y $0,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto a dicho eje. La polea tiene arrollada una cuerda ideal de cuyo extremo cuelga un bloque de 10 kg. El sistema parte del reposo. Utilizando el teorema de la energía cinética, obténgase el módulo de la tensión en la cuerda, así como el módulo de la velocidad del bloque tras descender 2 m.



El primer paso es realizar los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos implicados: la polea y el bloque.



\vec{P}_p : peso de la polea.

\vec{T}_p : fuerza ejercida por la cuerda sobre la polea.

\vec{F}_e : fuerza ejercida por el eje sobre la polea.

\vec{P}_b : peso del bloque.

\vec{T}_b : fuerza ejercida por la cuerda sobre el bloque.

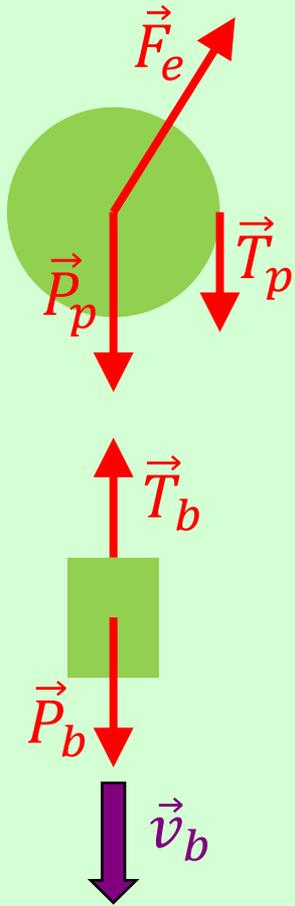
Aplicando el teorema de la energía cinética a cada uno de estos cuerpos, supuestos indeformables, entre la situación inicial y tras haber descendido el bloque 2 m, es

$$\Delta E_{c_p} = W_{\vec{P}_p} + W_{\vec{T}_p} + W_{\vec{F}_e}$$

$$\Delta E_{c_b} = W_{\vec{P}_b} + W_{\vec{T}_b}$$

Aquí ΔE_{c_p} y ΔE_{c_b} son los correspondientes incrementos de energía cinética de la polea y del bloque, respectivamente.

Vamos a desarrollar los términos de esas expresiones. Sean:



v_b : módulo de la velocidad del bloque cuando ha descendido $s_b = 2$ m.

ω_p : módulo de la velocidad angular de la polea en ese instante.

θ_p : ángulo girado por la polea hasta ese instante.

$$\Delta E_{c_p} = \frac{1}{2} 0,1 \omega_p^2 - \frac{1}{2} 0,1 \times 0^2 = 0,05 \omega_p^2 \text{ (SI)}$$

$$W_{\vec{P}_p} = 0 \text{ J (punto de aplicación inmóvil)}$$

$$W_{\vec{T}_p} = M_{\vec{T}_p} \theta_p = (T \times 0,2) \theta_p = 0,2 \theta_p T \text{ (SI)}$$

$$W_{\vec{F}_e} = 0 \text{ J (punto de aplicación inmóvil)}$$

$$\Delta E_{c_b} = \frac{1}{2} 10 v_b^2 - \frac{1}{2} 10 \times 0^2 = 5 v_b^2 \text{ (SI)}$$

$$\begin{aligned} W_{\vec{P}_b} &= -\Delta E_{p_b} = -m_b g \Delta h_b = \\ &= -10 \times 9,8 \times (-2) = 196 \text{ J} \end{aligned}$$

$$W_{\vec{T}_b} = -T d = -T 2 = -2T \text{ (SI)}$$

En el punto A , donde la cuerda se mueve solidariamente con el punto de la polea con el que está en contacto, es

$$v_A = \omega_p 0,2$$

En el punto B , donde la cuerda se mueve solidariamente con el punto del bloque al que está anclada, es

$$v_B = v_b$$

Por la presencia de la cuerda ideal, es

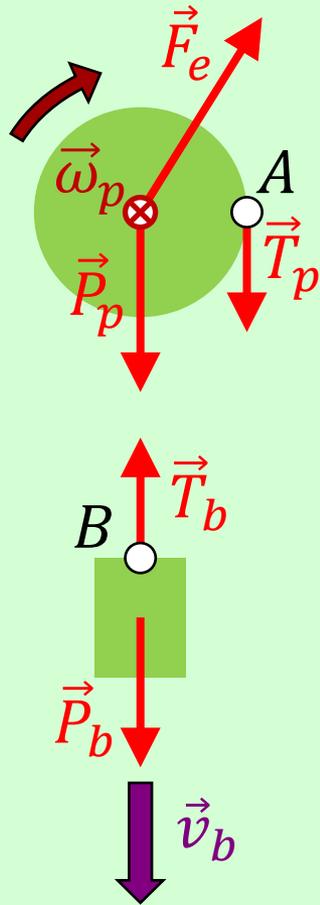
$$v_A = v_B \Rightarrow \omega_p 0,2 = v_b \Rightarrow \omega_p = 5v_b$$

Se trata de una “relación de velocidades por cuerda”.

Por otra parte, al girar la polea un ángulo θ_p se desenrolla una longitud de cuerda $\theta_p 0,2$ que debe coincidir con la distancia $s_b = 2$ m que recorre el bloque. Por tanto

$$\theta_p 0,2 = s_b \Rightarrow \theta_p = s_b / 0,2 = 2 / 0,2 = 10 \text{ rad}$$

Nótese que la relación $\omega_p 0,2 = v_b$ corresponde a la derivación de $\theta_p 0,2 = s_b$. Derivando de nuevo resulta la relación $\alpha_p 0,2 = a_b$ utilizada en el ejercicio 3.



Resumendo:

$$\Delta E_{c_p} = W_{\vec{P}_p} + W_{\vec{T}_p} + W_{\vec{F}_e} \longrightarrow 1,25v_b^2 = 0 + 2T + 0 = 2T$$

$$\Delta E_{c_p} = 0,05\omega_p^2 = 0,05(5v_b)^2 = 1,25v_b^2 \text{ (SI)}$$

$$W_{\vec{P}_p} = 0 \text{ J}$$

$$W_{\vec{T}_p} = 0,2\theta_p T = 0,2 \times 10T = 2T \text{ (SI)}$$

$$W_{\vec{F}_e} = 0 \text{ J}$$

$$\Delta E_{c_b} = W_{\vec{P}_b} + W_{\vec{T}_b} \longrightarrow 5v_b^2 = 196 + (-2T) = 196 - 2T$$

$$\Delta E_{c_b} = 5v_b^2 \text{ (SI)}$$

$$W_{\vec{P}_b} = 196 \text{ J}$$

$$W_{\vec{T}_b} = -2T \text{ (SI)}$$

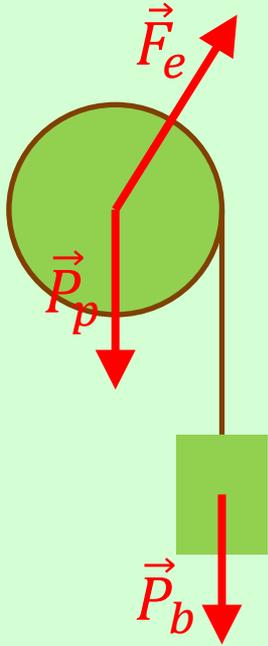
Nótese que, como se indicó en el apartado “Trabajo de las tensiones”, $W_{\vec{T}_p}$ y $W_{\vec{T}_b}$ son opuestos.

$$\left. \begin{array}{l} 1,25v_b^2 = 2T \\ 5v_b^2 = 196 - 2T \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumando estas dos ecuaciones, resulta} \\ \longrightarrow 6,25v_b^2 = 196 \Rightarrow v_b = 5,6 \text{ m/s} \end{array}$$

Por tanto,

$$1,25v_b^2 = 2T \Rightarrow 2T = 1,25 \times 5,6^2 = 39,2 \Rightarrow T = 19,6 \text{ N}$$

Alternativa: trabajar con el sistema polea+bloque. Comenzamos con el correspondiente diagrama de cuerpo libre de dicho sistema.

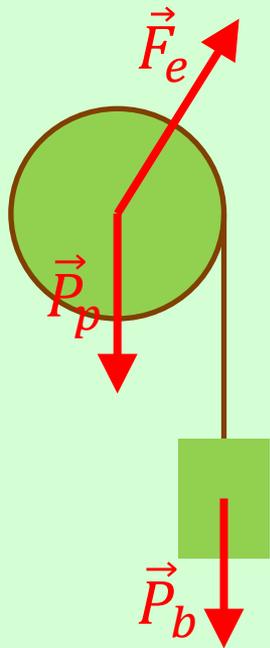


Aplicando el teorema de la energía cinética a este sistema, entre la situación inicial y tras haber descendido el bloque 2 m, es

$$\Delta E_{c_p} + \Delta E_{c_b} = W_{\vec{P}_p} + W_{\vec{F}_e} + W_{\vec{P}_b}$$

Aquí hay que destacar algunos detalles.

- Hay que incluir la energía cinética de la cuerda, pero es cero ya que, al ser ideal, carece de masa.
- Como de costumbre, se ha supuesto que la polea y el bloque son indeformables.
- La cuerda se deforma, pero aun así el trabajo total de sus fuerzas interiores es cero al ser ideal.



Es:

$$\begin{aligned}\Delta E_{c_p} &= \frac{1}{2} 0,1 \omega_b^2 - \frac{1}{2} 0,1 \times 0^2 = 0,05 \omega_b^2 = \\ &= 0,05 (5 v_b)^2 = 1,25 v_b^2 \text{ (SI)}\end{aligned}$$

$$\Delta E_{c_b} = \frac{1}{2} 10 v_b^2 - \frac{1}{2} 10 \times 0^2 = 5 v_b^2 \text{ (SI)}$$

$$W_{\vec{P}_p} = 0 \text{ J (punto de aplicación inmóvil)}$$

$$W_{\vec{F}_e} = 0 \text{ J (punto de aplicación inmóvil)}$$

$$\begin{aligned}W_{\vec{P}_b} &= -\Delta E_{p_b} = -m_b g \Delta h_b = \\ &= -10 \times 9,8 \times (-2) = 196 \text{ J}\end{aligned}$$

Así,

$$\Delta E_{c_p} + \Delta E_{c_b} = W_{\vec{P}_p} + W_{\vec{F}_e} + W_{\vec{P}_b}$$

$$1,25 v_b^2 + 5 v_b^2 = 0 + 0 + 196 \Rightarrow 6,25 v_b^2 = 196 \Rightarrow v_b = 5,6 \text{ m/s}$$

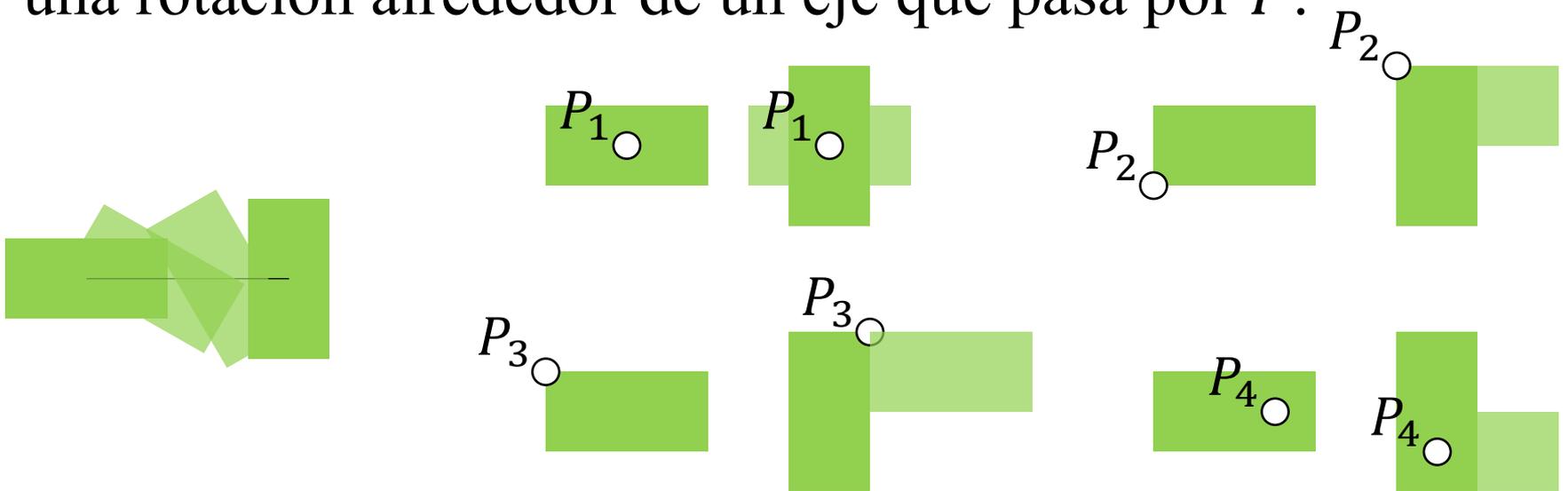
Conociendo ya v_b , el valor de T puede obtenerse aplicando el teorema de la energía cinética al bloque.

II.- Traslación + rotación

Movimiento de traslación + rotación

En general, el movimiento de un sólido rígido puede descomponerse en dos partes:

- una traslación en la que un punto P del sólido pasa a su nueva posición;
- una rotación alrededor de un eje que pasa por P .

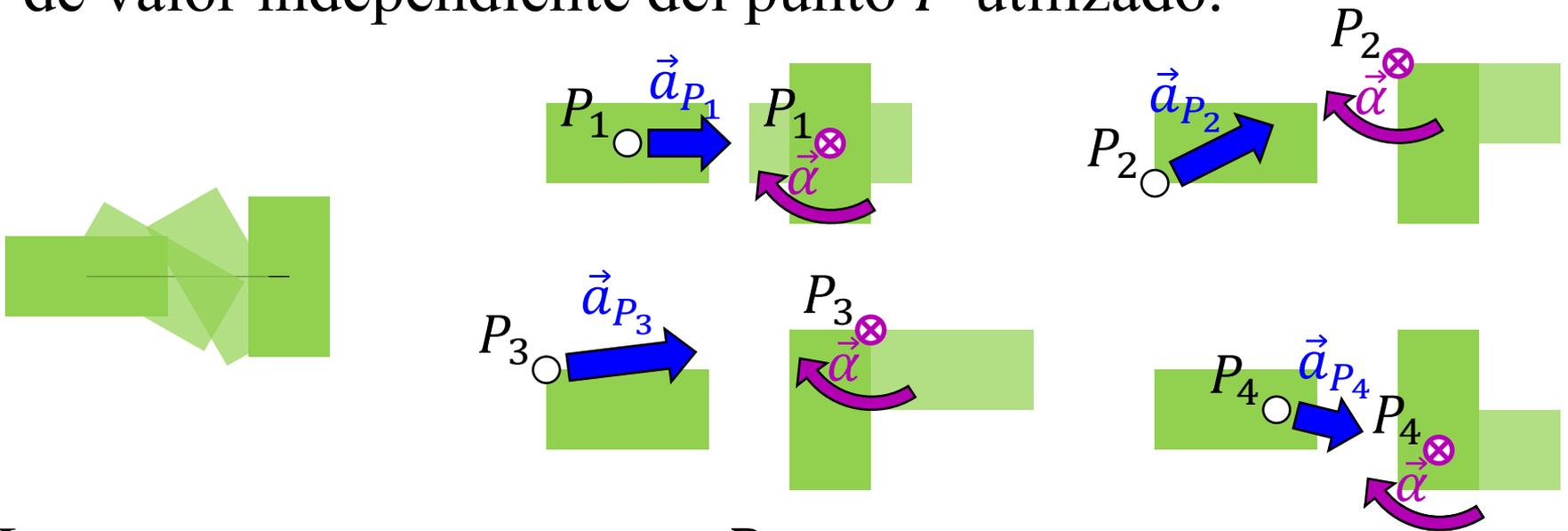


Vemos que, aunque el resultado final es el mismo, la descomposición depende del punto P elegido.

Movimiento de traslación + rotación

¿Cómo se caracteriza el movimiento?

- En la traslación, todo el sólido tiene la aceleración \vec{a}_P del propio punto P .
- En la rotación, el sólido tiene aceleración angular $\vec{\alpha}$, de valor independiente del punto P utilizado.



Hay que optar por un punto P .

¿Qué elección es más conveniente?

Movimiento de traslación + rotación

Para contestar a esta pregunta, hay que estudiar cómo se relacionan las fuerzas aplicadas a un sólido rígido con el movimiento que causan.



Como a cualquier cuerpo, se le puede aplicar el teorema del centro de masas.

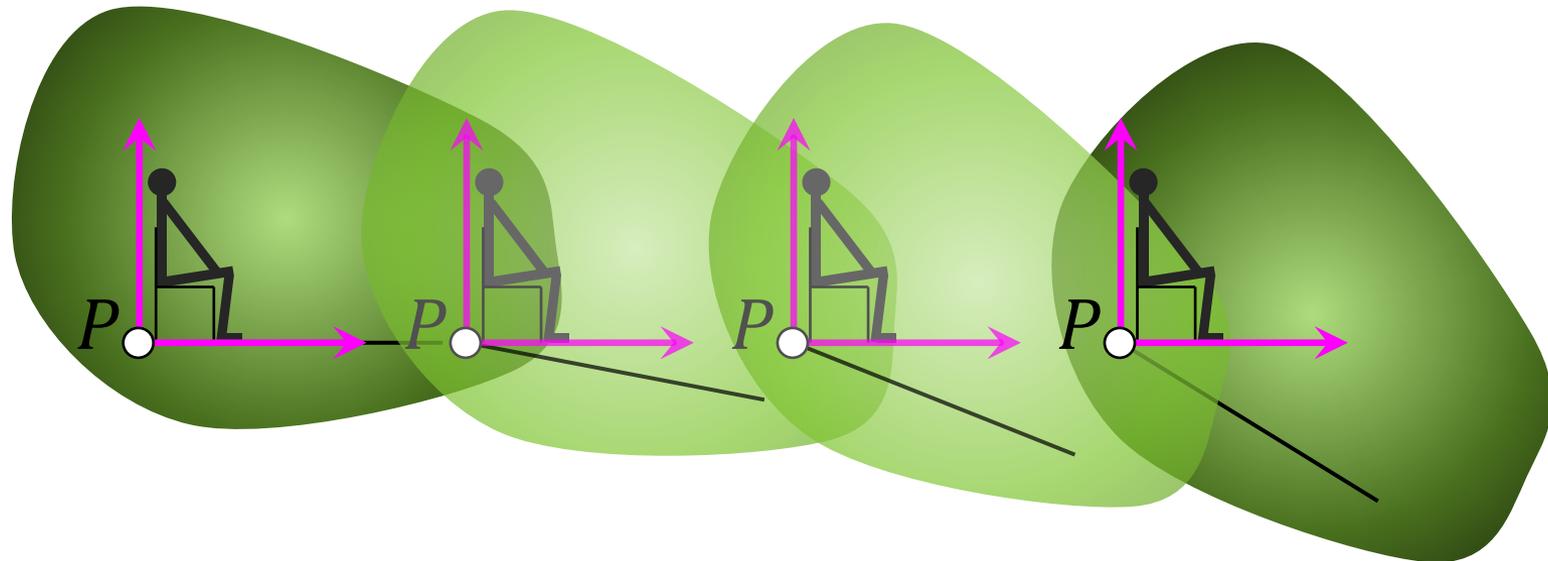
Sin embargo, por no estar en rotación alrededor de un eje fijo, no es de aplicación la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación.

Movimiento de traslación + rotación

Sea un sistema de referencia móvil tal que:

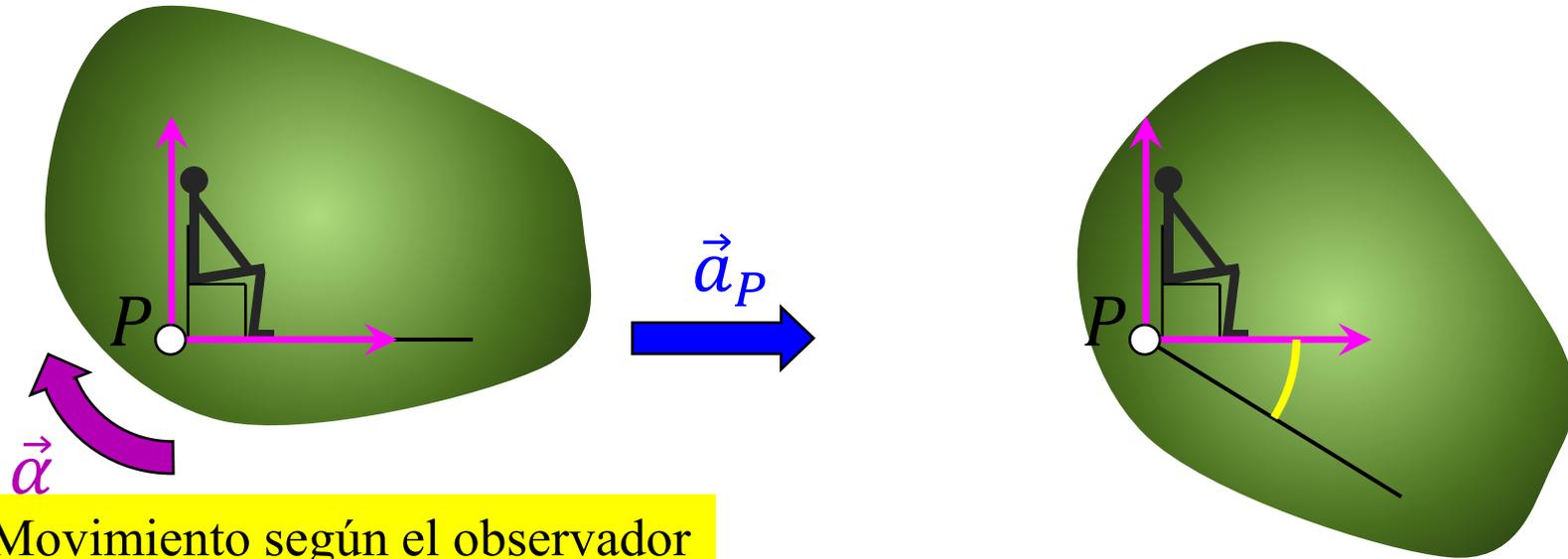
- su origen de coordenadas está ligado a un cierto punto P del sólido rígido;
- no gira.

Sea un observador ligado a ese sistema de referencia.

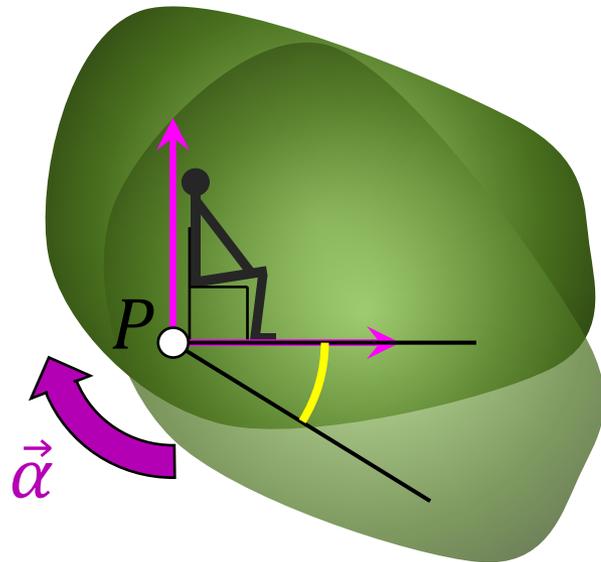


Movimiento de traslación + rotación

Movimiento real



Movimiento según el observador

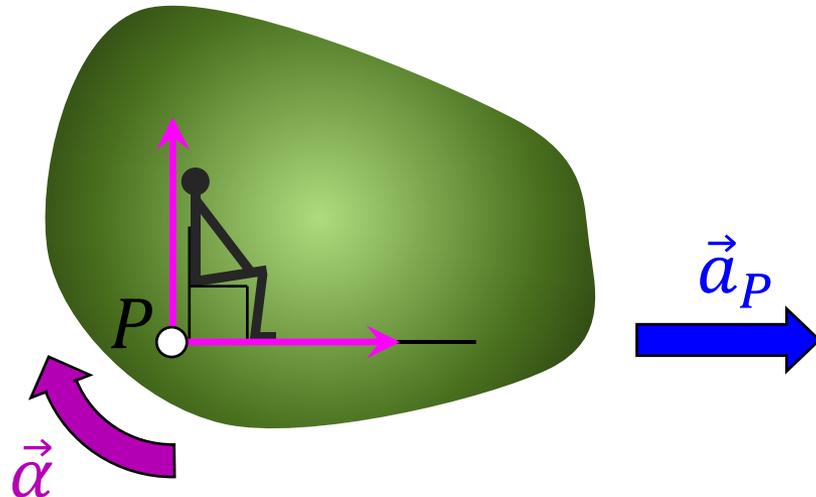


Para el observador, el movimiento del sólido es una rotación alrededor de un eje que pasa por P .

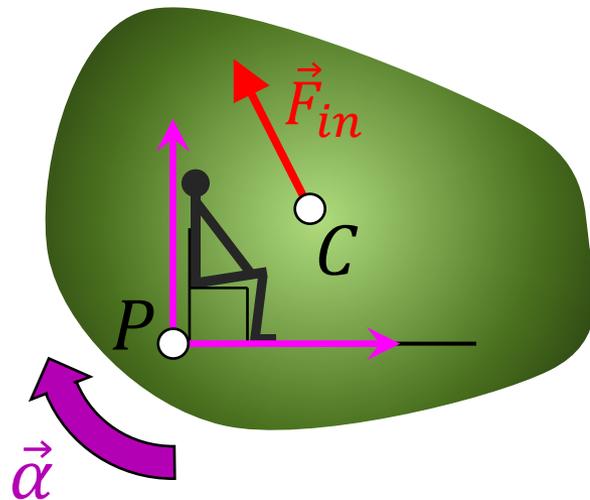
El ángulo girado según el observador es igual al real. Por tanto, también percibe la aceleración angular real.

Movimiento de traslación + rotación

Movimiento real



Movimiento según el observador



Consecuencia

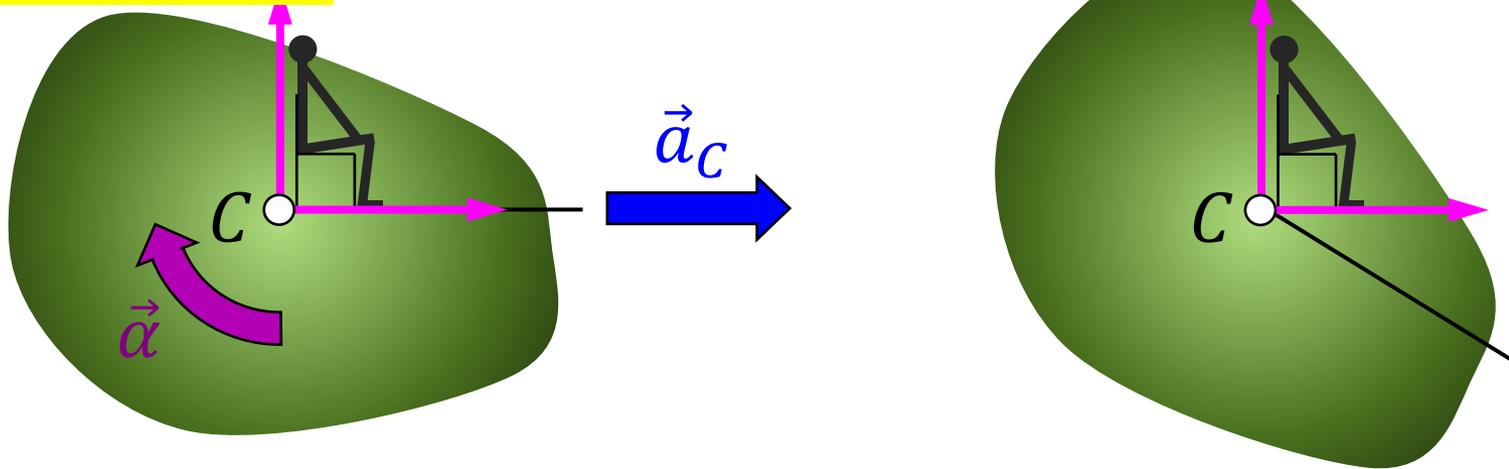
Desde el punto de vista del observador, es correcto aplicar el teorema fundamental de la Dinámica de rotación, siendo $\vec{\alpha}$ la aceleración angular real, siempre que se incluyan los momentos de las fuerzas de inercia.

$$\vec{M} + \vec{M}_{in} = I_P \vec{\alpha}$$

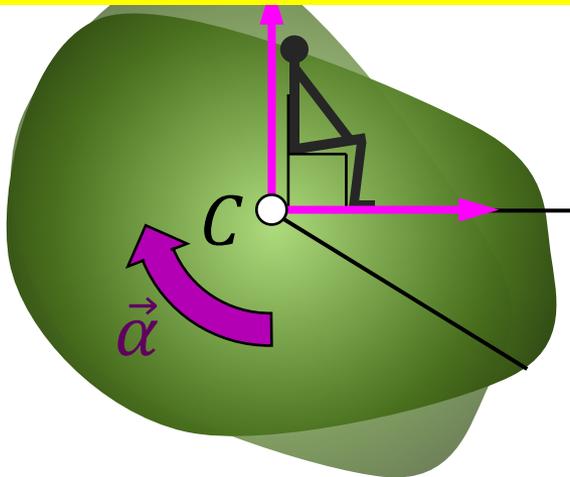
Recuérdese que el punto de aplicación de las fuerzas de inercia es el centro de masas.

Movimiento de traslación + rotación

Movimiento real



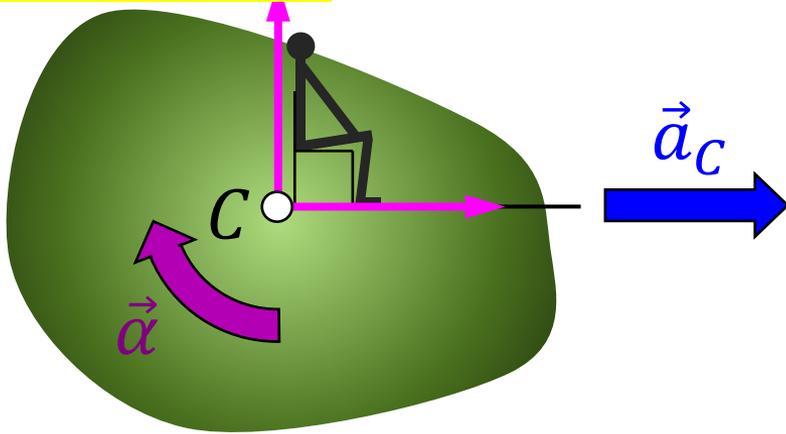
Movimiento según el observador



¿Y si se utiliza como punto P el centro de masas C del sólido?

Movimiento de traslación + rotación

Movimiento real



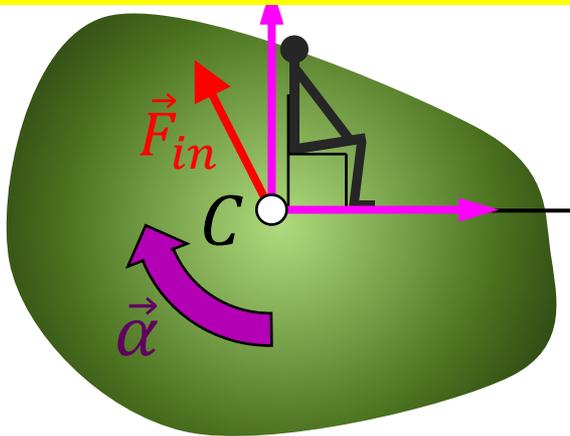
¿Qué ocurre en este caso con las fuerzas de inercia?

Que sus momentos respecto a un eje de giro que pasa por el centro de masas son nulos.

Por tanto,

$$\vec{M} = I_C \vec{\alpha}$$

Movimiento según el observador



Movimiento de traslación + rotación

Conclusión

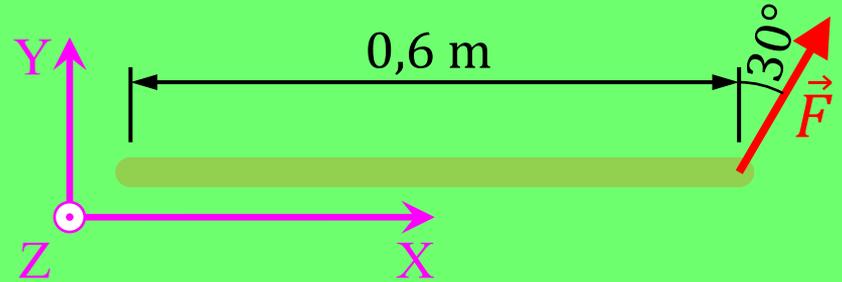
- El momento total de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sólido rígido, tomado respecto al eje, paralelo al de giro, que pasa por el centro de masas, es igual al momento de inercia del sólido respecto a este eje, multiplicado por la aceleración angular que adquiere.

$$\vec{M}_{e_c} = I_C \vec{\alpha}$$

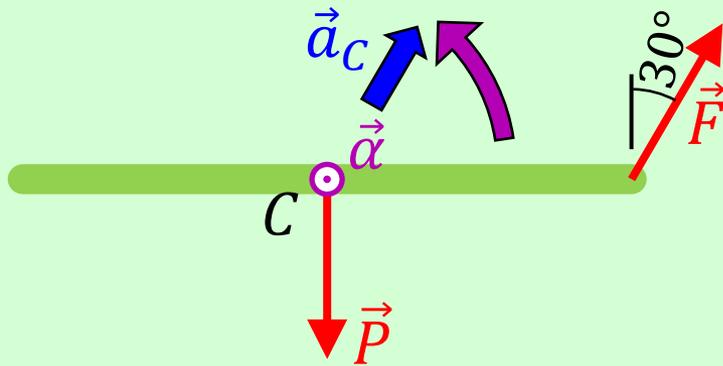
Ejercicio 16

En un instante dado, una barra delgada, de 2 kg de masa y 0,6 m de longitud, se encuentra horizontalmente en el aire. Mediante una

cuerda sujeta a uno de sus extremos, se tira con una fuerza \vec{F} de módulo 20 N y la orientación indicada en la figura. Obténgase la aceleración angular y la del centro de masas de la barra en ese instante, expresadas en el sistema de referencia de la figura.



El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, la barra en este caso.

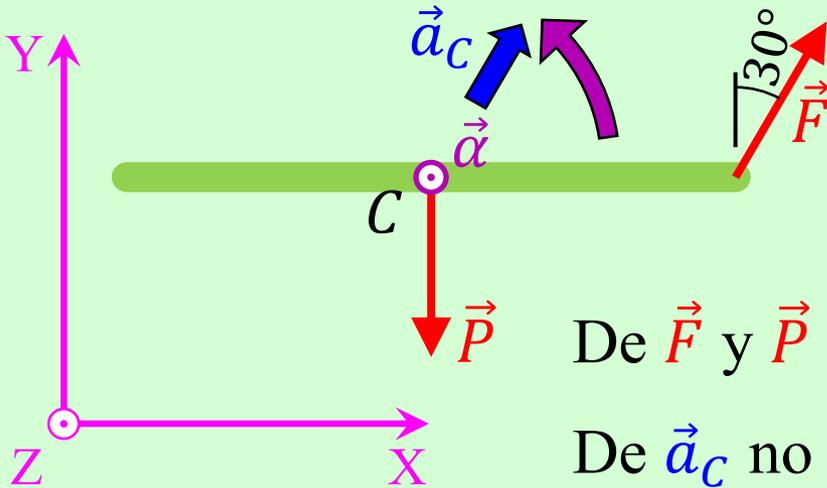


Las fuerzas que actúan sobre la barra son:

\vec{F} : fuerza ejercida por la cuerda.

\vec{P} : peso.

Como consecuencia de la acción de estas fuerzas, la barra tiene una aceleración del centro de masas \vec{a}_C , y una aceleración angular $\vec{\alpha}$ perpendicular al plano de la página.



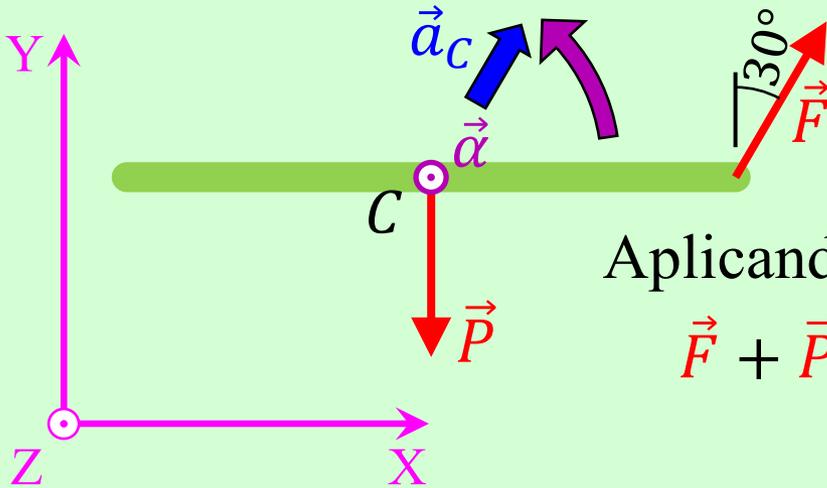
Sea el sistema de referencia dextrógiro indicado en el enunciado.

De \vec{F} y \vec{P} se conocen módulos y orientaciones.

De \vec{a}_C no se conocen módulo ni orientación. Por tanto, se desconocen sus componentes X e Y, aunque sí se sabe que la Z es 0.

De $\vec{\alpha}$ se conoce su dirección, pero no su módulo ni su sentido. Por tanto, se desconoce su componente Z, aunque sí se sabe que la X y la Y son 0.

Por tanto, tenemos 3 incógnitas: a_{C_x} , a_{C_y} y α_z . Necesitamos pues 3 ecuaciones.

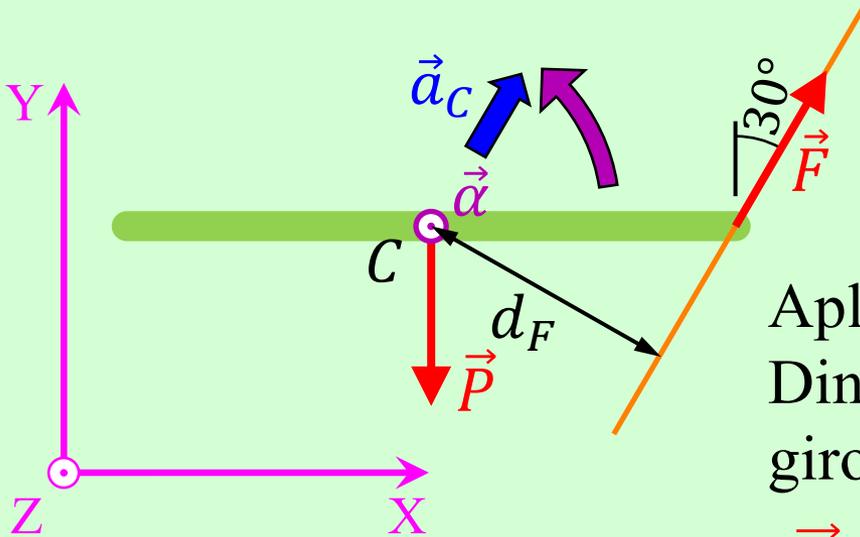


Aplicando el teorema del centro de masas, es

$$\vec{F} + \vec{P} = m\vec{a}_C$$

$$(20 \sin 30^\circ; 20 \cos 30^\circ; 0) + (0; -2 \times 9,8; 0) = 2 (a_{C_x}; a_{C_y}; 0)$$

$$\begin{cases} 10 = 2a_{C_x} \\ 17,32 - 19,6 = 2a_{C_y} \Rightarrow -2,28 = 2a_{C_y} \\ 0 = 0 \end{cases}$$



Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación al eje paralelo al de giro que pasa por el centro de masas, es

$$\vec{M}_{\vec{F}} + \vec{M}_{\vec{P}} = I_C \vec{\alpha}$$

Todos estos vectores tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación, resulta

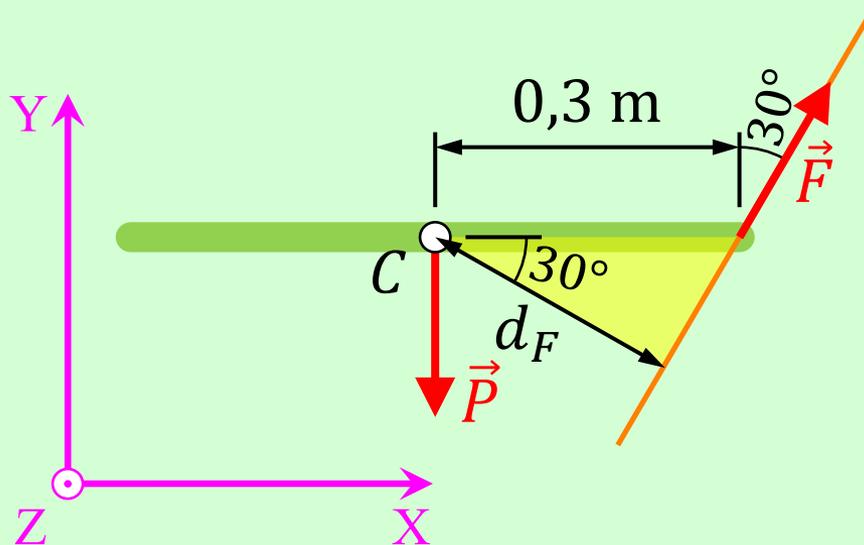
$$[20d_F] + 0 = \left(\frac{1}{12} 2 \times 0,6^2 \right) \alpha_z$$

- Fuerza de módulo 20 N.
- Brazo d_F .
- Sentido hacia fuera del plano de la página, idéntico pues al del eje Z.

Fuerza de brazo 0 m.

¿Y cómo podemos obtener el valor de d_F ?

El valor de d_F se puede obtener por trigonometría.



$$d_F = 0,3 \cos 30^\circ = 0,2598 \text{ m}$$

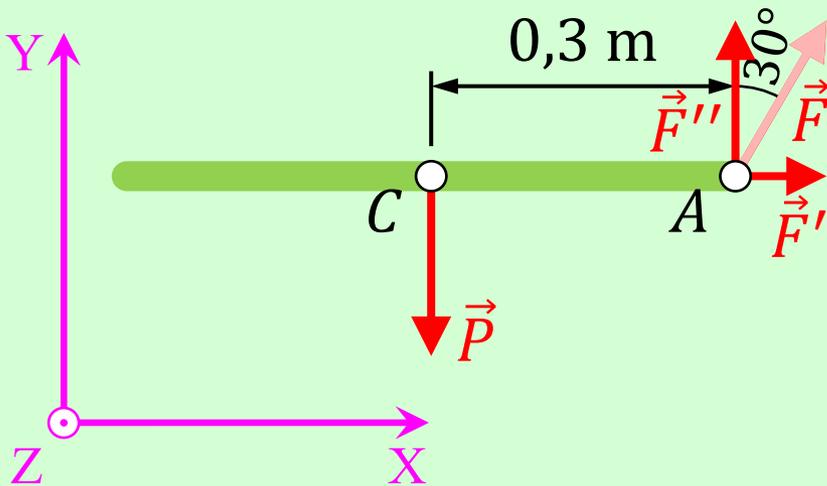
Por tanto, la componente Z de $\vec{M}_{\vec{F}}$ es
 $20d_F = 20 \times 0,2598 = 5,196 \text{ N} \cdot \text{m}$

En consecuencia,

$$5,196 + 0 = \left(\frac{1}{12} 2 \times 0,6^2 \right) \alpha_Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5,196 = 0,06 \alpha_Z$$

Otra posibilidad es descomponer \vec{F} en dos partes, \vec{F}' y \vec{F}'' , cuyos brazos sean sencillos de obtener.



Por el teorema de Varignon, el sistema formado por \vec{F}' y \vec{F}'' , concurrentes en A, es equivalente a \vec{F} . Por tanto, los momentos son idénticos:

$$\vec{M}_{\vec{F}} = \vec{M}_{\vec{F}'} + \vec{M}_{\vec{F}''}.$$

Así, por la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación es

$\vec{M}_{\vec{F}'} + \vec{M}_{\vec{F}''} + \vec{M}_{\vec{P}} = I_C \vec{\alpha}$. Utilizando únicamente la componente Z, es

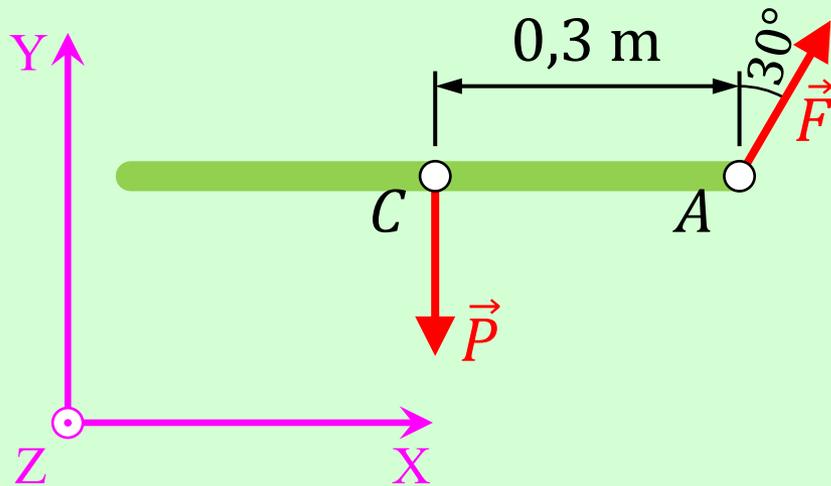
$$\left[((20 \text{ sen } 30^\circ) \times 0) + ((20 \text{ cos } 30^\circ) \times 0,3) \right] + 0 = \left(\frac{1}{12} 2 \times 0,6^2 \right) \alpha_z$$

- Fuerza de módulo $20 \text{ sen } 30^\circ$.
- Brazo 0 m.

- Fuerza de módulo $20 \text{ cos } 30^\circ$.
- Brazo 0,3 m.
- Sentido hacia fuera del plano de la página, idéntico pues al del eje Z.

Por tanto, $0 + 5,196 + 0 = \left(\frac{1}{12} 2 \times 0,6^2 \right) \alpha_z \Rightarrow 5,196 = 0,06 \alpha_z$

Una última posibilidad es obtener el momento de \vec{F} mediante el correspondiente producto vectorial.



$$\begin{aligned}\vec{M}_{\vec{F}} &= \vec{CA} \times \vec{F} = (0,3; 0; 0) \times (20 \sin 30^\circ; 20 \cos 30^\circ; 0) = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,3 & 0 & 0 \\ 10 & 17,32 & 0 \end{vmatrix} = (0; 0; 5,196) \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

Utilizando únicamente la componente Z de $\vec{M}_{\vec{F}} + \vec{M}_{\vec{P}} = I_C \vec{\alpha}$, resulta

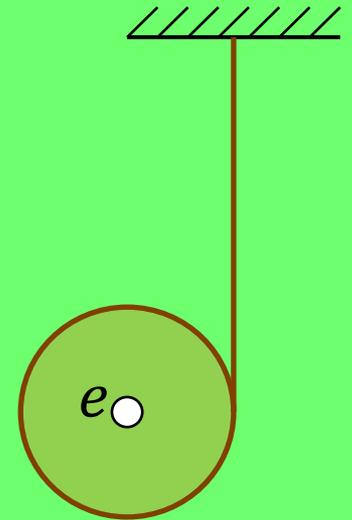
$$5,196 + 0 = \left(\frac{1}{12} 2 \times 0,6^2 \right) \alpha_z \Rightarrow 5,196 = 0,06 \alpha_z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 10 = 2a_{c_x} \longrightarrow a_{c_x} = 5 \text{ m/s}^2 \\ -2,28 = 2a_{c_y} \longrightarrow a_{c_y} = -1,14 \text{ m/s}^2 \end{array} \right\} \longrightarrow \vec{a}_c = (5; -1,14; 0) \text{ m/s}^2$$

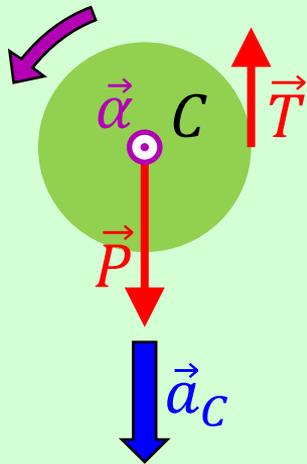
$$5,196 = 0,06\alpha_z \longrightarrow \alpha_z = 86,6 \text{ rad/s}^2 \longrightarrow \vec{\alpha} = (0; 0; 86,6) \text{ rad/s}^2$$

Ejercicio 17

Una polea, con su eje e libre, tiene 3 kg de masa, 0,2 m de radio, y $0,048 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto a dicho eje. La polea tiene arrollada una cuerda ideal cuyo extremo libre está unido al techo. El sistema parte del reposo. Aplicando el teorema del centro de masas y momentos, obténgase: los módulos de la aceleración del eje de la polea, de la aceleración angular, y de la tensión en la cuerda; el módulo de la velocidad del eje tras descender 0,56 m.



El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, la polea en este caso.



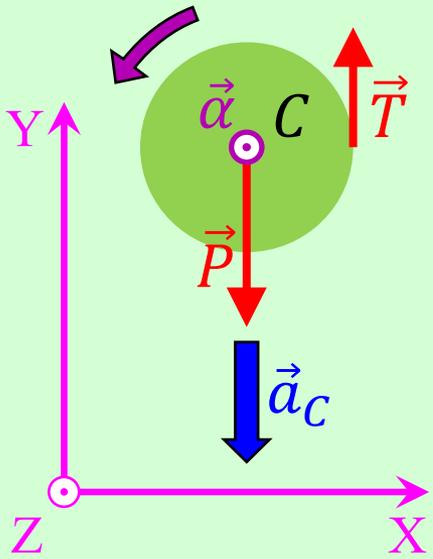
Las fuerzas que actúan sobre la polea son:

\vec{P} : peso de la polea.

\vec{T} : fuerza ejercida por la cuerda sobre la polea.

Como consecuencia de la acción de estas fuerzas, la polea tiene una aceleración del centro de masas \vec{a}_C , y una aceleración angular $\vec{\alpha}$ perpendicular al plano de la página, y hacia fuera por la regla de Maxwell.

Hay que establecer un sistema de referencia dextrógiro, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.



De \vec{P} se conocen su módulo y orientación.

De \vec{T} se conoce su orientación, pero no su módulo.

De \vec{a}_C y $\vec{\alpha}$ se conocen sus orientaciones, pero no sus módulos.

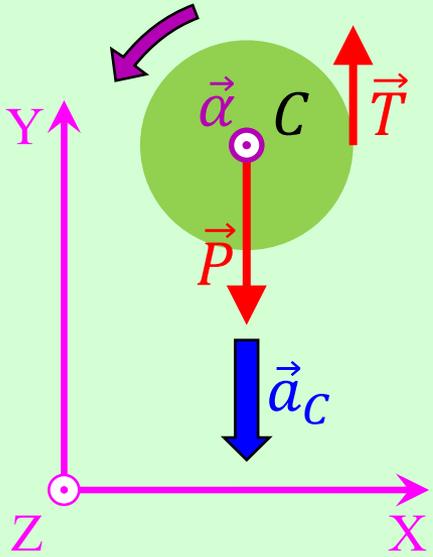
Por tanto, tenemos 3 incógnitas: T , a_C y α .
Necesitamos pues 3 ecuaciones.

Aplicando el teorema del centro de masas, es

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_C$$

$$(0; -3 \times 9,8; 0) + (0; T; 0) = 3(0; -a_C; 0)$$

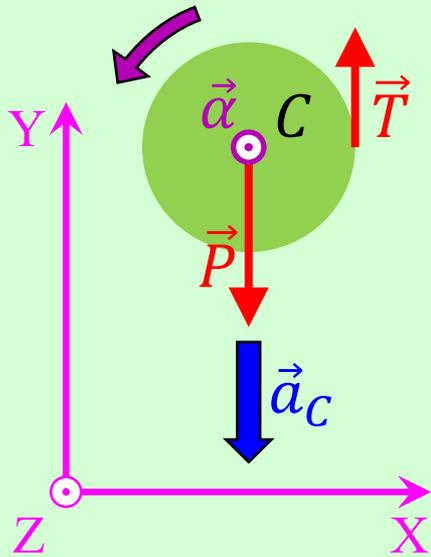
$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -29,4 + T = -3a_C \\ 0 = 0 \end{cases}$$



Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación al eje paralelo al de giro que pasa por el centro de masas, es

$$\vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{T}} = I_C \vec{\alpha}$$

Todos estos vectores tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación, resulta



$$0 + T \times 0,2 = 0,048(+\alpha) \Rightarrow 0,2T = 0,048\alpha$$

Fuerza de brazo 0 m.

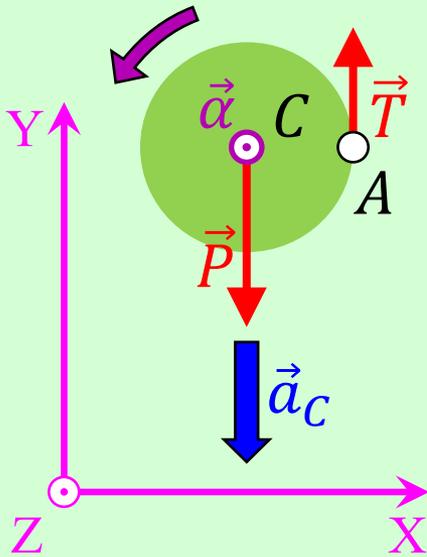
- Fuerza de módulo T .
- Brazo 0,2 m.
- Sentido hacia fuera del plano de la página, idéntico pues al del eje Z.

Sentido hacia fuera del plano de la página, idéntico pues al del eje Z.

La tercera ecuación es la relación de aceleraciones por cuerda.

En el punto A, la cuerda se mueve solidariamente con el punto de la polea con el que está en contacto. Su aceleración en la dirección de la cuerda es la suma de:

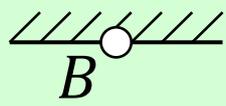
- la $\vec{a}_{A_{tr}}$ que tiene por el movimiento de traslación;
- la $\vec{a}_{A_{rt}}$ que tiene por el movimiento de rotación.



The diagram shows the decomposition of the acceleration at point A. On the left, a pulley with center C and contact point A has a blue vector \vec{a}_C pointing down and a brown vector $\vec{a}_{A_{tr}}$ pointing down from A. In the middle, a plus sign is followed by a pulley with center C and contact point A having a purple curved arrow $\vec{\alpha}$ and a brown vector $\vec{a}_{A_{rt}}$ pointing up from A. An equals sign follows, leading to a pulley with center C and contact point A having a purple curved arrow $\vec{\alpha}$ and a brown vector \vec{a}_A pointing down from A, with a blue vector \vec{a}_C pointing down from the center.

$$a_{A_{tr}} = a_C \quad a_{A_{rt}} = \alpha \times 0,2 \quad a_A = a_C - \alpha \times 0,2$$

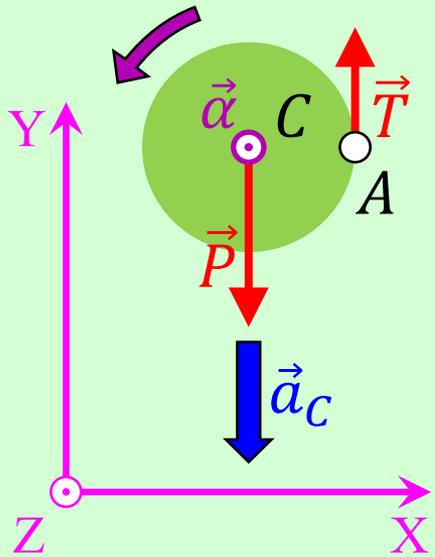
Analíticamente, $\vec{a}_A = \vec{a}_{A_{tr}} + \vec{a}_{A_{rt}} = (0; -a_C; 0) + (0; \alpha \times 0,2; 0) = (0; -a_C + \alpha \times 0,2; 0) = (0; -[a_C - \alpha \times 0,2]; 0)$



En el punto B , donde la cuerda está anclada al techo, es $a_B = 0$.

Por la presencia de la cuerda ideal, es

$$a_A = a_B \Rightarrow a_C - \alpha \times 0,2 = 0$$



$$\begin{cases} -29,4 + T = -3a_c \\ 0,2T = 0,048\alpha \rightarrow T = 0,24\alpha \\ a_c - \alpha \times 0,2 = 0 \rightarrow a_c = 0,2\alpha \end{cases}$$

$$\rightarrow -29,4 + 0,24\alpha = -0,6\alpha \rightarrow 0,84\alpha = 29,4 \rightarrow \alpha = 35 \text{ rad/s}^2$$

Por tanto,

$$a_c = 0,2\alpha = 0,2 \times 35 = 7 \text{ m/s}^2$$

$$T = 0,24\alpha = 0,24 \times 35 = 8,4 \text{ N}$$

El movimiento del eje de la polea es rectilíneo con a_c constante. Por tanto,

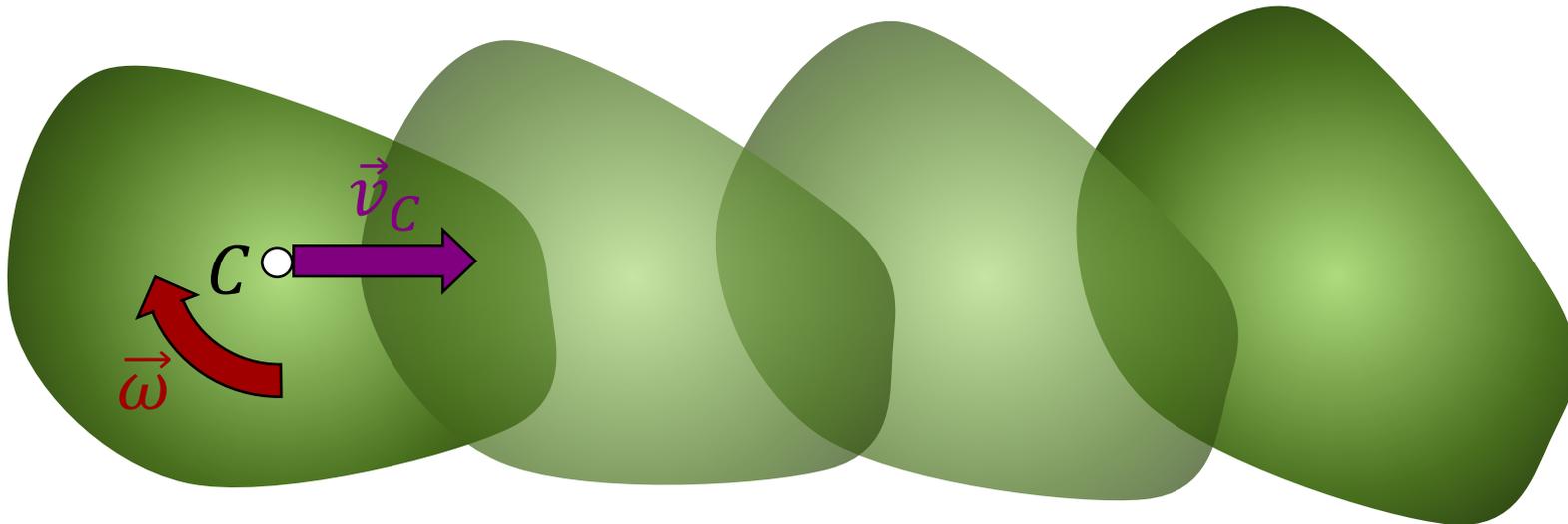
$$v_c = \sqrt{v_{c_0}^2 + 2a_c(s_c - s_{c_0})} = \sqrt{0^2 + 2 \times 7 \times 0,56} = 2,8 \text{ m/s}$$

Energía cinética

La energía cinética de un sistema de puntos materiales es

$$E_c = \sum E_{c_i} = \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$$

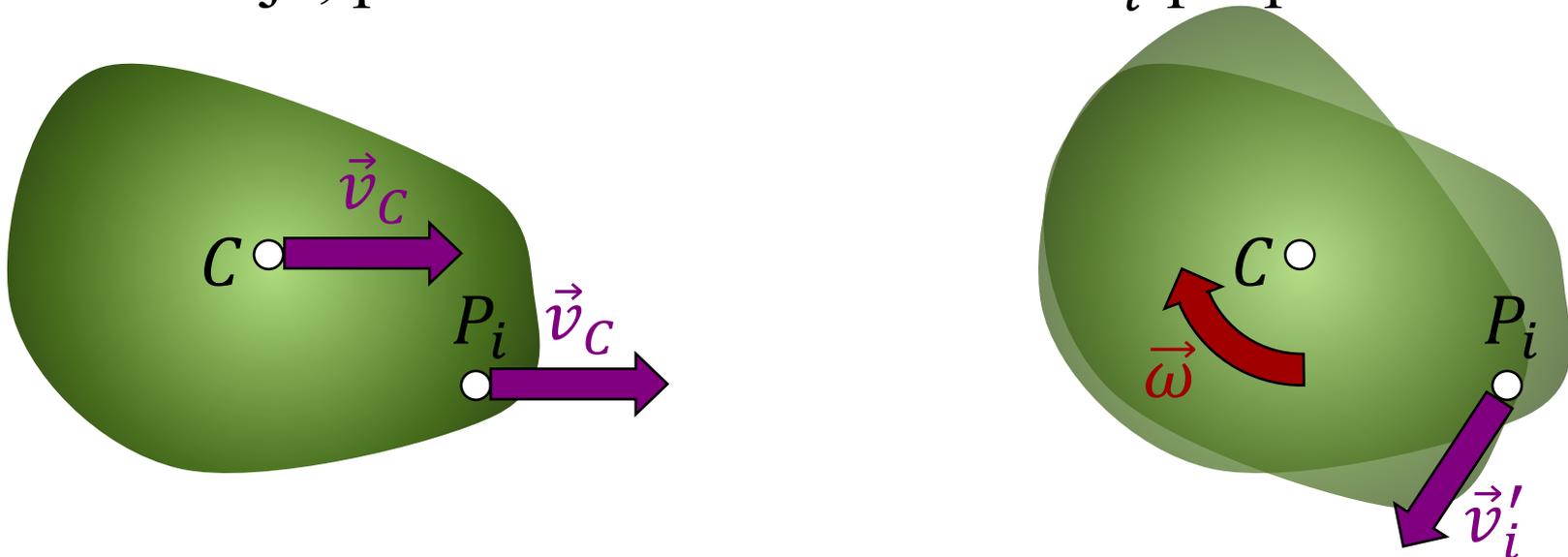
¿Y si se trata, en particular, de un sólido rígido en movimiento de traslación más rotación?



Energía cinética

Una vez más, descomponemos el movimiento en dos partes.

- Una traslación en la que el centro de masas C pasa a su nueva posición. Cualquier punto material P_i tiene la misma velocidad \vec{v}_C que C .
- Una rotación con velocidad angular $\vec{\omega}$ alrededor de un eje que pasa por C . Cualquier punto gira alrededor de dicho eje, pero tiene una velocidad \vec{v}'_i propia.

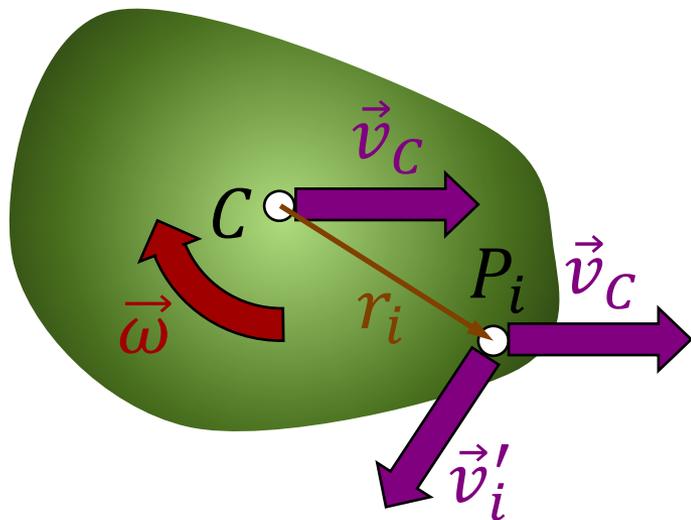


Energía cinética

La velocidad del punto P_i es $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}'_i$.

El módulo de \vec{v}'_i es $v'_i = \omega r_i$, donde r_i es la distancia de P_i al eje de giro de la fase de rotación.

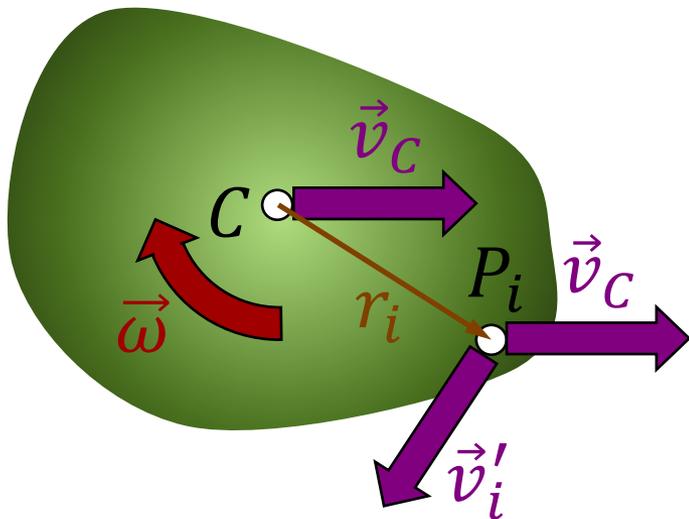
$$\begin{aligned} \text{Es } v_i^2 &= \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = (\vec{v}_C + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_C + \vec{v}'_i) = \\ &= \vec{v}_C \cdot \vec{v}_C + \vec{v}'_i \cdot \vec{v}'_i + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}'_i = \\ &= v_C^2 + v_i'^2 + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}'_i = v_C^2 + (\omega r_i)^2 + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}'_i = \\ &= v_C^2 + \omega^2 r_i^2 + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}'_i \end{aligned}$$



Energía cinética

Por tanto, la energía cinética del punto material P_i es

$$\begin{aligned} E_{c_i} &= \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (v_C^2 + \omega^2 r_i^2 + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}'_i) = \\ &= \frac{1}{2} m_i v_C^2 + \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 + m_i \vec{v}_C \cdot \vec{v}'_i \end{aligned}$$



Energía cinética

La energía cinética del sólido rígido es

$$\begin{aligned} E_c &= \sum E_{c_i} = \\ &= \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_C^2 \right) + \sum \left(\frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 \right) + \sum (m_i \vec{v}_C \cdot \vec{v}'_i) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum m_i \right) v_C^2 + \frac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^2 \right) \omega^2 + \vec{v}_C \cdot \left(\sum m_i \vec{v}'_i \right) \end{aligned}$$

Es la masa m del sólido rígido.

Es el momento de inercia I_C del sólido rígido respecto al eje de giro de la fase de rotación.

$i?$

Energía cinética

Es

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}'_i \Rightarrow \vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_C$$

$$\sum m_i \vec{v}'_i = \sum m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_C) = \sum m_i \vec{v}_i - \sum m_i \vec{v}_C = \vec{0}$$

Es por definición el momento lineal \vec{p} de un sistema de puntos materiales.

Es igual a $m\vec{v}_C$, expresión simplificada de \vec{p} .

Por tanto,

$$E_c = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \vec{v}_C \cdot \vec{0} = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

Energía cinética

Conclusión

- La energía cinética de un sólido rígido es la suma de la que tendría si su movimiento fuese una traslación pura con la velocidad de su centro de masas, más la que tendría si su movimiento fuese una rotación pura alrededor de un eje que pasa por el propio centro de masas.

$$E_c = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

Ejercicio 18

Un balón de baloncesto, que admitiremos que es una esfera hueca, tiene 0,6 kg de masa y 0,12 m de radio. ¿Cuál es su energía cinética en el instante en que los módulos de su velocidad angular y de la velocidad de su centro de masas son 20 rad/s y 6 m/s, respectivamente?

El momento de inercia de la esfera hueca respecto a un eje que pasa por su centro de masas, es

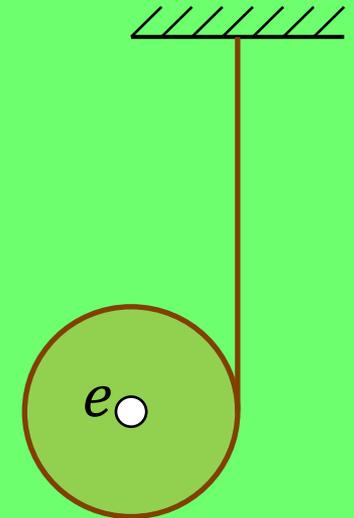
$$I_C = \frac{2}{3} 0,6 \times 0,12^2 = 0,00576 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Por tanto, la energía cinética del balón en el instante indicado es

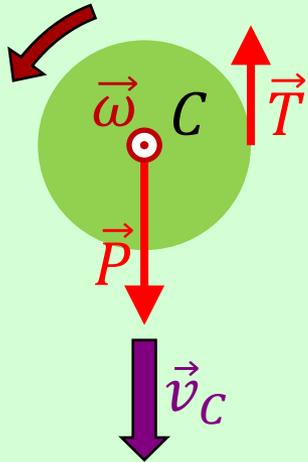
$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{1}{2} 0,6 \times 6^2 + \frac{1}{2} 0,00576 \times 20^2 = \\ &= 10,8 + 1,152 = 11,952 \text{ J} \end{aligned}$$

Ejercicio 19

Una polea, con su eje e libre, tiene 3 kg de masa, 0,2 m de radio, y $0,048 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto a dicho eje. La polea tiene arrollada una cuerda ideal cuyo extremo libre está unido al techo. El sistema parte del reposo. Aplicando el teorema de la energía cinética, obténgase el módulo de la velocidad del eje tras descender 0,56 m.



El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, la polea en este caso.



Las fuerzas que actúan sobre la polea son:

\vec{P} : peso de la polea.

\vec{T} : fuerza ejercida por la cuerda sobre la polea.

Aplicando el teorema de la energía cinética a este cuerpo, supuesto indeformable, entre la situación inicial y tras haber descendido el centro de masas 0,56 m, es

$$\Delta E_C = W_{\vec{P}} + W_{\vec{T}}$$

Sean:

v_C : módulo de la velocidad del centro de masas de la polea tras ese descenso.

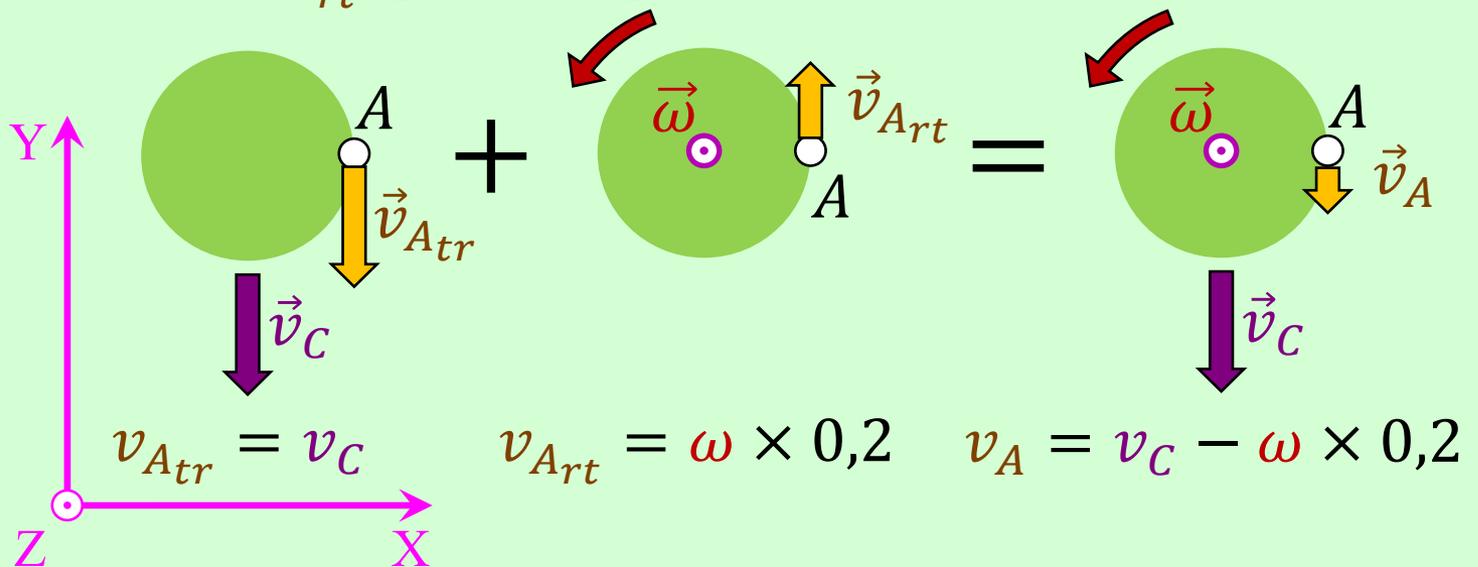
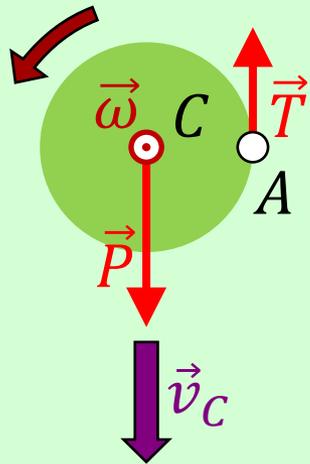
ω : módulo de la velocidad angular de la polea en ese instante.

Vamos a obtener la relación de velocidades por cuerda.

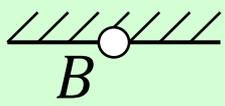
En el punto A , la cuerda se mueve solidariamente con el punto de la polea con el que está en contacto.

Su velocidad es la suma de:

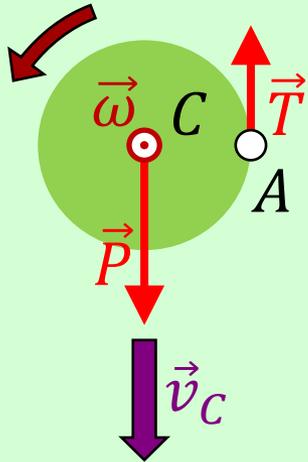
- la $\vec{v}_{A_{tr}}$ que tiene por el movimiento de traslación;
- la $\vec{v}_{A_{rt}}$ que tiene por el movimiento de rotación.



Analíticamente, $\vec{v}_A = \vec{v}_{A_{tr}} + \vec{v}_{A_{rt}} = (0; -v_C; 0) + (0; \omega \times 0,2; 0) = (0; -v_C + \omega \times 0,2; 0) = (0; -[v_C - \omega \times 0,2]; 0)$



En el punto B , donde la cuerda está anclada al techo, es $v_B = 0 \text{ m/s}$.

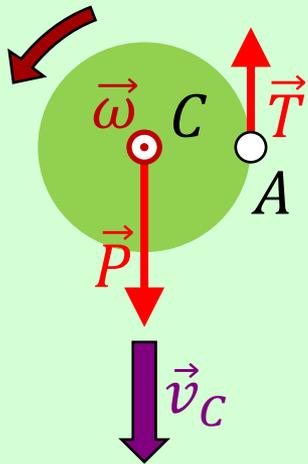


Por la presencia de la cuerda ideal, es

$$v_A = v_B \Rightarrow v_C - \omega \times 0,2 = 0 \Rightarrow v_C = 0,2\omega \Rightarrow \omega = 5v_C$$

Nótese que, puesto que $v_A = v_B$ y $v_B = 0 \text{ m/s}$, el punto A está inmóvil. Por tanto, el trabajo de \vec{T} será de 0 J .

Vamos a desarrollar los términos de $\Delta E_c = W_{\vec{P}} + W_{\vec{T}}$.



$$\begin{aligned}\Delta E_{c_p} &= \left[\frac{1}{2} 3v_C^2 + \frac{1}{2} 0,048\omega^2 \right] - 0 = 1,5v_C^2 + 0,024(5v_C)^2 = \\ &= 1,5v_C^2 + 0,6v_C^2 = 2,1v_C^2 \text{ (SI)}\end{aligned}$$

$$W_{\vec{P}} = -\Delta E_p = -mg\Delta h_G = -3 \times 9,8 \times (-0,56) = 16,464 \text{ J}$$

$$W_{\vec{T}} = 0 \text{ J (punto de aplicación inmóvil)}$$

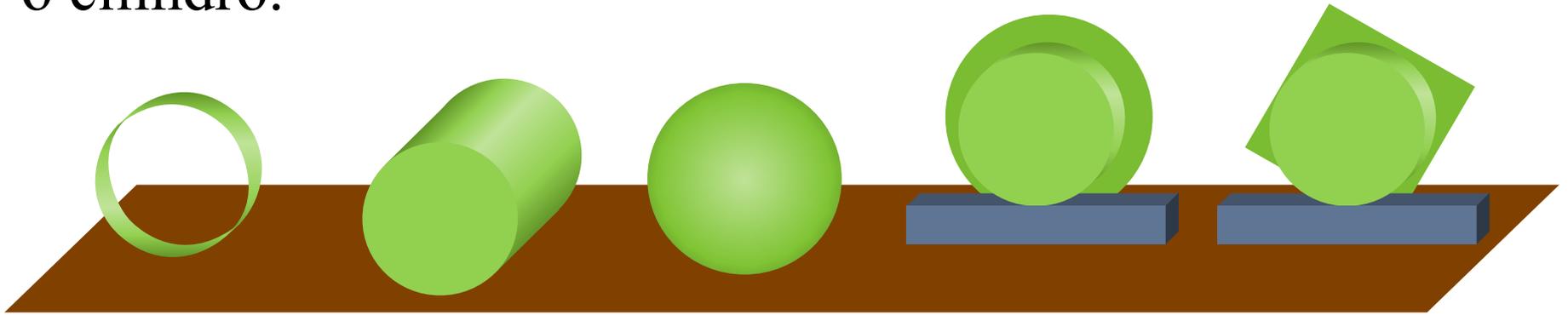
Por tanto,

$$2,1v_C^2 = 16,464 + 0 = 16,464 \Rightarrow v_C = 2,8 \text{ m/s}$$

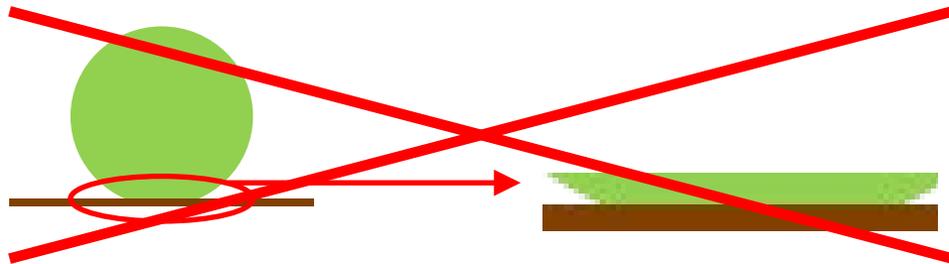
III.- Rodadura

Rueda

Una rueda es un sólido rígido tal que los puntos que apoyan sobre el terreno constituyen una circunferencia o cilindro.

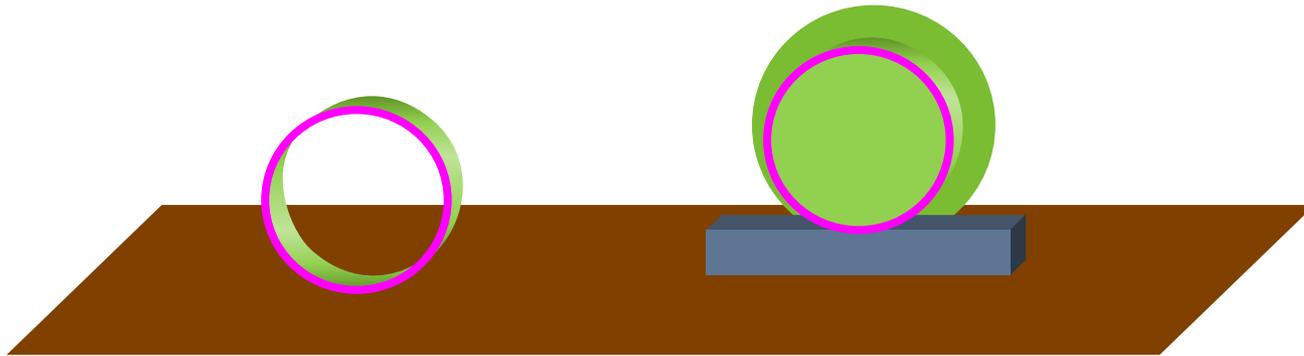


En realidad hablamos aquí de ruedas ideales, que no se deforman.



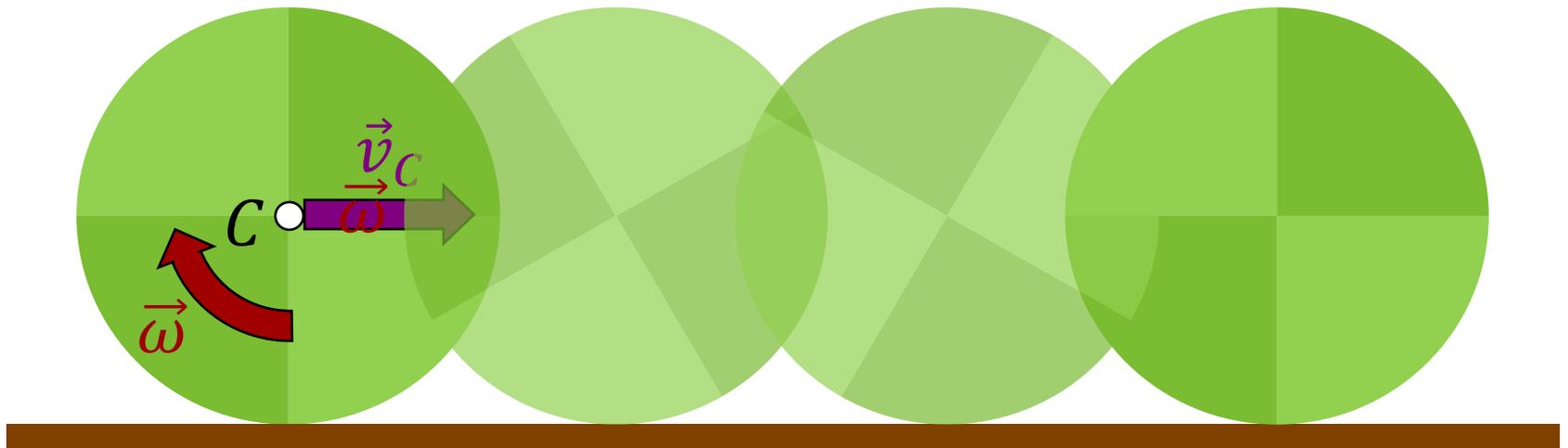
Radio de una rueda

En todo lo que sigue, por radio de una rueda se entiende, no el de su contorno, sino el de la circunferencia o cilindro constituidos por los puntos que apoyan sobre el terreno.



Movimiento de una rueda

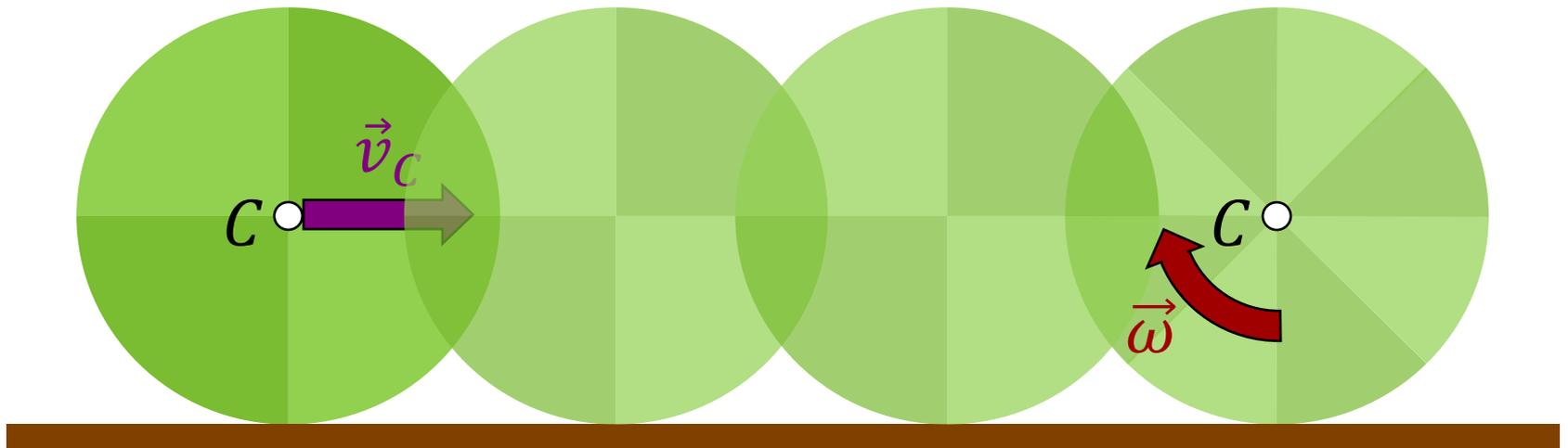
El movimiento de la rueda es de traslación más rotación.



Movimiento de una rueda

Una vez más, descomponemos el movimiento en dos partes.

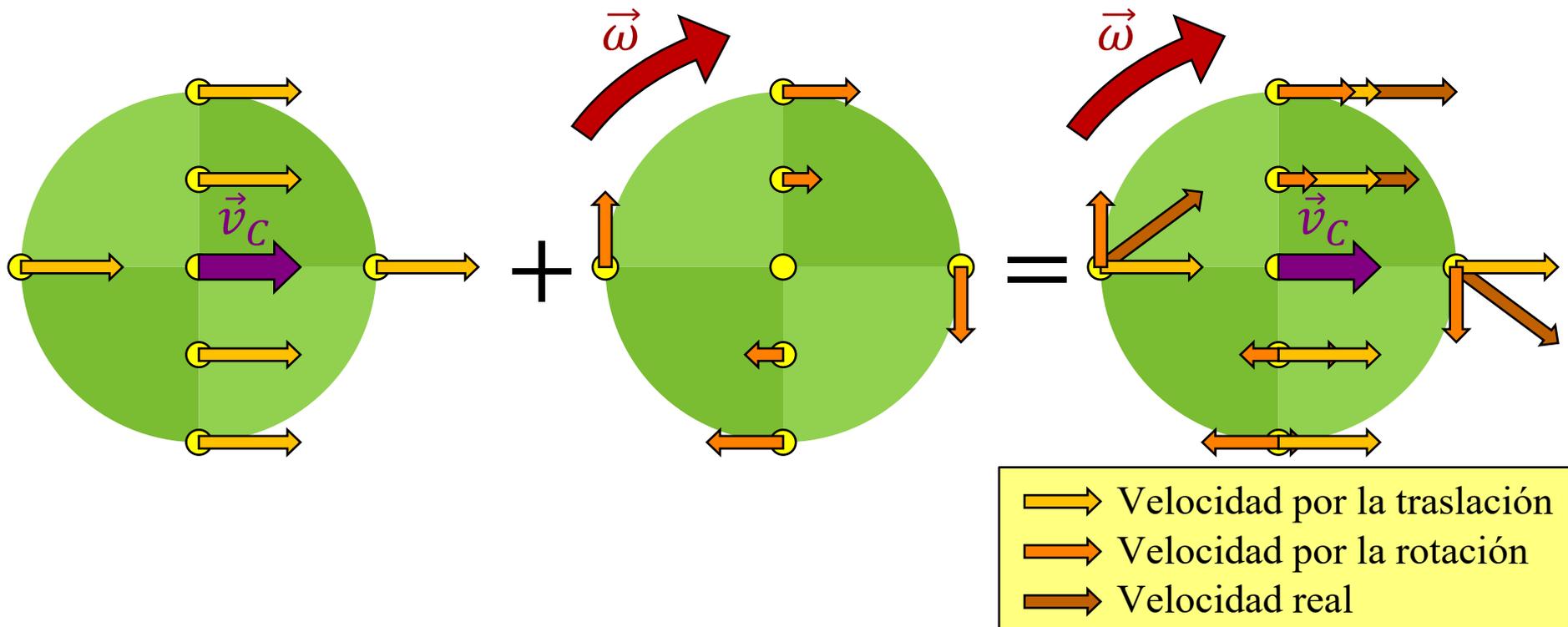
- Una traslación en la que el centro de masas C pasa a su nueva posición. Cualquier punto material tiene la misma velocidad \vec{v}_C que C .
- Una rotación con velocidad angular $\vec{\omega}$ alrededor de un eje que pasa por C . Cualquier punto material gira alrededor de dicho eje.



Velocidad de los puntos de una rueda

La velocidad de un punto cualquiera de una rueda es la suma de:

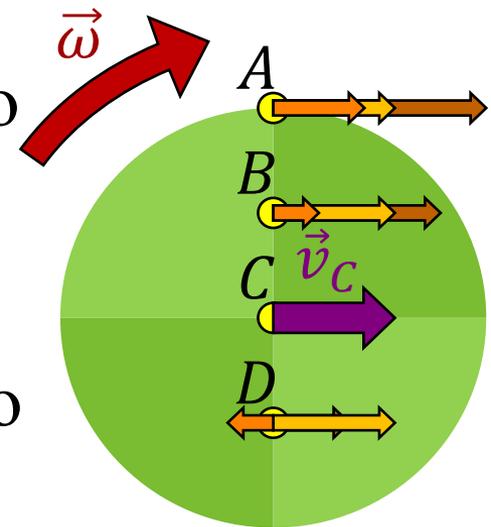
- la que tiene por el movimiento de traslación;
- la que tiene por el movimiento de rotación.



Velocidad de los puntos de una rueda

Sea R el radio de la rueda. ¿Qué se puede deducir?

- La velocidad del centro de masas es \vec{v}_C , como era de esperar.
- La velocidad del punto A tiene módulo $v_C + \omega R$ y se dirige hacia la derecha.
- La velocidad del punto B tiene módulo $v_C + \omega R/2$ y se dirige hacia la derecha.
- La velocidad del punto D tiene módulo $|v_C - \omega R/2|$. Se dirige hacia la derecha si $v_C > \omega R/2$, y hacia la izquierda si $v_C < \omega R/2$.

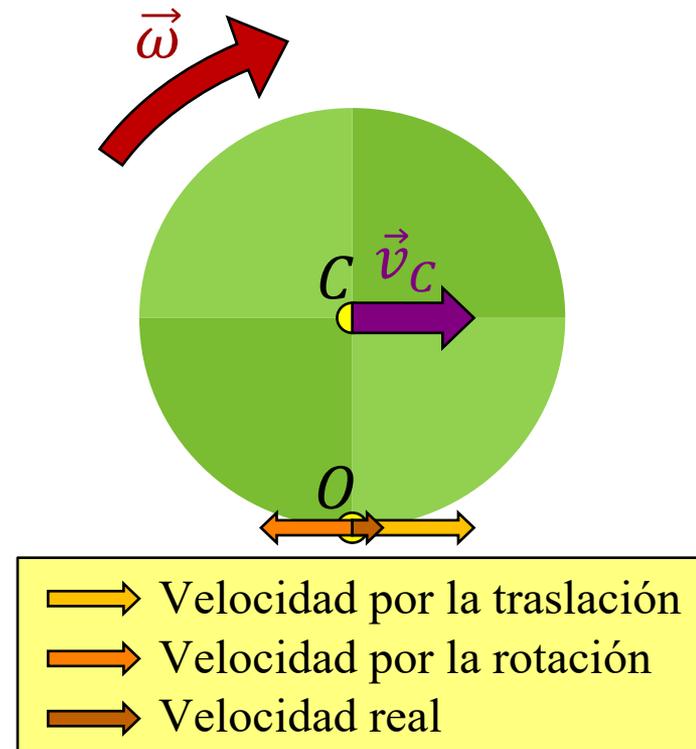


	Velocidad por la traslación
	Velocidad por la rotación
	Velocidad real

Velocidad del punto de contacto

Es de gran interés analizar el movimiento del punto O de contacto entre la rueda y el suelo.

- La velocidad del punto O tiene módulo $|v_C - \omega R|$. Se dirige hacia la derecha si $v_C > \omega R$, y hacia la izquierda si $v_C < \omega R$.

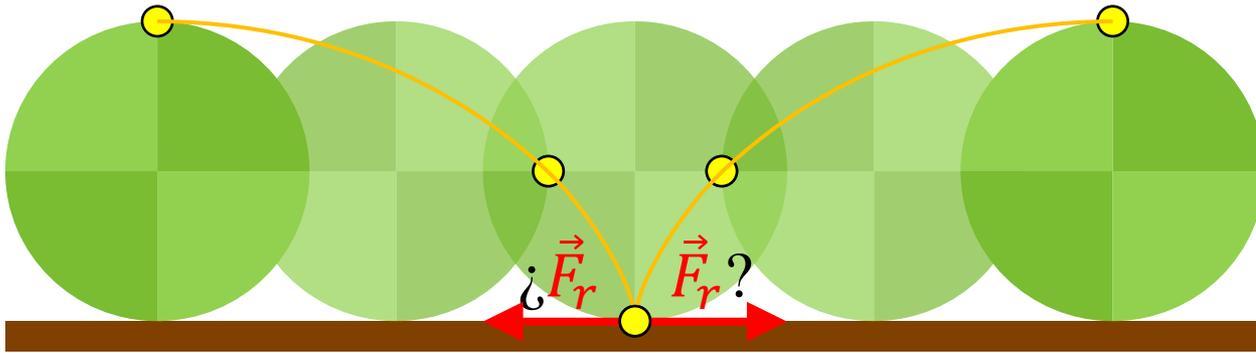


Velocidad del punto de contacto

¿Qué se deduce de ello?

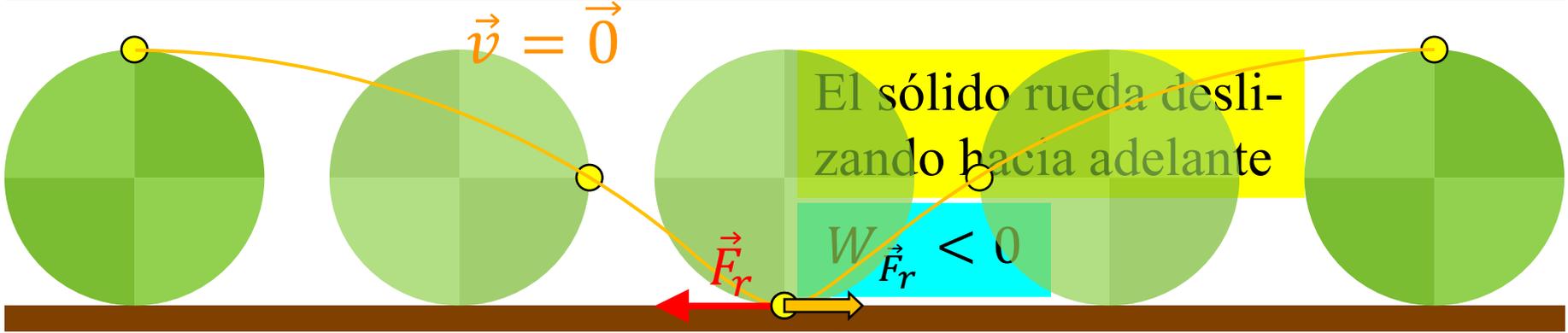
- Si $v_C > \omega R$, el punto de contacto desliza hacia la derecha. En consecuencia, la fuerza de rozamiento \vec{F}_r se dirige hacia la izquierda. Es $F_r = \mu' N$.
- Si $v_C < \omega R$, el punto de contacto desliza hacia la izquierda. En consecuencia, la fuerza de rozamiento \vec{F}_r se dirige hacia la derecha. Es $F_r = \mu' N$.
- Si $v_C = \omega R$, el punto de contacto no desliza. El sentido de la fuerza de rozamiento \vec{F}_r es el que se opone al deslizamiento que tendría el punto si dicha fuerza no existiera. Puede resultar ser hacia la izquierda, o hacia la derecha. Es $F_r \leq \mu N$. Su trabajo es cero.

Posibles comportamientos de una rueda



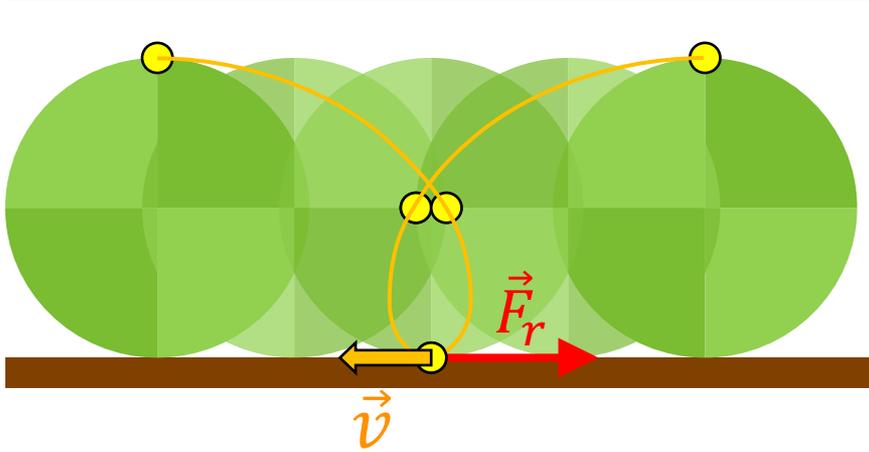
El sólido rueda sin deslizar

$W_{\vec{F}_r} = 0 !!!$



El sólido rueda deslizando hacia adelante

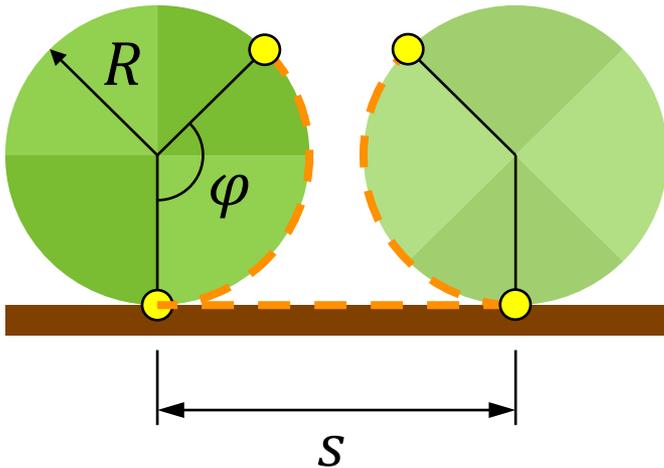
$W_{\vec{F}_r} < 0$



El sólido rueda deslizando hacia atrás

$W_{\vec{F}_r} < 0$

Posibles comportamientos de una rueda



Si rueda sin deslizar:

$$s = \varphi R$$

Ya lo sabíamos

$$v_C = \frac{ds}{dt} = \frac{d(\varphi R)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} R = \omega R$$

$$a_C = a_{C_t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \alpha R$$

El movimiento del centro de masas es rectilíneo.

Posibles comportamientos de una rueda

Si rueda sin deslizar:

$$s = \varphi R$$

$$v_C = \omega R$$

$$a_C = \alpha R$$

Si rueda deslizando hacia adelante:

$$s > \varphi R$$

$$v_C > \omega R$$

$$a_C > \alpha R$$

Si rueda deslizando hacia atrás:

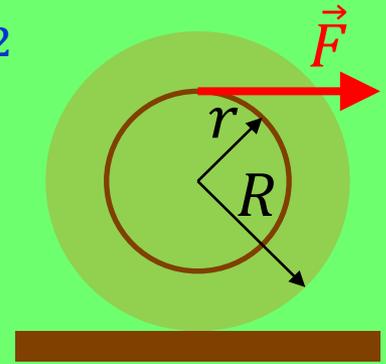
$$s < \varphi R$$

$$v_C < \omega R$$

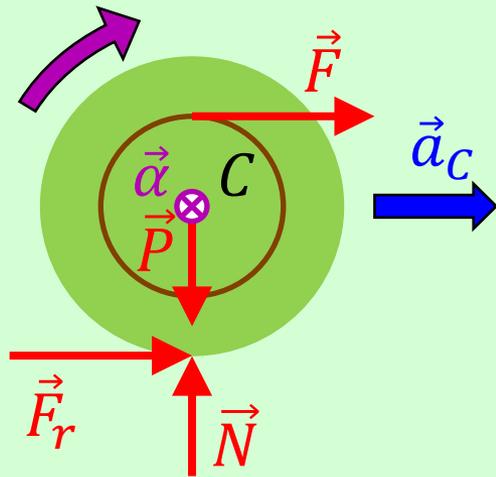
$$a_C < \alpha R$$

Ejercicio 20

El carrete de la figura tiene 4 kg de masa, $0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto al correspondiente eje que pasa por su centro de masas, y sus radios son $R = 0,5 \text{ m}$ y r . La fuerza horizontal que tira de él tiene módulo $F = 7 \text{ N}$. El coeficiente de rozamiento con el suelo es μ . Obténgase los módulos y sentidos de la aceleración del eje del carrete, de la aceleración angular, y de la fuerza de rozamiento, si $r = 0,3 \text{ m}$ y $\mu = 0,2$.



HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



Una vez adoptada una hipótesis, el primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, el carrito en este caso.

Las fuerzas que actúan sobre el carrito son:

\vec{F} : mencionada en el enunciado.

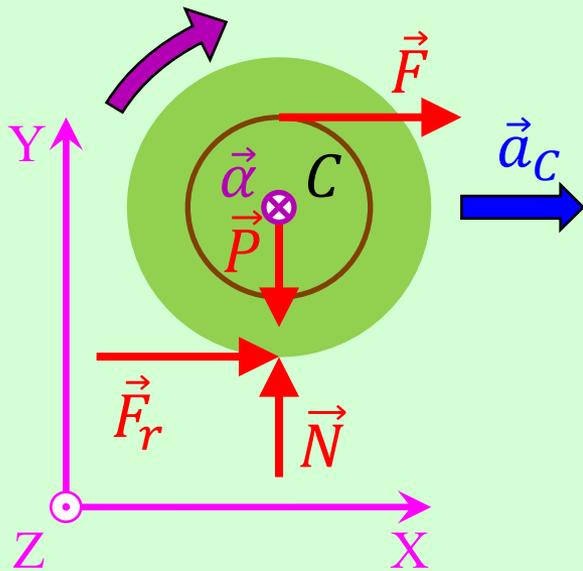
\vec{P} : peso.

\vec{N} : reacción normal.

\vec{F}_r : fuerza de rozamiento.

Como consecuencia de la acción de estas fuerzas, el carrito tiene una aceleración del centro de masas \vec{a}_C , y una aceleración angular $\vec{\alpha}$ perpendicular al plano de la página, y hacia dentro por la regla de Maxwell.

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



Hay que establecer un sistema de referencia dextrógiro, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.

De \vec{F} y \vec{P} se conocen módulos y orientaciones.

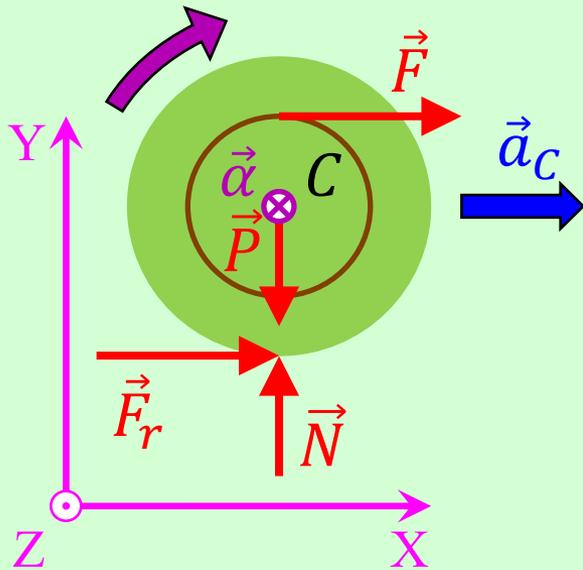
De \vec{N} se conoce su orientación, pero no su módulo.

De \vec{F}_r se conoce su dirección, pero no su módulo ni su sentido. Por tanto, se desconoce su componente X , aunque sí se sabe que la Y y la Z son 0.

De \vec{a}_C y $\vec{\alpha}$ se conocen sus orientaciones, pero no sus módulos.

Por tanto, tenemos 4 incógnitas: N , F_{rx} , a_C y α . Necesitamos pues 4 ecuaciones.

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



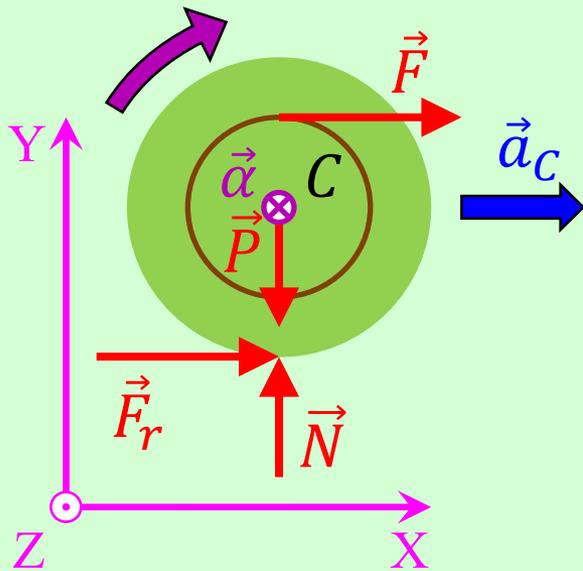
Aplicando el teorema del centro de masas, es

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r = m\vec{a}_C$$

$$(7; 0; 0) + (0; -4 \times 9,8; 0) + (0; N; 0) + \\ + (F_{rx}; 0; 0) = 4(a_C; 0; 0)$$

$$\begin{cases} 7 + F_{rx} = 4a_C \\ -39,2 + N = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación al eje paralelo al de giro que pasa por el centro de masas, es

$$\vec{M}_{\vec{F}} + \vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{N}} + \vec{M}_{\vec{F}_r} = I_c \vec{\alpha}$$

Todos estos vectores tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación, resulta

$$(-7 \times 0,3) + 0 + 0 + F_{r_x} \times 0,5 = 0,4(-\alpha) \Rightarrow -2,1 + 0,5F_{r_x} = -0,4\alpha$$

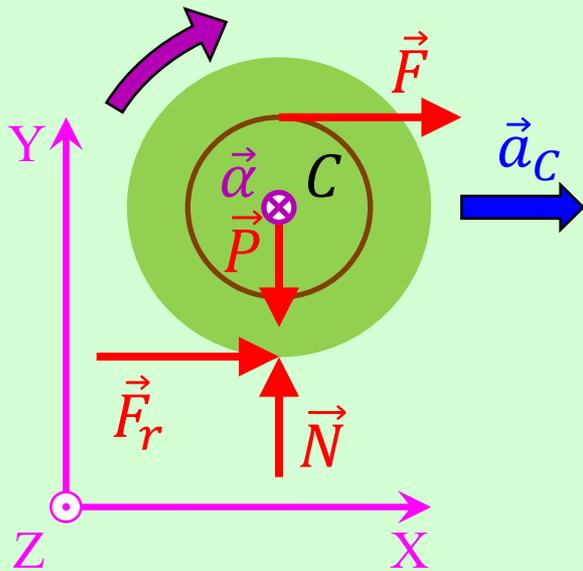
Fuerzas de brazo 0 m.

Sentido hacia dentro del plano de la página.

- Fuerza de módulo 7 N.
- Brazo 0,3 m.
- Sentido hacia dentro del plano de la página.

- Fuerza de componente F_{r_x} .
- Brazo 0,5 m.
- Si $F_{r_x} > 0$, sentido hacia fuera del plano de la página.

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



$$+ F_{rx} \times 0,5$$

- Fuerza de componente F_{rx} .
- Brazo 0,5 m.
- Si $F_{rx} > 0$, sentido hacia fuera del plano de la página.

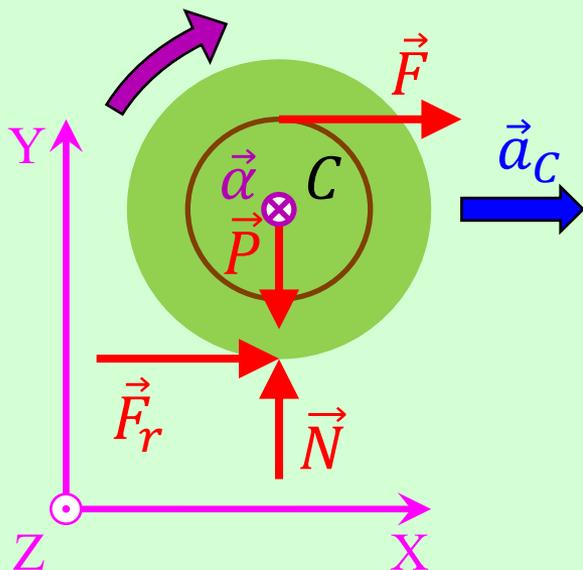
Conviene analizar con mayor profundidad este término.

¿Qué pasará si resulta ser $F_{rx} < 0$?

En tal caso:

- el sentido de $\vec{M}_{\vec{F}_r}$ será hacia dentro del plano de la página, y por tanto tendrá componente Z negativa;
- con $F_{rx} < 0$ resulta $+F_{rx} \times 0,5 < 0$.

Por tanto, el término $+F_{rx} \times 0,5$ es correcto en ambos casos. Simplemente, lo hemos razonado para el caso más sencillo.



HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.

La cuarta y última ecuación es la relación de aceleraciones por rodadura sin deslizamiento,

$$a_C = \alpha \times 0,5$$

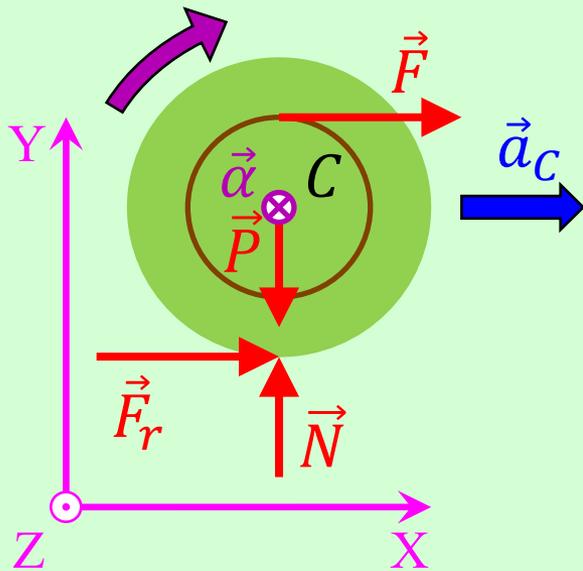
¡Atención!

Puesto que, de acuerdo con la hipótesis adoptada, no hay deslizamiento, no es válida la siguiente relación:

~~$$F_r = F_{r_{max}} = \mu N = 0,2N$$~~

Excepción: La relación sería válida si la rueda estuviera en situación de deslizamiento inminente.

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



$$\left\{ \begin{array}{l} 7 + F_{r_x} = 4a_c \\ -39,2 + N = 0 \\ -2,1 + 0,5F_{r_x} = -0,4\alpha \\ a_c = \alpha \times 0,5 \end{array} \right.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$a_c = 2 \text{ m/s}^2 \quad \alpha = 4 \text{ rad/s}^2 \quad N = 39,2 \text{ N}$$

$$F_{r_x} = 1 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_r = (F_{r_x}; 0; 0) = (1; 0; 0) \text{ N} \quad (1 \text{ N hacia la derecha})$$

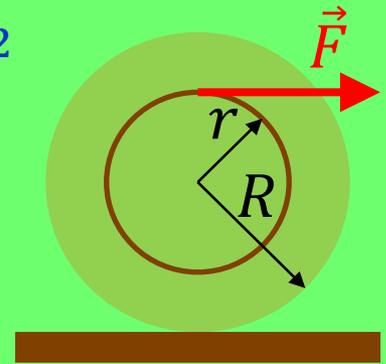
¿Cómo se comprueba la hipótesis?

$$\left. \begin{array}{l} F_r = 1 \text{ N} \\ F_{r_{\text{máx}}} = \mu N = 0,2 \times 39,2 = 7,84 \text{ N} \end{array} \right\} \text{ Se cumple que } F_r \leq F_{r_{\text{máx}}}$$

En efecto, el carrito rueda sin deslizar.

Ejercicio 21

El carrete de la figura tiene 4 kg de masa, $0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto al correspondiente eje que pasa por su centro de masas, y sus radios son $R = 0,5 \text{ m}$ y r . La fuerza horizontal que tira de él tiene módulo $F = 7 \text{ N}$. El coeficiente de rozamiento con el suelo es μ . Obténgase los módulos y sentidos de la aceleración del eje del carrete, de la aceleración angular, y de la fuerza de rozamiento, si $r = 0,3 \text{ m}$ y $\mu = 0,02$.

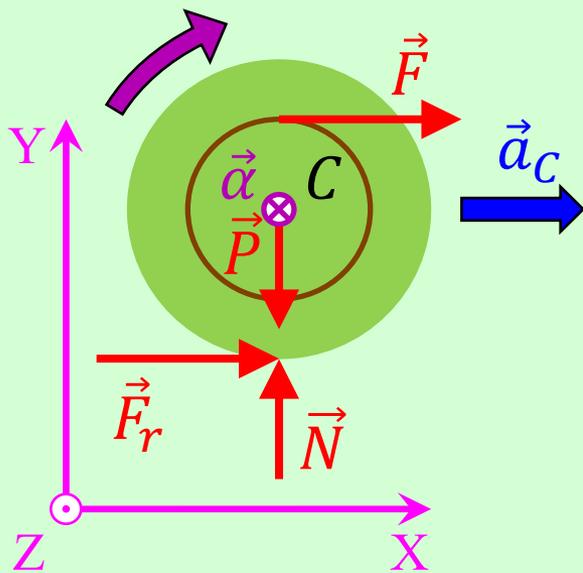


El único cambio respecto al ejercicio anterior es el del valor del coeficiente de rozamiento, que aquí es 0,02 en lugar de 0,2.

Por tanto, el desarrollo es idéntico hasta inmediatamente antes de que se haga uso por primera vez de dicho valor. Eso ocurre en la página anterior a la actual.

A continuación se reproduce esa página, marcando con una línea roja el límite a partir del cual el desarrollo varía.

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



$$\begin{cases} 7 + F_{r_x} = 4a_c \\ -39,2 + N = 0 \\ -2,1 + 0,5F_{r_x} = -0,4\alpha \\ a_c = \alpha \times 0,5 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene:

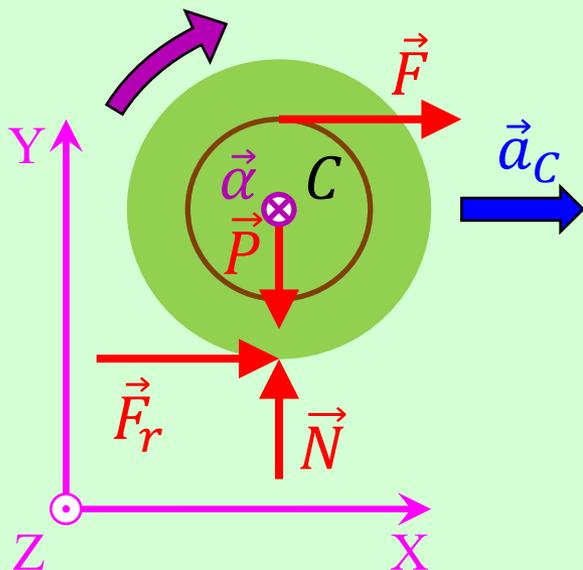
$$a_c = 2 \text{ m/s}^2 \quad \alpha = 4 \text{ rad/s}^2 \quad N = 39,2 \text{ N}$$

$$F_{r_x} = 1 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_r = (F_{r_x}; 0; 0) = (1; 0; 0) \text{ N} \quad (1 \text{ N hacia la derecha})$$

¿Cómo se comprueba la hipótesis?

$$\left. \begin{array}{l} F_r = 1 \text{ N} \\ F_{r_{\text{máx}}} = \mu N = 0,02 \times 39,2 = 0,784 \text{ N} \end{array} \right\} \text{ Es } F_r > F_{r_{\text{máx}}}$$

La hipótesis es errónea.



~~HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.~~

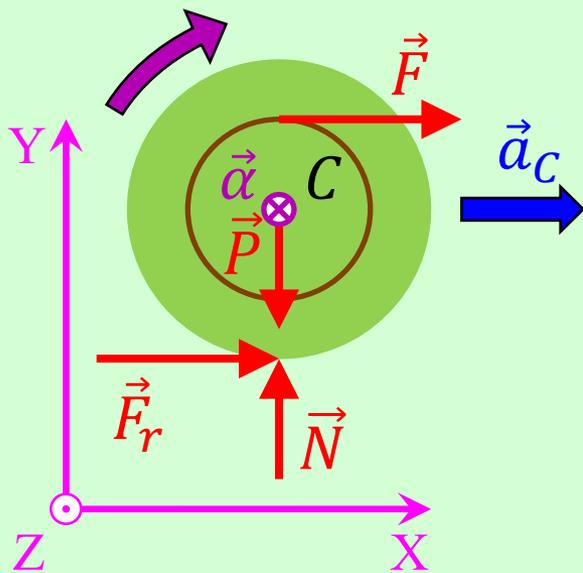
El carrito desliza, pero... ¿hacia dónde?

Hemos obtenido que, para que no deslice, la fuerza de rozamiento que se requiere es $\vec{F}_r = (1; 0; 0) \text{ N}$, esto es, de 1 N hacia la derecha.

Por tanto, se trata de la fuerza de rozamiento requerida para evitar que el punto de contacto deslice hacia la izquierda.

Como esta fuerza no puede alcanzar el módulo necesario, no puede evitar que el punto de contacto tenga ese deslizamiento hacia la izquierda.

Conclusión: El carrito desliza hacia atrás.

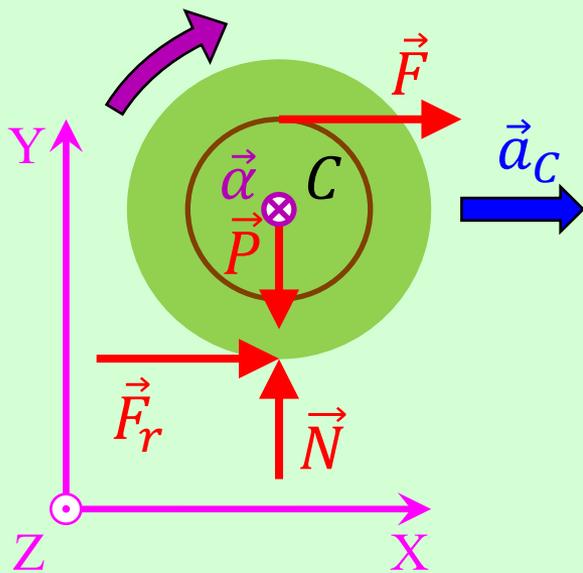


HIPÓTESIS: El carrito rueda deslizando hacia atrás.

La única consideración nueva de cara al diagrama de cuerpo libre, es respecto al sentido de la fuerza de rozamiento.

- Con la hipótesis anterior, “*el carrito rueda sin deslizar*”, no se conocía a priori ese sentido.
- Con la hipótesis actual, “*el carrito rueda deslizando hacia atrás*”, sabemos que el sentido de \vec{F}_r ha de ser hacia adelante (hacia la derecha en el diagrama).

Puesto que ahora sí se conoce la orientación de \vec{F}_r , pero no su módulo, tenemos 4 incógnitas: N , F_r (en lugar de F_{rx}), a_C y α . Necesitamos pues, de nuevo, 4 ecuaciones.



HIPÓTESIS: El carrito rueda deslizando hacia atrás.

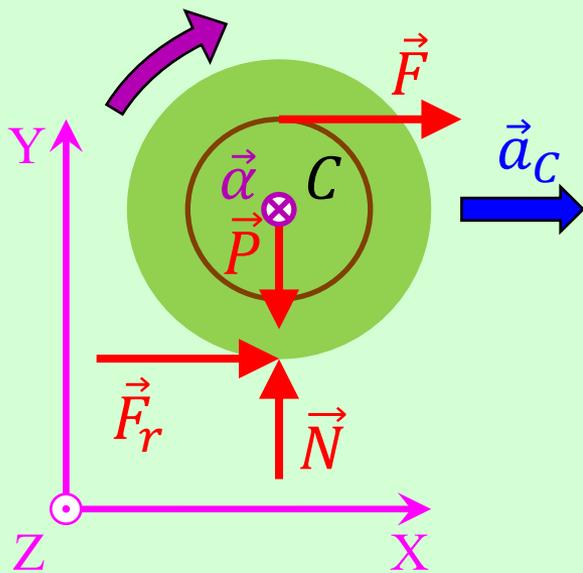
En lo que sigue, los cambios respecto a lo que se hizo bajo la hipótesis “el carrito rueda sin deslizar” aparecen resaltados en **amarillo**.

Aplicando el teorema del centro de masas, es

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r = m\vec{a}_C$$

$$(7; 0; 0) + (0; -4 \times 9,8; 0) + (0; N; 0) + (F_r; 0; 0) = 4(a_C; 0; 0)$$

$$\begin{cases} 7 + F_r = 4a_C \\ -39,2 + N = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$



HIPÓTESIS: El carrito rueda deslizando hacia atrás.

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación al eje paralelo al de giro que pasa por el centro de masas, es

$$\vec{M}_{\vec{F}} + \vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{N}} + \vec{M}_{\vec{F}_r} = I_c \vec{\alpha}$$

Todos estos vectores tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación, resulta

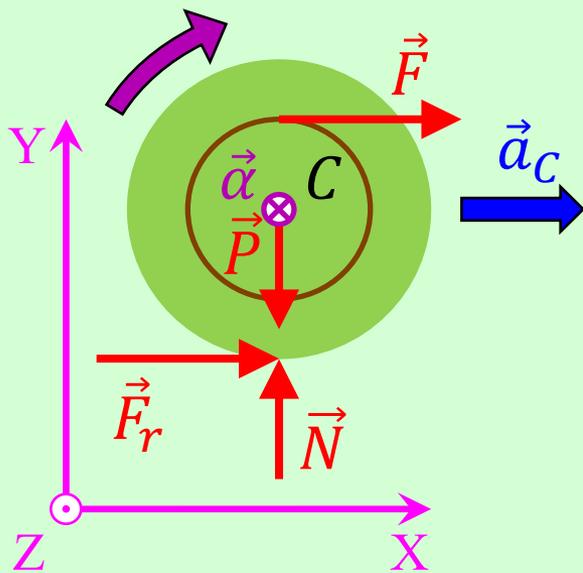
$$(-7 \times 0,3) + 0 + 0 + F_r \times 0,5 = 0,4(-\alpha) \Rightarrow -2,1 + 0,5F_r = -0,4\alpha$$

Fuerzas de brazo 0 m.

Sentido hacia dentro del plano de la página.

- Fuerza de módulo 7 N.
- Brazo 0,3 m.
- Sentido hacia dentro del plano de la página.

- Fuerza de **módulo F_r** .
- Brazo 0,5 m.
- **Sentido** hacia fuera del plano de la página.



HIPÓTESIS: El carrito rueda deslizando hacia atrás.

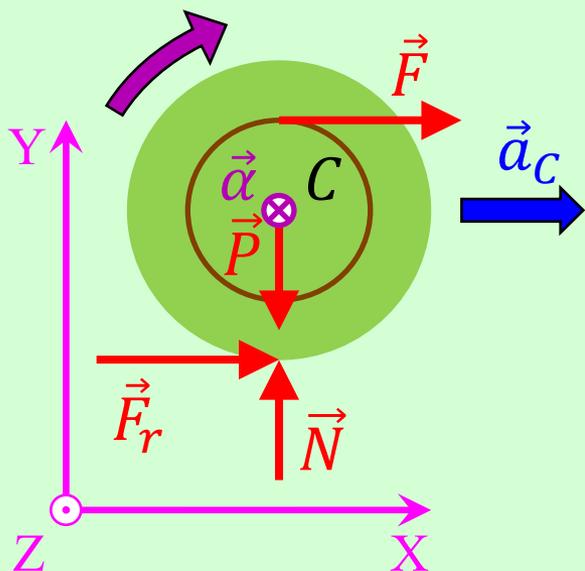
La cuarta y última ecuación es que, puesto que el punto de contacto con el suelo desliza, es

$$F_r = F_{r\text{máx}} = \mu N = 0,02N$$

¡Atención!

Puesto que, de acuerdo con la hipótesis adoptada, el carrito desliza, no es válida la siguiente relación:

~~$$a_c = \alpha \times 0,5$$~~



HIPÓTESIS: El carrito rueda deslizando hacia atrás.

$$\left\{ \begin{array}{l} 7 + F_r = 4a_c \\ -39,2 + N = 0 \\ -2,1 + 0,5F_r = -0,4\alpha \\ F_r = 0,02N \end{array} \right.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$a_c = 1,946 \text{ m/s}^2 \quad \alpha = 4,27 \text{ rad/s}^2 \quad N = 39,2 \text{ N}$$

$$F_r = 0,784 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_r = (F_r; 0; 0) = (0,784; 0; 0) \text{ N}$$

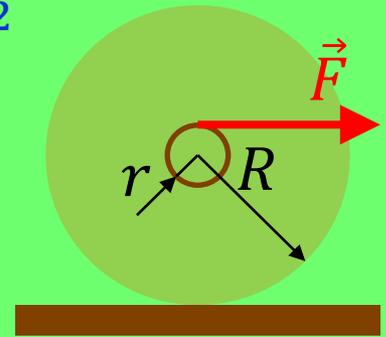
¿Cómo se comprueba la hipótesis?

$$\left. \begin{array}{l} a_c = 1,946 \text{ m/s}^2 \\ \alpha R = 4,27 \times 0,5 = 2,135 \text{ m/s}^2 \end{array} \right\} \text{ Se cumple que } a_c < \alpha R$$

En efecto, el carrito rueda deslizando hacia atrás.

Ejercicio 22

El carrito de la figura tiene 4 kg de masa, $0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto al correspondiente eje que pasa por su centro de masas, y sus radios son $R = 0,5 \text{ m}$ y r . La fuerza horizontal que tira de él tiene módulo $F = 7 \text{ N}$. El coeficiente de rozamiento con el suelo es μ . Obténgase los módulos y sentidos de la aceleración del eje del carrito, de la aceleración angular, y de la fuerza de rozamiento, si $r = 0,1 \text{ m}$ y $\mu = 0,2$.

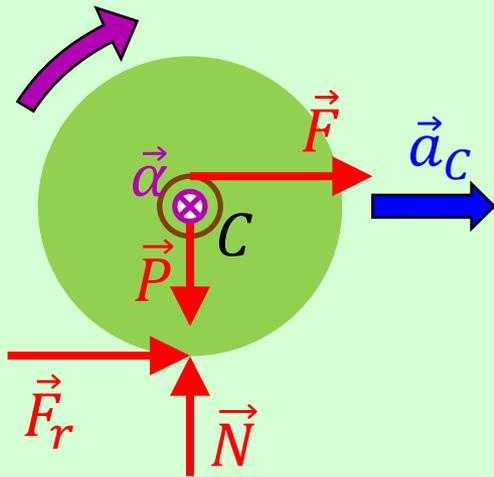


El único cambio respecto al ejercicio 20 es el del valor del radio r , que aquí es 0,1 m en lugar de 0,3 m.

Este cambio tiene consecuencias numéricas, pero conviene destacar que, como veremos, una de ellas es relevante.

Para facilitar el seguimiento de la resolución, el desarrollo que sigue es casi idéntico al del ejercicio 20, con las diferencias resaltadas en azul claro.

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



Una vez adoptada una hipótesis, el primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, el carrito en este caso.

Las fuerzas que actúan sobre el carrito son:

\vec{F} : mencionada en el enunciado.

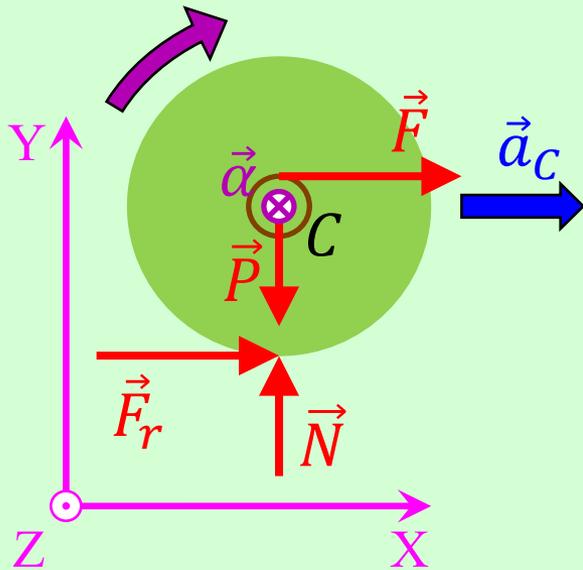
\vec{P} : peso.

\vec{N} : reacción normal.

\vec{F}_r : fuerza de rozamiento.

Como consecuencia de la acción de estas fuerzas, el carrito tiene una aceleración del centro de masas \vec{a}_C , y una aceleración angular $\vec{\alpha}$ perpendicular al plano de la página, y hacia dentro por la regla de Maxwell.

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



Hay que establecer un sistema de referencia dextrógiro, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.

De \vec{F} y \vec{P} se conocen módulos y orientaciones.

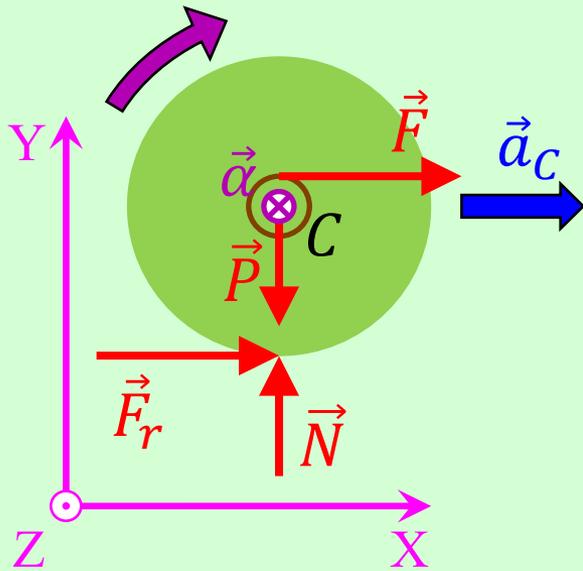
De \vec{N} se conoce su orientación, pero no su módulo.

De \vec{F}_r se conoce su dirección, pero no su módulo ni su sentido. Por tanto, se desconoce su componente X, aunque sí se sabe que la Y y la Z son 0.

De \vec{a}_C y $\vec{\alpha}$ se conocen sus orientaciones, pero no sus módulos.

Por tanto, tenemos 4 incógnitas: N , F_{rx} , a_C y α . Necesitamos pues 4 ecuaciones.

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



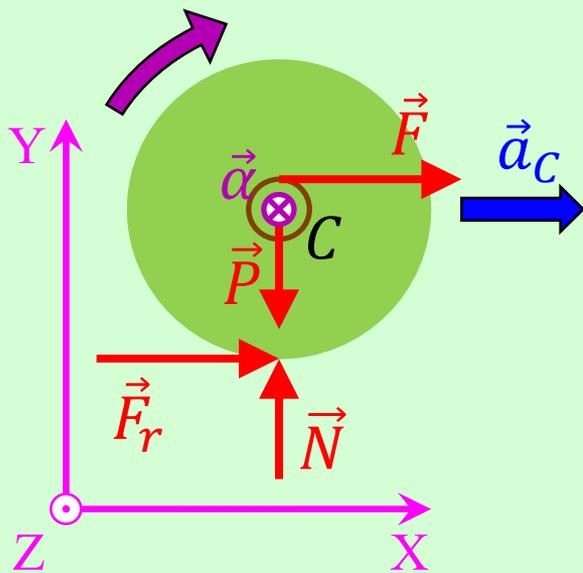
Aplicando el teorema del centro de masas, es

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r = m\vec{a}_C$$

$$(7; 0; 0) + (0; -4 \times 9,8; 0) + (0; N; 0) + \\ + (F_{rx}; 0; 0) = 4(a_C; 0; 0)$$

$$\begin{cases} 7 + F_{rx} = 4a_C \\ -39,2 + N = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación al eje paralelo al de giro que pasa por el centro de masas, es

$$\vec{M}_{\vec{F}} + \vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{N}} + \vec{M}_{\vec{F}_r} = I_c \vec{\alpha}$$

Todos estos vectores tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación, resulta

$$(-7 \times 0,1) + 0 + 0 + F_{r_x} \times 0,5 = 0,4(-\alpha) \Rightarrow -0,7 + 0,5F_{r_x} = -0,4\alpha$$

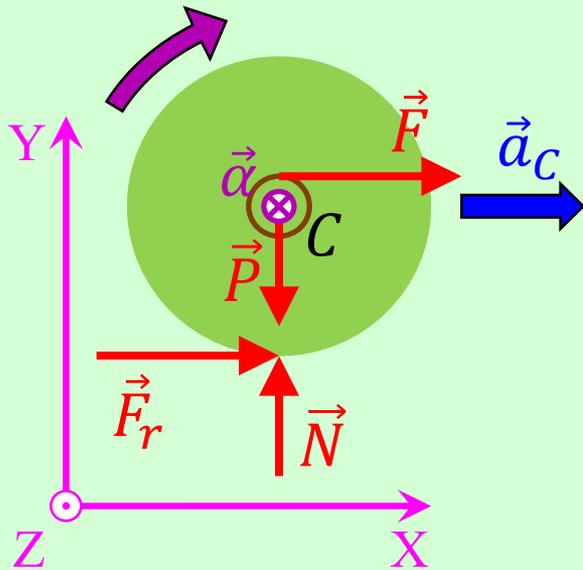
Fuerzas de brazo 0 m.

Sentido hacia dentro del plano de la página.

- Fuerza de módulo 7 N.
- Brazo 0,1 m.
- Sentido hacia dentro del plano de la página.

- Fuerza de componente F_{r_x} .
- Brazo 0,5 m.
- Si $F_{r_x} > 0$, sentido hacia fuera del plano de la página.

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



La cuarta y última ecuación es la relación de aceleraciones por rodadura sin deslizamiento,

$$a_c = \alpha \times 0,5$$

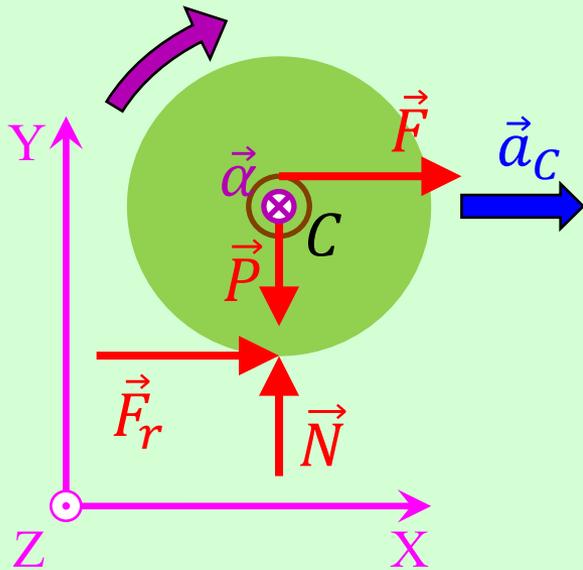
¡Atención!

Puesto que, de acuerdo con la hipótesis adoptada, no hay deslizamiento, no es válida la siguiente relación:

~~$$F_r = F_{r_{max}} = \mu N = 0,2N$$~~

Excepción: La relación sería válida si la rueda estuviera en situación de deslizamiento inminente.

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



$$7 + F_{r_x} = 4a_c$$

$$-39,2 + N = 0$$

$$-0,7 + 0,5F_{r_x} = -0,4\alpha$$

$$a_c = \alpha \times 0,5$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$a_c = 1,5 \text{ m/s}^2 \quad \alpha = 3 \text{ rad/s}^2 \quad N = 39,2 \text{ N}$$

$$F_{r_x} = -1 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_r = (F_{r_x}; 0; 0) = (-1; 0; 0) \text{ N} \quad (1 \text{ N hacia la izquierda})$$

¿Cómo se comprueba la hipótesis?

$$F_r = 1 \text{ N}$$

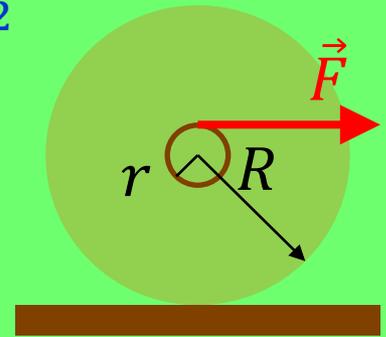
$$F_{r_{\text{máx}}} = \mu N = 0,2 \times 39,2 = 7,84 \text{ N}$$

Se cumple que $F_r \leq F_{r_{\text{máx}}}$

En efecto, el carrito rueda sin deslizar.

Ejercicio 23

El carrito de la figura tiene 4 kg de masa, $0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto al correspondiente eje que pasa por su centro de masas, y sus radios son $R = 0,5 \text{ m}$ y r . La fuerza horizontal que tira de él tiene módulo $F = 7 \text{ N}$. El coeficiente de rozamiento con el suelo es μ . Obténgase los módulos y sentidos de la aceleración del eje del carrito, de la aceleración angular, y de la fuerza de rozamiento, si $r = 0,1 \text{ m}$ y $\mu = 0,02$.

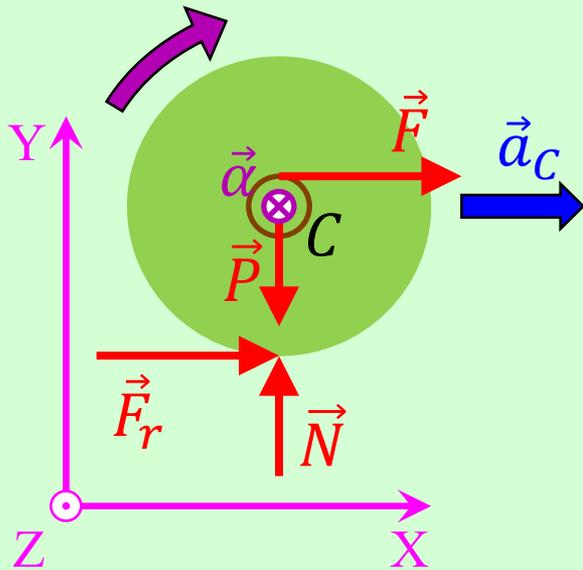


El único cambio respecto al ejercicio anterior es el del valor del coeficiente de rozamiento, que aquí es 0,02 en lugar de 0,2.

Por tanto, el desarrollo es idéntico hasta inmediatamente antes de que se haga uso por primera vez de dicho valor. Eso ocurre en la página anterior a la actual.

A continuación se reproduce esa página, marcando con una línea roja el límite a partir del cual el desarrollo varía.

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



$$7 + F_{r_x} = 4a_c$$

$$-39,2 + N = 0$$

$$-0,7 + 0,5F_{r_x} = -0,4\alpha$$

$$a_c = \alpha \times 0,5$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene:

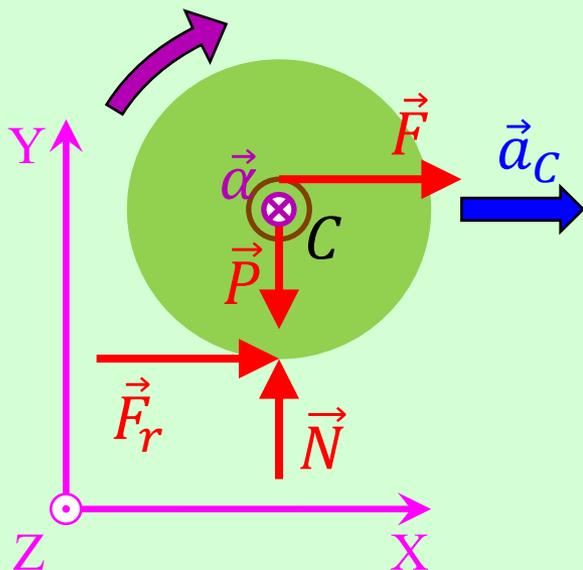
$$a_c = 1,5 \text{ m/s}^2 \quad \alpha = 3 \text{ rad/s}^2 \quad N = 39,2 \text{ N}$$

$$F_{r_x} = -1 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_r = (F_{r_x}; 0; 0) = (-1; 0; 0) \text{ N} \text{ (1 N hacia la izquierda)}$$

¿Cómo se comprueba la hipótesis?

$$\left. \begin{array}{l} F_r = 1 \text{ N} \\ F_{r_{\text{máx}}} = \mu N = 0,02 \times 39,2 = 0,784 \text{ N} \end{array} \right\} \text{ Es } F_r > F_{r_{\text{máx}}}$$

La hipótesis es errónea.



Aquí y en lo que sigue, las diferencias con respecto al ejercicio 21 (rueda deslizando con $r = 0,3 \text{ m}$) aparecen resaltadas en violeta.

~~HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.~~

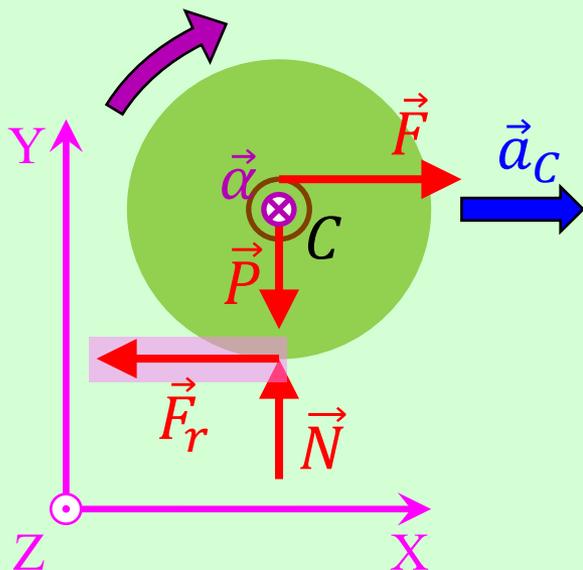
El carrito desliza, pero... ¿hacia dónde?

Hemos obtenido que, para que no deslice, la fuerza de rozamiento que se requiere es $\vec{F}_r = (-1; 0; 0) \text{ N}$, esto es, de 1 N hacia la izquierda.

Por tanto, se trata de la fuerza de rozamiento requerida para evitar que el punto de contacto deslice hacia la derecha.

Como esta fuerza no puede alcanzar el módulo necesario, no puede evitar que el punto de contacto tenga ese deslizamiento hacia la derecha.

Conclusión: El carrito desliza hacia adelante.

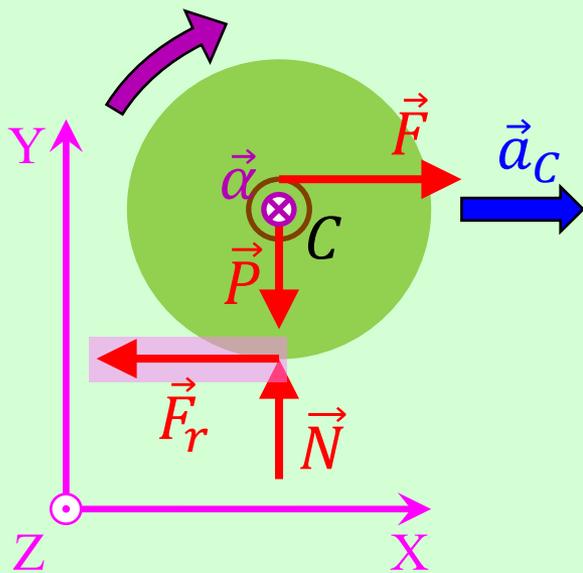


HIPÓTESIS: El carrito rueda deslizando hacia adelante.

La única consideración nueva de cara al diagrama de cuerpo libre, es respecto al sentido de la fuerza de rozamiento.

- Con la hipótesis anterior, “*el carrito rueda sin deslizar*”, no se conocía a priori ese sentido.
- Con la hipótesis actual, “*el carrito rueda deslizando hacia adelante*”, sabemos que el sentido de \vec{F}_r ha de ser hacia atrás (hacia la izquierda en el diagrama).

Puesto que ahora sí se conoce la orientación de \vec{F}_r , pero no su módulo, tenemos 4 incógnitas: N , F_r (en lugar de F_{rx}), a_c y α . Necesitamos pues, de nuevo, 4 ecuaciones.



HIPÓTESIS: El carrito rueda deslizando hacia adelante.

En lo que sigue, los cambios respecto a lo que se hizo bajo la hipótesis “el carrito rueda sin deslizar” aparecen resaltados en amarillo.

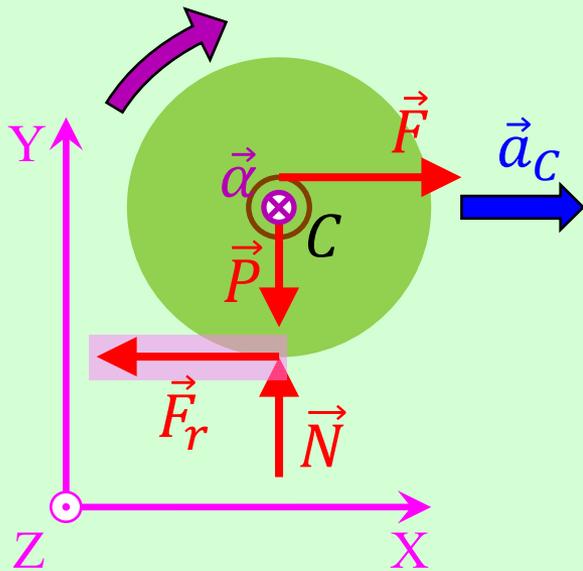
Aplicando el teorema del centro de masas, es

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r = m\vec{a}_C$$

$$(7; 0; 0) + (0; -4 \times 9,8; 0) + (0; N; 0) + (-F_r; 0; 0) = 4(a_C; 0; 0)$$

$$\begin{cases} 7 - F_r = 4a_C \\ -39,2 + N = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

HIPÓTESIS: El carrito rueda deslizando hacia adelante.



Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación al eje paralelo al de giro que pasa por el centro de masas, es

$$\vec{M}_{\vec{F}} + \vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{N}} + \vec{M}_{\vec{F}_r} = I_c \vec{\alpha}$$

Todos estos vectores tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación, resulta

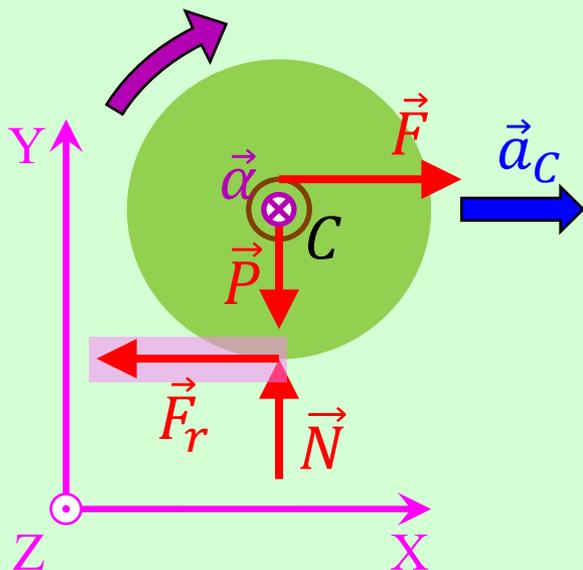
$$(-7 \times 0,1) + 0 + 0 + (-F_r \times 0,5) = 0,4(-\alpha) \Rightarrow -0,7 - 0,5F_r = -0,4\alpha$$

Fuerzas de brazo 0 m.

Sentido hacia dentro del plano de la página.

- Fuerza de módulo 7 N.
- Brazo 0,1 m.
- Sentido hacia dentro del plano de la página.

- Fuerza de módulo F_r .
- Brazo 0,5 m.
- Sentido hacia dentro del plano de la página.



HIPÓTESIS: El carrito rueda deslizando hacia adelante.

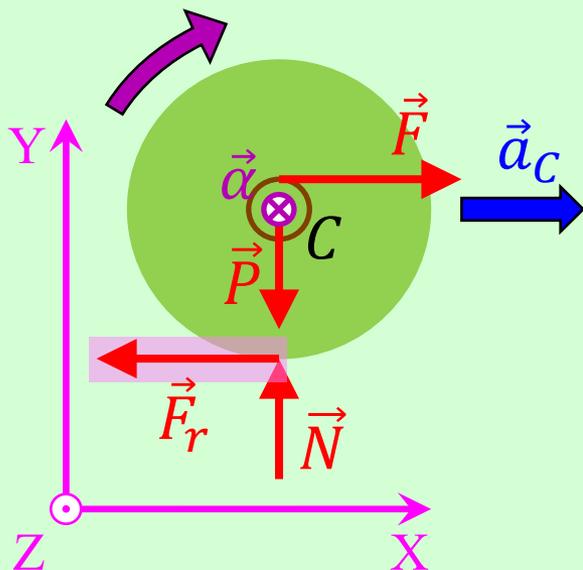
La cuarta y última ecuación es que, puesto que el punto de contacto con el suelo desliza, es

$$F_r = F_{r\text{máx}} = \mu N = 0,02N$$

¡Atención!

Puesto que, de acuerdo con la hipótesis adoptada, el carrito desliza, no es válida la siguiente relación:

~~$$a_c = \alpha \times 0,5$$~~



HIPÓTESIS: El carrito rueda deslizando hacia adelante.

$$7 - F_r = 4a_c$$

$$-39,2 + N = 0$$

$$-0,7 - 0,5F_r = -0,4\alpha$$

$$F_r = 0,02N$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$a_c = 1,554 \text{ m/s}^2 \quad \alpha = 2,73 \text{ rad/s}^2 \quad N = 39,2 \text{ N}$$

$$F_r = 0,784 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_r = (-F_r; 0; 0) = (-0,784; 0; 0) \text{ N}$$

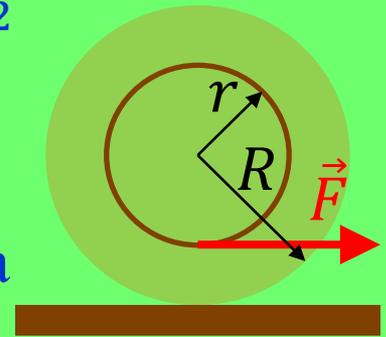
¿Cómo se comprueba la hipótesis?

$$\left. \begin{array}{l} a_c = 1,554 \text{ m/s}^2 \\ \alpha R = 2,73 \times 0,5 = 1,365 \text{ m/s}^2 \end{array} \right\} \text{ Se cumple que } a_c > \alpha R$$

En efecto, el carrito rueda deslizando hacia adelante.

Ejercicio 24

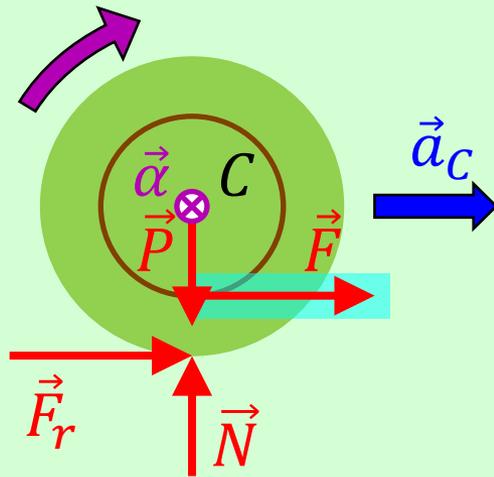
El carrete de la figura tiene 4 kg de masa, $0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto al correspondiente eje que pasa por su centro de masas, y sus radios son $R = 0,5 \text{ m}$ y $r = 0,3 \text{ m}$. La fuerza horizontal que tira de él tiene módulo $F = 7 \text{ N}$. El coeficiente de rozamiento con el suelo es μ . Obténgase los módulos y sentidos de la aceleración del eje del carrete, de la aceleración angular, y de la fuerza de rozamiento, si $\mu = 0,2$.



El único cambio respecto al ejercicio 20 es que \vec{F} actúa en la parte inferior de la garganta.

Para facilitar el seguimiento de la resolución, el desarrollo que sigue es casi idéntico al del ejercicio 20, con las diferencias resaltadas en azul claro.

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



Una vez adoptada una hipótesis, el primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, el carrito en este caso.

Las fuerzas que actúan sobre el carrito son:

\vec{F} : mencionada en el enunciado.

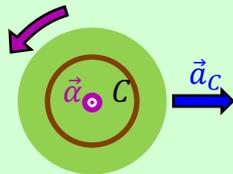
\vec{P} : peso.

\vec{N} : reacción normal.

\vec{F}_r : fuerza de rozamiento.

Inciso:

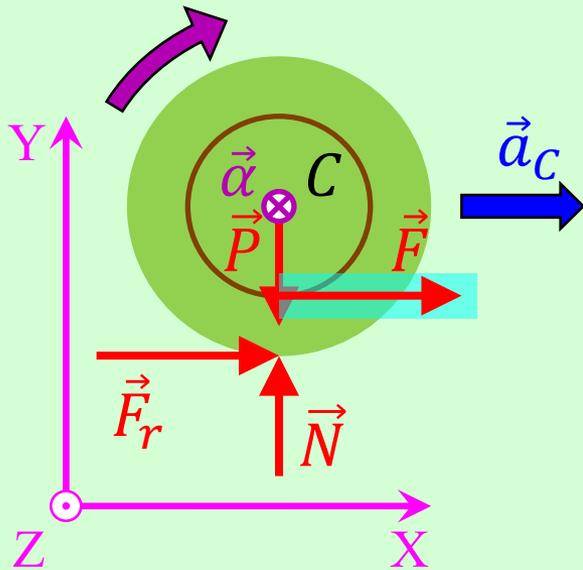
Puede creerse que $\vec{\alpha}$ debería tener la orientación opuesta:



Sin embargo, en tal caso el punto de contacto con el suelo deslizaría hacia la derecha, contradiciendo la hipótesis.

Como consecuencia de la acción de estas fuerzas, el carrito tiene una aceleración del centro de masas \vec{a}_C , y una aceleración angular $\vec{\alpha}$ perpendicular al plano de la página, y hacia dentro por la regla de Maxwell.

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



Hay que establecer un sistema de referencia dextrógiro, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.

De \vec{F} y \vec{P} se conocen módulos y orientaciones.

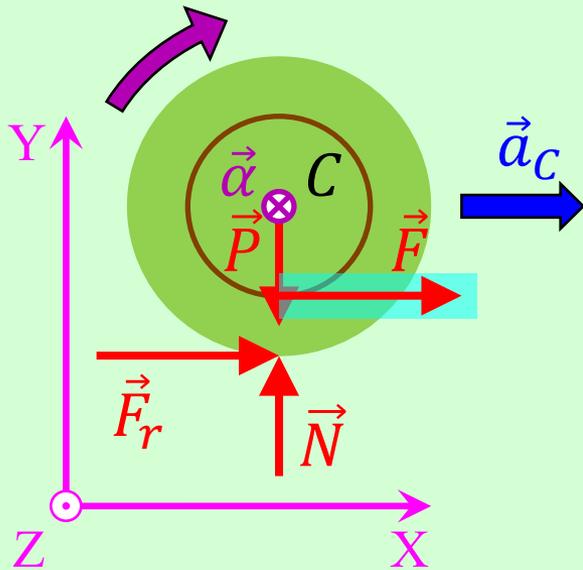
De \vec{N} se conoce su orientación, pero no su módulo.

De \vec{F}_r se conoce su dirección, pero no su módulo ni su sentido. Por tanto, se desconoce su componente X , aunque sí se sabe que la Y y la Z son 0.

De \vec{a}_C y $\vec{\alpha}$ se conocen sus orientaciones, pero no sus módulos.

Por tanto, tenemos 4 incógnitas: N , F_{rx} , a_C y α . Necesitamos pues 4 ecuaciones.

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



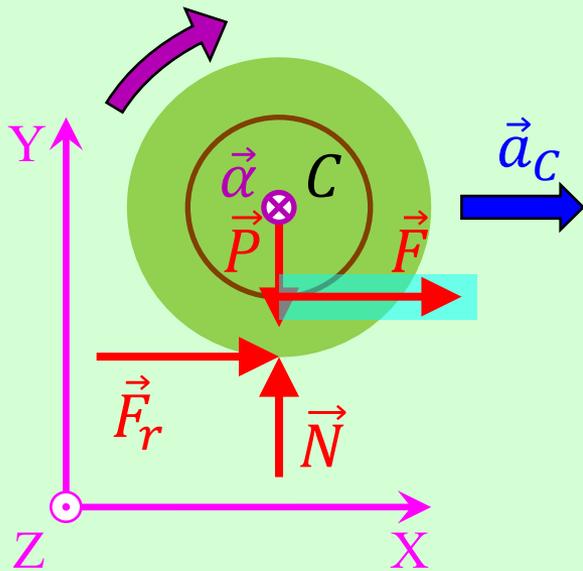
Aplicando el teorema del centro de masas, es

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r = m\vec{a}_C$$

$$(7; 0; 0) + (0; -4 \times 9,8; 0) + (0; N; 0) + \\ + (F_{rx}; 0; 0) = 4(a_C; 0; 0)$$

$$\begin{cases} 7 + F_{rx} = 4a_C \\ -39,2 + N = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación al eje paralelo al de giro que pasa por el centro de masas, es

$$\vec{M}_{\vec{F}} + \vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{N}} + \vec{M}_{\vec{F}_r} = I_c \vec{\alpha}$$

Todos estos vectores tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación, resulta

$$(+7 \times 0,3) + 0 + 0 + F_{r_x} \times 0,5 = 0,4(-\alpha) \Rightarrow +2,1 + 0,5F_{r_x} = -0,4\alpha$$

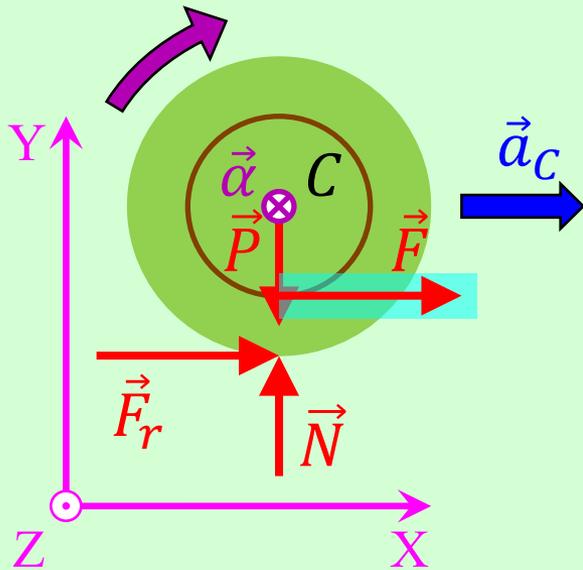
Fuerzas de brazo 0 m.

Sentido hacia dentro del plano de la página.

- Fuerza de módulo 7 N.
- Brazo 0,3 m.
- Sentido hacia fuera del plano de la página.

- Fuerza de componente F_{r_x} .
- Brazo 0,5 m.
- Si $F_{r_x} > 0$, sentido hacia fuera del plano de la página.

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



La cuarta y última ecuación es la relación de aceleraciones por rodadura sin deslizamiento,

$$a_c = \alpha \times 0,5$$

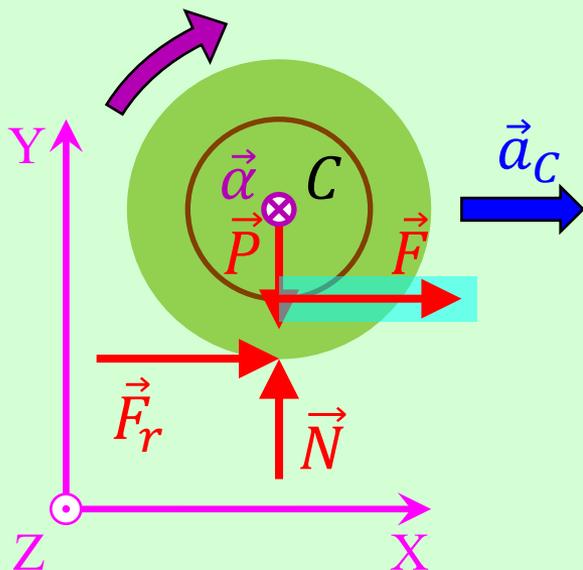
¡Atención!

Puesto que, de acuerdo con la hipótesis adoptada, no hay deslizamiento, no es válida la siguiente relación:

~~$$F_r = F_{r\max} = \mu N = 0,2N$$~~

Excepción: La relación sería válida si la rueda estuviera en situación de deslizamiento inminente.

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



$$\begin{cases} 7 + F_{r_x} = 4a_c \\ -39,2 + N = 0 \\ +2,1 + 0,5F_{r_x} = -0,4\alpha \\ a_c = \alpha \times 0,5 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$a_c = 0,5 \text{ m/s}^2 \quad \alpha = 1 \text{ rad/s}^2 \quad N = 39,2 \text{ N}$$

$$F_{r_x} = -5 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_r = (F_{r_x}; 0; 0) = (-5; 0; 0) \text{ N} \quad (5 \text{ N hacia la izquierda})$$

¿Cómo se comprueba la hipótesis?

$$F_r = 5 \text{ N}$$

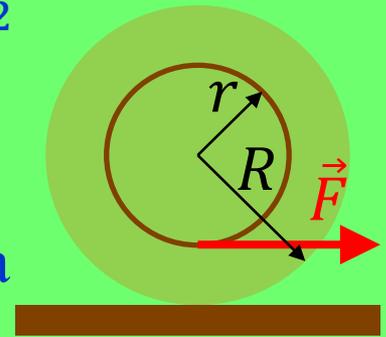
$$F_{r_{\text{máx}}} = \mu N = 0,2 \times 39,2 = 7,84 \text{ N}$$

Se cumple que $F_r \leq F_{r_{\text{máx}}}$

En efecto, el carrito rueda sin deslizar.

Ejercicio 25

El carrito de la figura tiene 4 kg de masa, $0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia respecto al correspondiente eje que pasa por su centro de masas, y sus radios son $R = 0,5 \text{ m}$ y $r = 0,3 \text{ m}$. La fuerza horizontal que tira de él tiene módulo $F = 7 \text{ N}$. El coeficiente de rozamiento con el suelo es μ . Obténgase los módulos y sentidos de la aceleración del eje del carrito, de la aceleración angular, y de la fuerza de rozamiento, si $\mu = 0,02$.

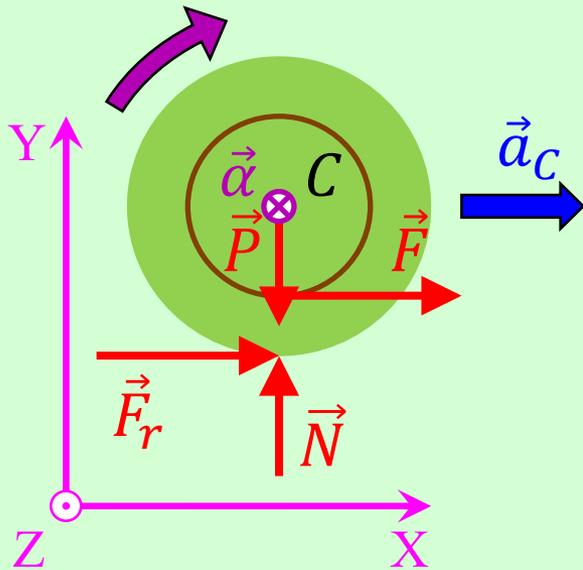


El único cambio respecto al ejercicio anterior es el del valor del coeficiente de rozamiento, que aquí es 0,02 en lugar de 0,2.

Por tanto, el desarrollo es idéntico hasta inmediatamente antes de que se haga uso por primera vez de dicho valor. Eso ocurre en la página anterior a la actual.

A continuación se reproduce esa página, marcando con una línea roja el límite a partir del cual el desarrollo varía.

HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.



$$\begin{cases} 7 + F_{r_x} = 4a_c \\ -39,2 + N = 0 \\ +2,1 + 0,5F_{r_x} = -0,4\alpha \\ a_c = \alpha \times 0,5 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene:

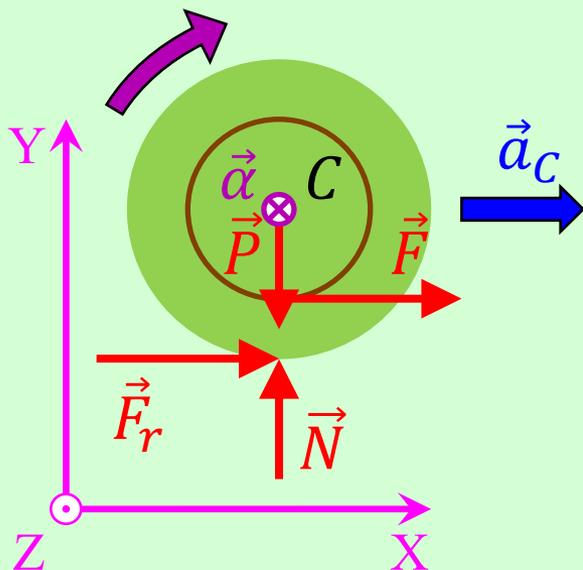
$$a_c = 0,5 \text{ m/s}^2 \quad \alpha = 1 \text{ rad/s}^2 \quad N = 39,2 \text{ N}$$

$$F_{r_x} = -5 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_r = (F_{r_x}; 0; 0) = (-5; 0; 0) \text{ N} \quad (5 \text{ N hacia la izquierda})$$

¿Cómo se comprueba la hipótesis?

$$\left. \begin{aligned} F_r &= 5 \text{ N} \\ F_{r_{\text{máx}}} &= \mu N = 0,02 \times 39,2 = 0,784 \text{ N} \end{aligned} \right\} \text{ Es } F_r > F_{r_{\text{máx}}}$$

La hipótesis es errónea.



~~HIPÓTESIS: El carrito rueda sin deslizar.~~

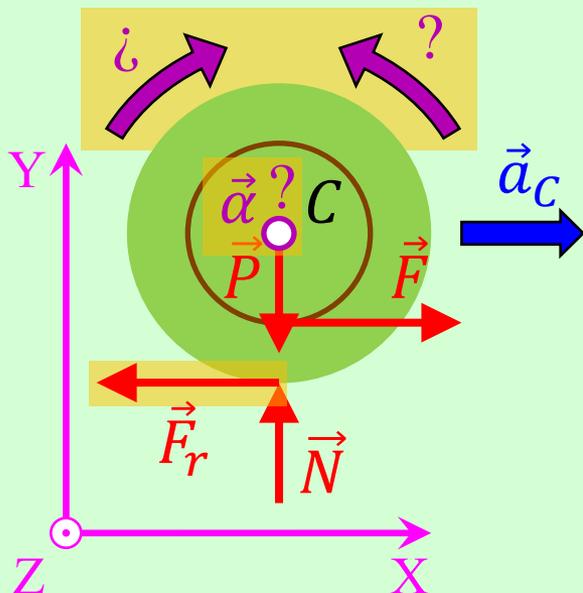
El carrito desliza, pero... ¿hacia dónde?

Hemos obtenido que, para que no deslice, la fuerza de rozamiento que se requiere es $\vec{F}_r = (-5; 0; 0)$ N, esto es, de 5 N hacia la izquierda.

Por tanto, se trata de la fuerza de rozamiento requerida para evitar que el punto de contacto deslice hacia la derecha.

Como esta fuerza no puede alcanzar el módulo necesario, no puede evitar que el punto de contacto tenga ese deslizamiento hacia la derecha.

Conclusión: El carrito desliza hacia adelante.

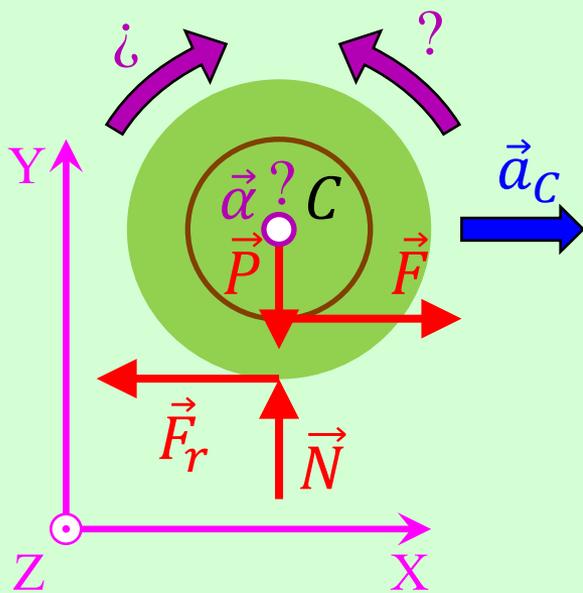


HIPÓTESIS: El carrito rueda deslizando hacia adelante.

Las consideraciones nuevas de cara al diagrama de cuerpo libre, son respecto a los sentidos de la fuerza de rozamiento y de la aceleración angular.

- Con la hipótesis anterior, “*el carrito rueda sin deslizar*”, no se conocía el sentido de \vec{F}_r , y sí el de $\vec{\alpha}$.
- Con la hipótesis actual, “*el carrito rueda deslizando hacia adelante*”, sabemos que el sentido de \vec{F}_r ha de ser hacia atrás (hacia la izquierda en el diagrama). Por su parte, el sentido de $\vec{\alpha}$ no está claro: el carrito puede girar tanto en un sentido como en el otro.

Ahora sí se conoce la orientación de \vec{F}_r , pero no su módulo. De $\vec{\alpha}$, se desconoce la componente Z, que puede ser tanto positiva como negativa. Tenemos así 4 incógnitas: N , F_r (en lugar de F_{rx}), a_C y α_Z (en lugar de α). Necesitamos pues, de nuevo, 4 ecuaciones.



HIPÓTESIS: El carrito rueda deslizando hacia adelante.

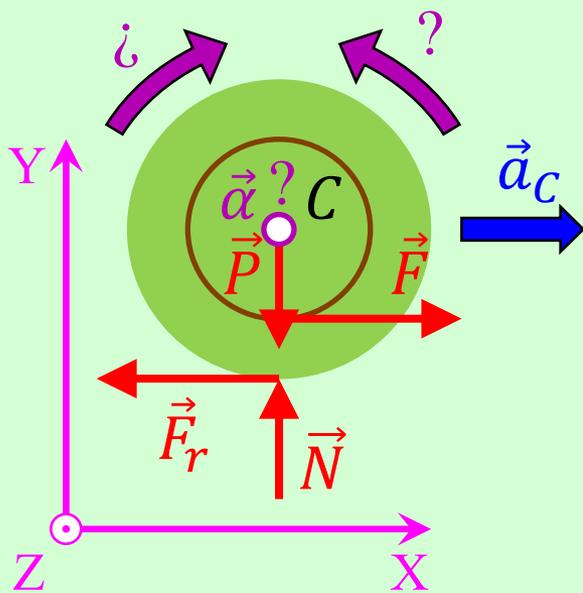
En lo que sigue, los cambios respecto a lo que se hizo bajo la hipótesis “el carrito rueda sin deslizar” aparecen resaltados en **amarillo**.

Aplicando el teorema del centro de masas, es

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r = m\vec{a}_C$$

$$(7; 0; 0) + (0; -4 \times 9,8; 0) + (0; N; 0) + (-F_r; 0; 0) = 4(a_C; 0; 0)$$

$$\begin{cases} 7 - F_r = 4a_C \\ -39,2 + N = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$



HIPÓTESIS: El carrito rueda deslizando hacia adelante.

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación al eje paralelo al de giro que pasa por el centro de masas, es

$$\vec{M}_{\vec{F}} + \vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{N}} + \vec{M}_{\vec{F}_r} = I_c \vec{\alpha}$$

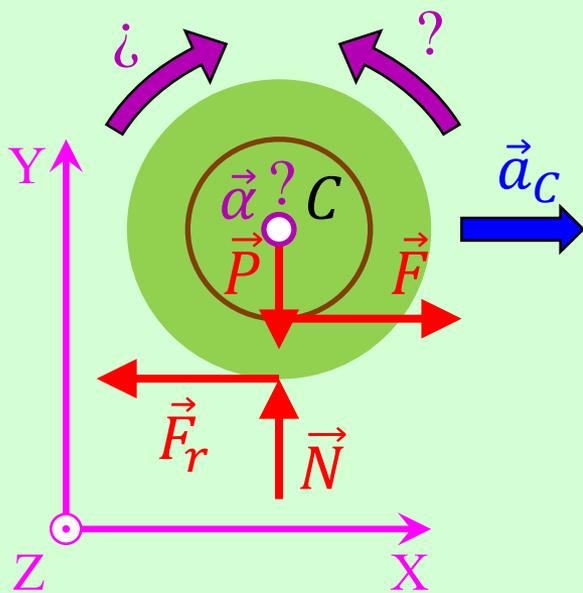
Todos estos vectores tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación, resulta

$$(+7 \times 0,3) + 0 + 0 + (-F_r \times 0,5) = 0,4 \alpha_z \Rightarrow +2,1 - 0,5 F_r = 0,4 \alpha_z$$

Fuerzas de brazo 0 m.

- Fuerza de módulo 7 N.
- Brazo 0,3 m.
- Sentido hacia fuera del plano de la página.

- Fuerza de módulo F_r .
- Brazo 0,5 m.
- Sentido hacia dentro del plano de la página.



HIPÓTESIS: El carrito rueda deslizando hacia adelante.

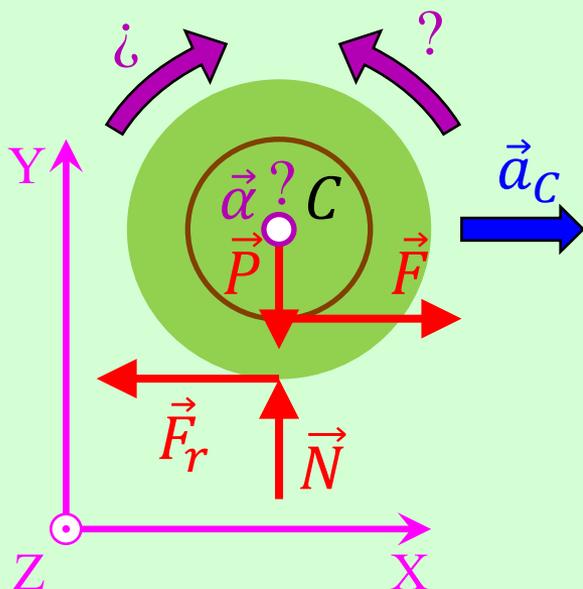
La cuarta y última ecuación es que, puesto que el punto de contacto con el suelo desliza, es

$$F_r = F_{r\text{máx}} = \mu N = 0,02N$$

¡Atención!

Puesto que, de acuerdo con la hipótesis adoptada, el carrito desliza, no es válida la siguiente relación:

~~$$a_c = \alpha \times 0,5$$~~



HIPÓTESIS: El carrito rueda deslizando hacia adelante.

$$7 - F_r = 4a_c$$

$$-39,2 + N = 0$$

$$+2,1 - 0,5F_r = 0,4\alpha_z$$

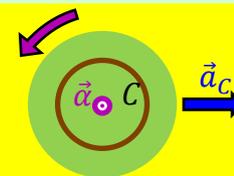
$$F_r = 0,02N$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$a_c = 1,554 \text{ m/s}^2 \quad \alpha_z = 4,27 \text{ rad/s}^2 \quad N = 39,2 \text{ N}$$

$$F_r = 0,784 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_r = (-F_r; 0; 0) = (-0,784; 0; 0) \text{ N}$$

Nótese que α_z es positiva, y por tanto el carrito gira en sentido antihorario.

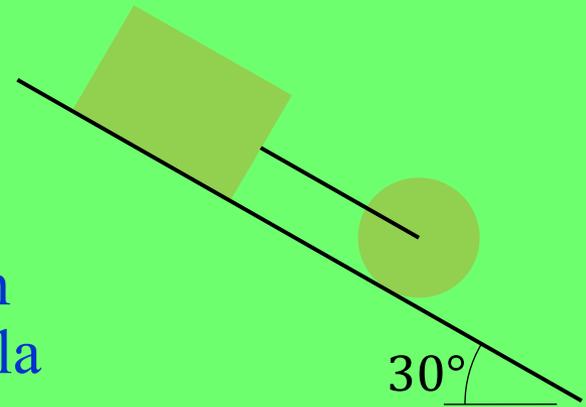


¿Cómo se comprueba la hipótesis?

Tanto la traslación hacia la derecha, como la rotación antihoraria, hacen que el punto de contacto con el suelo se desplace hacia la derecha. En efecto, el carrito rueda deslizando hacia adelante.

Ejercicio 26

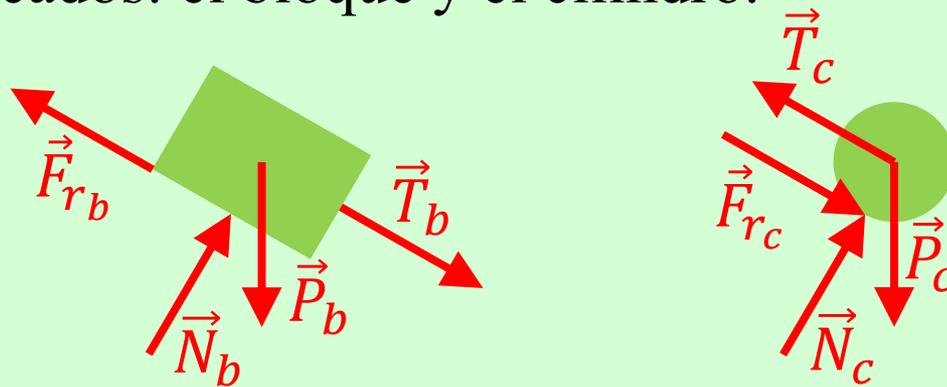
Un bloque de 2 kg de masa está unido, mediante una cuerda ideal, al eje de un cilindro de 2 kg y 20 cm de radio, tal y como indica la figura. Ambos se mueven sobre un plano inclinado 30° respecto a la horizontal. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,4, y el cilindro gira sin deslizar. Aplicando el teorema del centro de masas y momentos, obténgase el módulo de la tensión en la cuerda que une ambos cuerpos, y el módulo de la velocidad del bloque cuando, tras partir del reposo, ha recorrido 1 m sobre el plano inclinado. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento mínimo que debe existir entre el suelo y el cilindro para que, efectivamente, este ruede sin deslizar?



En el enunciado no se da el valor del coeficiente de rozamiento entre el cilindro y el suelo.

Sin embargo, se indica que el cilindro gira sin deslizar, esto es, que ese coeficiente es suficiente para que no se produzca deslizamiento.

El primer paso es realizar los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos implicados: el bloque y el cilindro.



\vec{P}_b : peso del bloque.

\vec{N}_b : reacción normal del suelo sobre el bloque.

\vec{F}_{rb} : fuerza de rozamiento del suelo sobre el bloque.

\vec{T}_b : fuerza ejercida por la cuerda sobre el bloque.

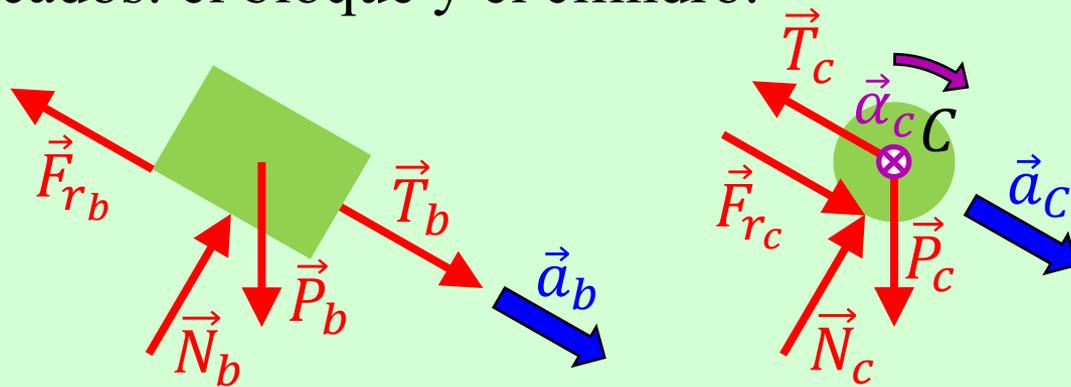
\vec{P}_c : peso del cilindro.

\vec{N}_c : reacción normal del suelo sobre el cilindro.

\vec{F}_{rc} : fuerza de rozamiento del suelo sobre el cilindro.

\vec{T}_c : fuerza ejercida por la cuerda sobre el cilindro.

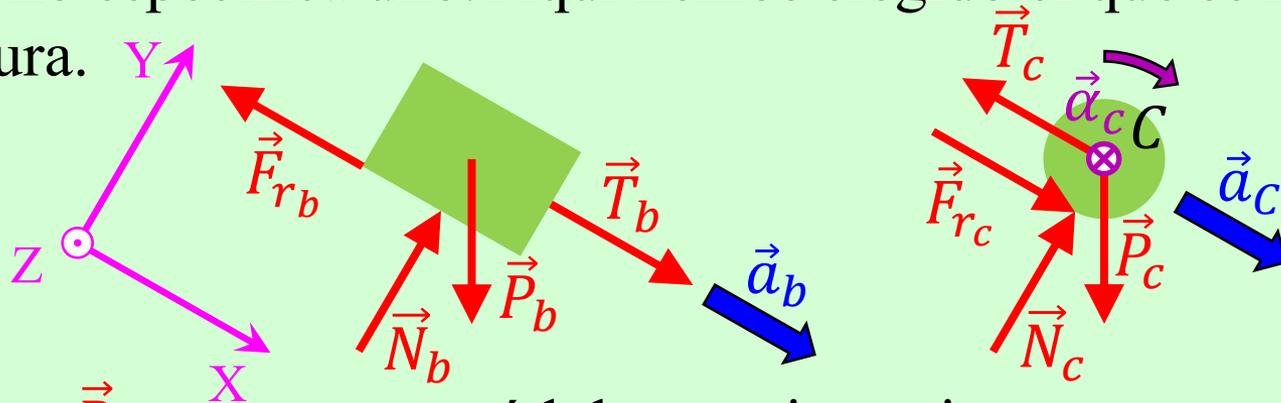
El primer paso es realizar los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos implicados: el bloque y el cilindro.



Como consecuencia de la acción de estas fuerzas, el bloque tiene una aceleración \vec{a}_b (común al centro de masas y a todos los puntos del bloque, ya que el movimiento resultante es de traslación).

Por su parte, el cilindro tiene una aceleración del centro de masas \vec{a}_c , y una aceleración angular $\vec{\alpha}_c$ perpendicular al plano de la página, y hacia dentro por la regla de Maxwell.

Hay que establecer un sistema de referencia dextrógiro, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.



De \vec{P}_b y \vec{P}_c se conocen módulos y orientaciones.

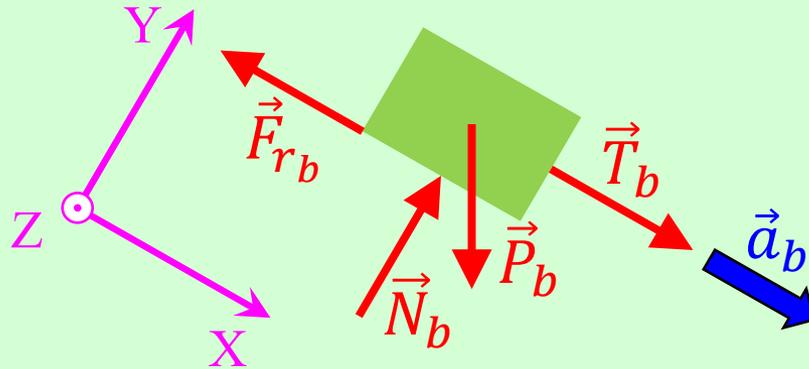
De \vec{N}_b , \vec{F}_{rb} y \vec{N}_c se conocen sus orientaciones, pero no sus módulos.

De \vec{F}_{rc} se conoce su dirección, pero no su módulo ni su sentido. Por tanto, se desconoce su componente X, aunque sí se sabe que la Y y la Z son 0.

De \vec{T}_b y \vec{T}_c se conocen sus orientaciones, pero no su módulo T (común por ser cuerda ideal).

De \vec{a}_b , \vec{a}_c y $\vec{\alpha}_c$ se conocen sus orientaciones, pero no sus módulos.

Por tanto, tenemos 8 incógnitas: N_b , F_{rb} , N_c , F_{rcx} , T , a_b , a_c y α_c . Necesitamos pues 8 ecuaciones.

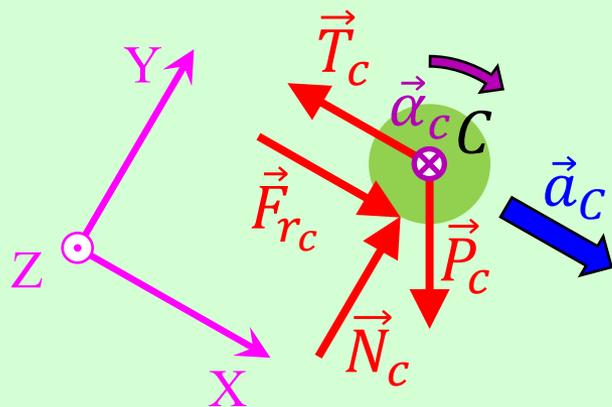


Aplicando el teorema del centro de masas al bloque, es

$$\vec{P}_b + \vec{N}_b + \vec{F}_{rb} + \vec{T}_b = m_b \vec{a}_b$$

$$(2 \times 9,8 \sin 30^\circ; -2 \times 9,8 \cos 30^\circ; 0) + (0; N_b; 0) + (-F_{rb}; 0; 0) + (T; 0; 0) = 2(a_b; 0; 0)$$

$$\begin{cases} 9,8 - F_{rb} + T = 2a_b & (1) \\ -16,97 + N_b = 0 & (2) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

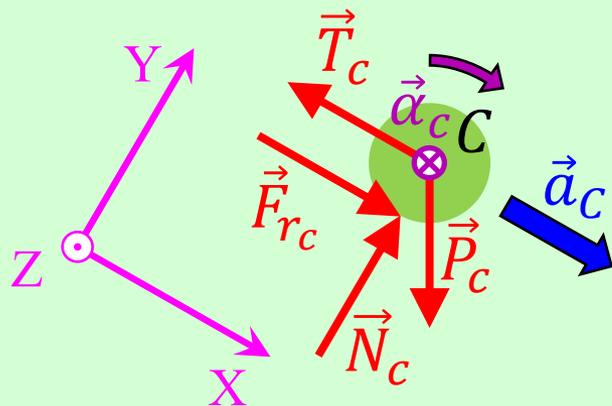


Aplicando el teorema del centro de masas al cilindro, es

$$\vec{P}_c + \vec{N}_c + \vec{F}_{rc} + \vec{T}_c = m_c \vec{a}_c$$

$$(2 \times 9,8 \sin 30^\circ; -2 \times 9,8 \cos 30^\circ; 0) + (0; N_c; 0) + \\ + (F_{rcx}; 0; 0) + (-T; 0; 0) = 2(a_c; 0; 0)$$

$$\begin{cases} 9,8 + F_{rcx} - T = 2a_c & (3) \\ -16,97 + N_c = 0 & (4) \\ 0 = 0 \end{cases}$$



Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación al eje paralelo al de giro que pasa por el centro de masas del cilindro, es

$$\vec{M}_{\vec{P}_c} + \vec{M}_{\vec{N}_c} + \vec{M}_{\vec{F}_{rc}} + \vec{M}_{\vec{T}_c} = I_c \vec{\alpha}_c$$

Todos estos vectores tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación, resulta

$$0 + 0 + F_{rcx} \times 0,2 + 0 = \left[\frac{1}{2} \times 2 \times 0,2^2 \right] (-\alpha_c)$$

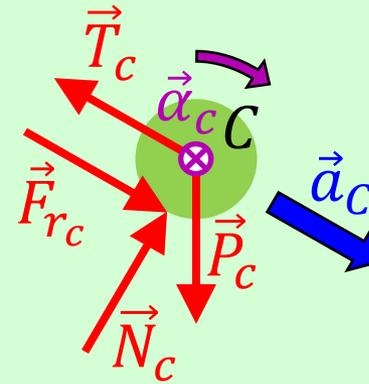
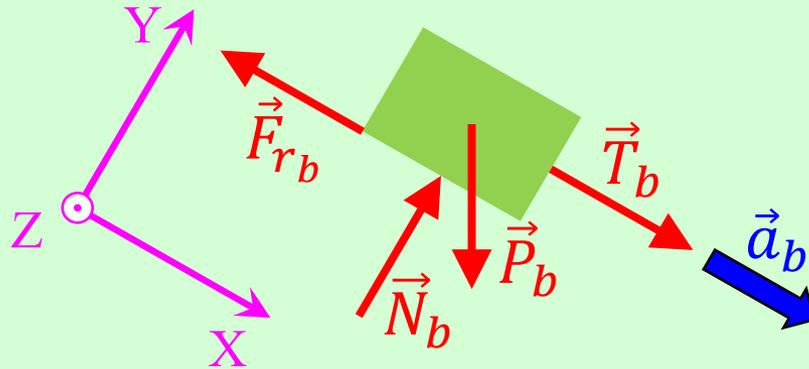
- Fuerza de componente F_{rcx} .
- Brazo 0,2 m.
- Si $F_{rcx} > 0$, sentido hacia fuera del plano de la página.

Fuerzas de brazo 0 m.

Sentido hacia dentro del plano de la página.

Por tanto,

$$0,2F_{rcx} = -0,04\alpha_c \quad (5)$$

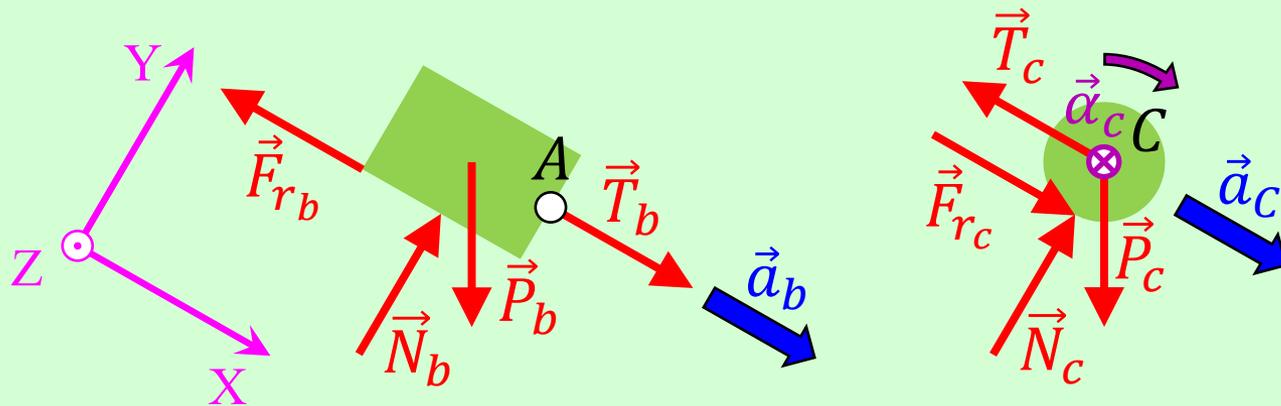


Como el bloque está deslizando, es

$$F_{r_b} = F_{r_{b_{m\acute{a}x}}} = \mu_b N_b = 0,4 N_b \quad (6)$$

Como el cilindro rueda sin deslizar, es

$$a_c = \alpha_c \times 0,2 \quad (7)$$



La octava ecuación es la relación de aceleraciones por cuerda: sus puntos A y C han de tener aceleraciones del mismo módulo.

En el punto A , donde la cuerda se mueve solidariamente con el punto del bloque al que está anclada, es $a_A = a_b$.

En el punto C , donde la cuerda se mueve solidariamente con el eje del cilindro, se tiene obviamente a_C .

Por la presencia de la cuerda ideal, es

$$a_C = a_A \Rightarrow a_C = a_b \quad (8)$$

Resumendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} 9,8 - F_{r_b} + T = 2a_b \quad (1) \\ -16,97 + N_b = 0 \quad (2) \\ 9,8 + F_{r_{cx}} - T = 2a_c \quad (3) \\ -16,97 + N_c = 0 \quad (4) \\ 0,2F_{r_{cx}} = -0,04\alpha_c \quad (5) \\ F_{r_b} = 0,4N_b \quad (6) \\ a_c = \alpha_c \times 0,2 \quad (7) \\ a_c = a_b \quad (8) \end{array} \right.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$\begin{array}{ll} N_b = 16,97 \text{ N} & F_{r_b} = 6,788 \text{ N} \\ N_c = 16,97 \text{ N} & F_{r_{cx}} = -2,562 \text{ N} \\ T = 2,112 \text{ N} & a_b = 2,562 \text{ m/s}^2 \\ a_c = 2,562 \text{ m/s}^2 & \alpha_c = 12,81 \text{ rad/s}^2 \end{array}$$

El movimiento del bloque es rectilíneo con a_b constante. Por tanto,

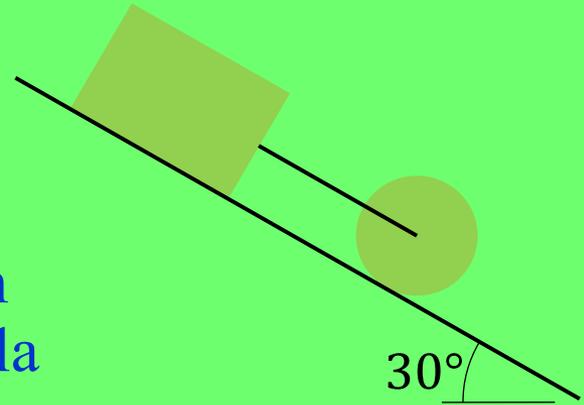
$$v_b = \sqrt{v_{b_0}^2 + 2a_b(s_b - s_{b_0})} = \sqrt{0^2 + 2 \times 2,562 \times 1} = 2,264 \text{ m/s}$$

Para que, en efecto, el cilindro ruede sin deslizar, su coeficiente de rozamiento μ_c con el suelo ha de ser

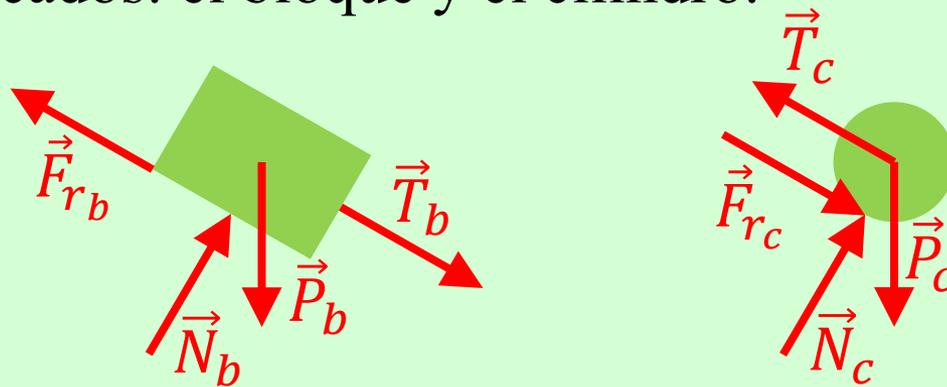
$$F_{r_c} \leq F_{r_{c_{\text{máx}}}} = \mu_c N_c \Rightarrow 2,562 \leq \mu_c \times 16,97 \Rightarrow \mu_c \geq 0,1510$$

Ejercicio 27

Un bloque de 2 kg de masa está unido, mediante una cuerda ideal, al eje de un cilindro de 2 kg y 20 cm de radio, tal y como indica la figura. Ambos se mueven sobre un plano inclinado 30° respecto a la horizontal. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,4, y el cilindro gira sin deslizar. Aplicando el teorema de la energía cinética, obténgase el módulo de la tensión en la cuerda que une ambos cuerpos, y el módulo de la velocidad del bloque cuando, tras partir del reposo, ha recorrido 1 m sobre el plano inclinado.



El primer paso es realizar los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos implicados: el bloque y el cilindro.



\vec{P}_b : peso del bloque.

\vec{N}_b : reacción normal del suelo sobre el bloque.

\vec{F}_{rb} : fuerza de rozamiento del suelo sobre el bloque.

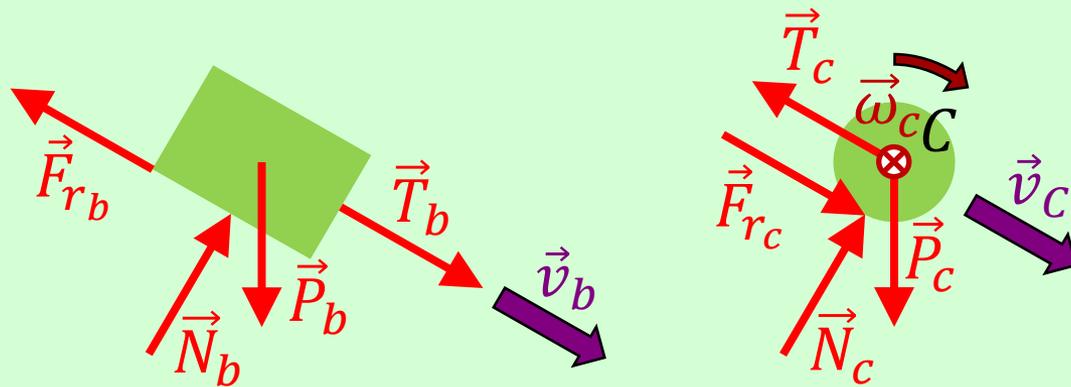
\vec{T}_b : fuerza ejercida por la cuerda sobre el bloque.

\vec{P}_c : peso del cilindro.

\vec{N}_c : reacción normal del suelo sobre el cilindro.

\vec{F}_{rc} : fuerza de rozamiento del suelo sobre el cilindro.

\vec{T}_c : fuerza ejercida por la cuerda sobre el cilindro.



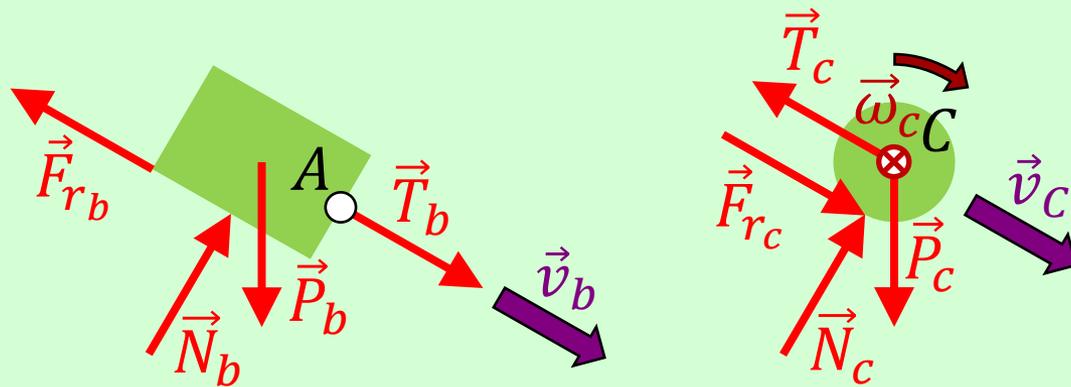
Sean:

v_b : módulo de la velocidad del bloque cuando ha recorrido $s_b = 1$ m.

v_C : módulo de la velocidad del centro de masas del cilindro en ese instante.

ω_c : módulo de la velocidad angular del cilindro en ese instante.

s_C : distancia recorrida por el centro de masas del cilindro hasta ese instante.



En el punto A, donde la cuerda se mueve solidariamente con el punto del bloque al que está anclada, es $v_A = v_b$.

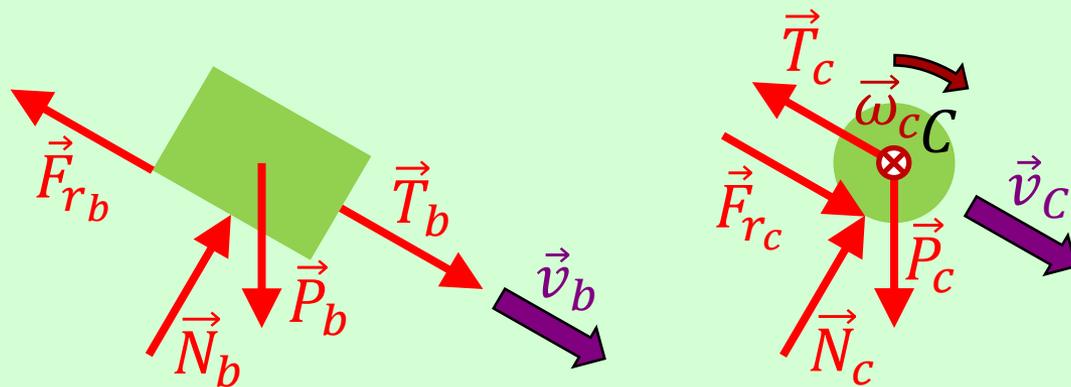
En el punto C, donde la cuerda se mueve solidariamente con el eje del cilindro, se tiene obviamente v_C .

Por la presencia de la cuerda ideal, es

$$\begin{cases} v_C = v_A \Rightarrow v_C = v_b \\ s_C = s_A = s_b = 1 \text{ m} \end{cases}$$

Por otro lado, como el cilindro rueda sin deslizar, es

$$v_C = \omega_c \times 0,2 \Rightarrow \omega_c = v_C / 0,2 = 5v_C = 5v_b$$

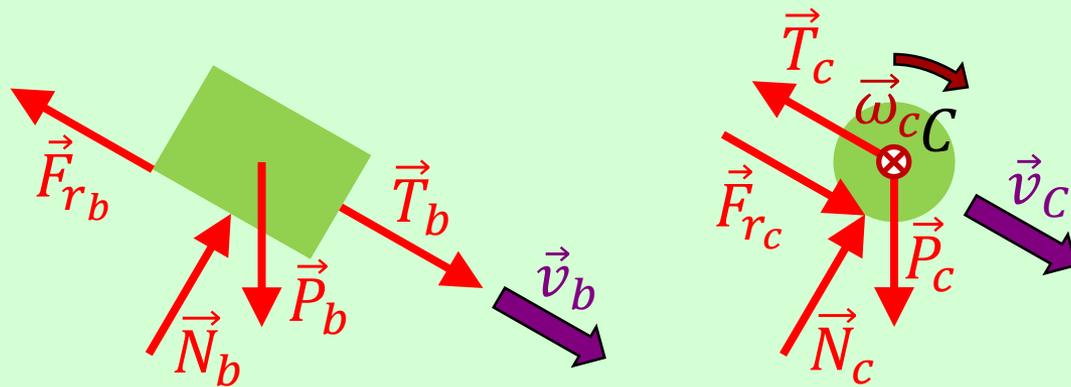


Aplicando el teorema de la energía cinética a cada uno de los cuerpos, supuestos indeformables, entre la situación inicial y tras haber recorrido el bloque 1 m, es

$$\Delta E_{c_b} = W_{\vec{P}_b} + W_{\vec{N}_b} + W_{\vec{F}_{rb}} + W_{\vec{T}_b}$$

$$\Delta E_{c_c} = W_{\vec{P}_c} + W_{\vec{N}_c} + W_{\vec{F}_{rc}} + W_{\vec{T}_c}$$

Aquí ΔE_{c_b} y ΔE_{c_c} son los correspondientes incrementos de energía cinética del bloque y el cilindro, respectivamente.



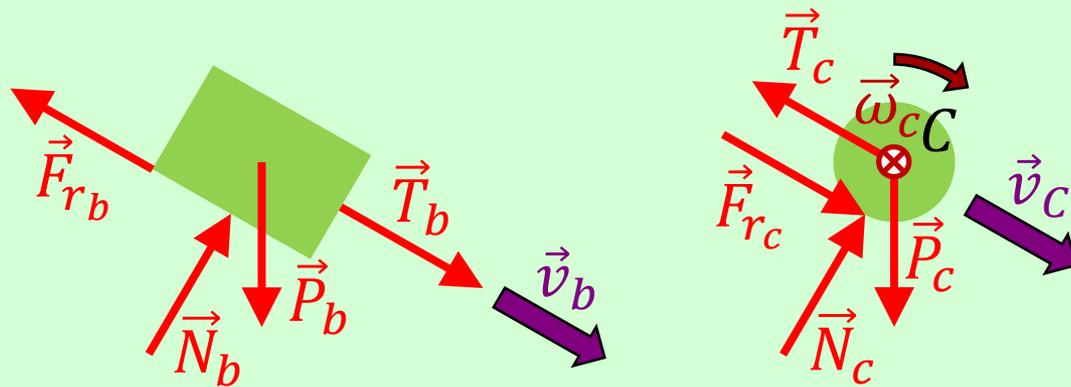
El momento de inercia del cilindro respecto al correspondiente eje que pasa por su centro de masas, es

$$I_c = \frac{1}{2} \times 2 \times 0,2^2 = 0,04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Los incrementos de energía cinética de los cuerpos son:

$$\Delta E_{c_b} = \frac{1}{2} 2 v_b^2 - \frac{1}{2} 2 \times 0^2 = v_b^2 \text{ (SI)}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{c_c} &= \left[\frac{1}{2} 2 v_c^2 + \frac{1}{2} 0,04 \omega_c^2 \right] - \left[\frac{1}{2} 2 \times 0^2 + \frac{1}{2} 0,04 \times 0^2 \right] = \\ &= v_b^2 + 0,02(5v_b)^2 = v_b^2 + 0,5v_b^2 = 1,5v_b^2 \text{ (SI)} \end{aligned}$$



Los trabajos de las fuerzas son:

$$\begin{aligned}
 W_{\vec{P}_b} &= -\Delta E_{p_b} = -m_b g \Delta h_b = \\
 &= -2 \times 9,8 \times (-1 \text{ sen } 30^\circ) = \\
 &= 9,8 \text{ J}
 \end{aligned}$$

$$W_{\vec{N}_b} = 0 \text{ J}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\vec{F}_{r_b}} &= -F_{r_b} s_b = -F_{r_b} \times 1 = \\
 &= -F_{r_b} \text{ (SI)}
 \end{aligned}$$

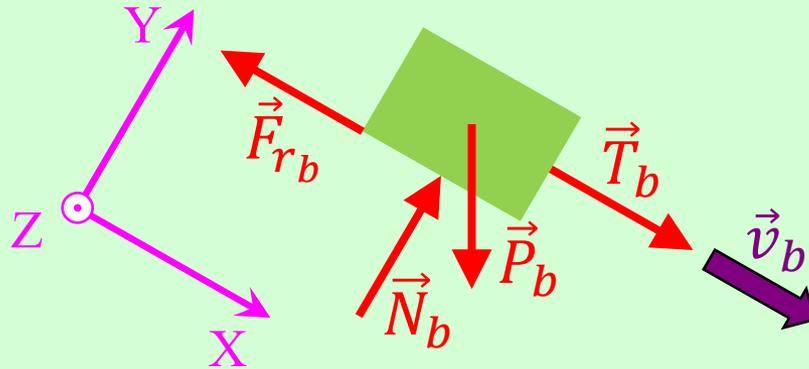
$$W_{\vec{T}_b} = T s_b = T \times 1 = T \text{ (SI)}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\vec{P}_c} &= -\Delta E_{p_c} = -m_c g \Delta h_c = \\
 &= -2 \times 9,8 \times (-1 \text{ sen } 30^\circ) = \\
 &= 9,8 \text{ J}
 \end{aligned}$$

$$W_{\vec{N}_c} = 0 \text{ J}$$

$$W_{\vec{F}_{r_c}} = 0 \text{ J (rueda sin deslizar)}$$

$$W_{\vec{T}_c} = -T s_c = -T \times 1 = -T \text{ (SI)}$$



Para poder conocer F_{r_b} se necesita el valor de N_b . Aplicando el teorema del centro de masas al bloque, es

$$\vec{P}_b + \vec{N}_b + \vec{F}_{r_b} + \vec{T}_b = m_b \vec{a}_b$$

Utilizando únicamente la componente Y de la ecuación anterior,

$$P_{b_y} + N_{b_y} + F_{r_{b_y}} + T_{b_y} = m a_{b_y}$$

$$(-2 \times 9,8 \cos 30^\circ) + N_b + 0 + 0 = m \cdot 0 \Rightarrow N_b = 16,97 \text{ N}$$

Como el bloque está deslizando,

$$F_{r_b} = F_{r_{b_{\text{máx}}}} = \mu_b N_b = 0,4 \times 16,97 = 6,788 \text{ N}$$

Por tanto,

$$W_{\vec{F}_{r_b}} = -F_{r_b} = -6,788 \text{ J}$$

Recapitulando:

$$\begin{aligned}\Delta E_{c_b} &= W_{\vec{P}_b} + W_{\vec{N}_b} + W_{\vec{F}_{r_b}} + W_{\vec{T}_b} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_b^2 &= 9,8 + 0 + (-6,788) + T = T + 3,012\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta E_{c_c} &= W_{\vec{P}_c} + W_{\vec{N}_c} + W_{\vec{F}_{r_c}} + W_{\vec{T}_c} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1,5v_b^2 &= 9,8 + 0 + 0 + (-T) = 9,8 - T\end{aligned}$$

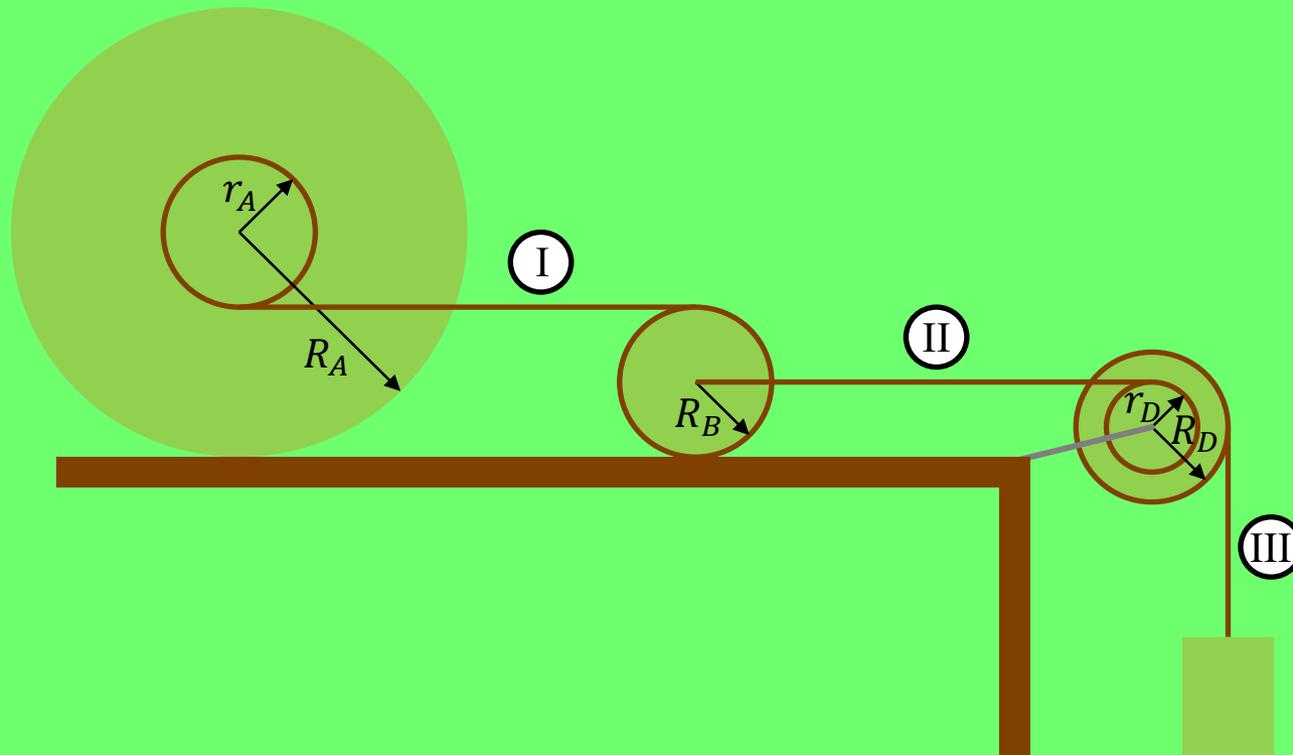
Sumando estas dos ecuaciones, resulta

$$2,5v_b^2 = 12,812 \Rightarrow v_b = 2,264 \text{ m/s}$$

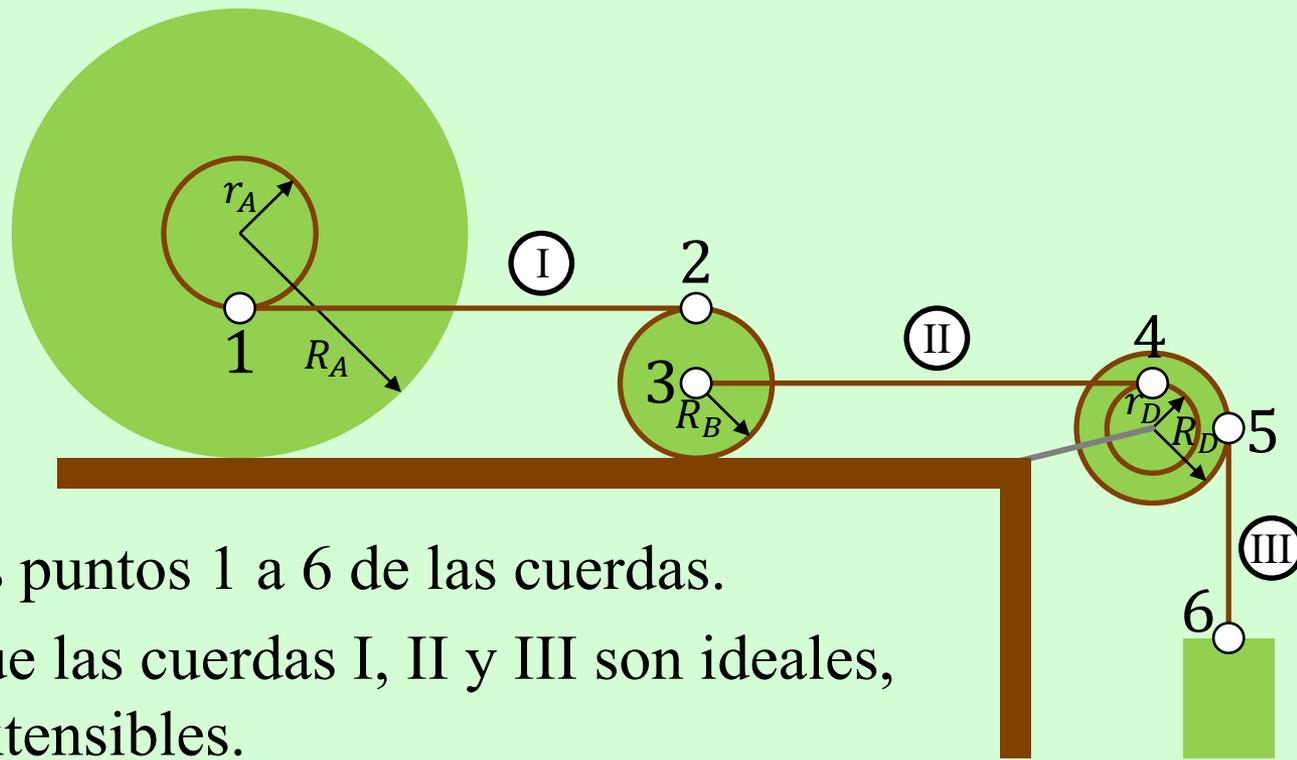
Por tanto,

$$v_b^2 = T + 3,012 \Rightarrow T = 2,264^2 - 3,012 = 2,114 \text{ N}$$

Ejercicio 28



Sea el sistema de la figura, constituido por un carrito A ($R_A = 0,6$ m; $r_A = 0,2$ m), una esfera B ($R_B = 0,2$ m), una polea de doble garganta D ($R_D = 0,2$ m; $r_D = 0,12$ m) y un bloque E. Las aceleraciones angulares y de centros de masas de estos cuerpos son \vec{a}_{C_A} , $\vec{\alpha}_A$, \vec{a}_{C_B} , $\vec{\alpha}_B$, \vec{a}_{C_D} y \vec{a}_{C_E} . Se pide escribir las relaciones de aceleraciones debidas a las cuerdas ideales I, II y III.



Sean los puntos 1 a 6 de las cuerdas.

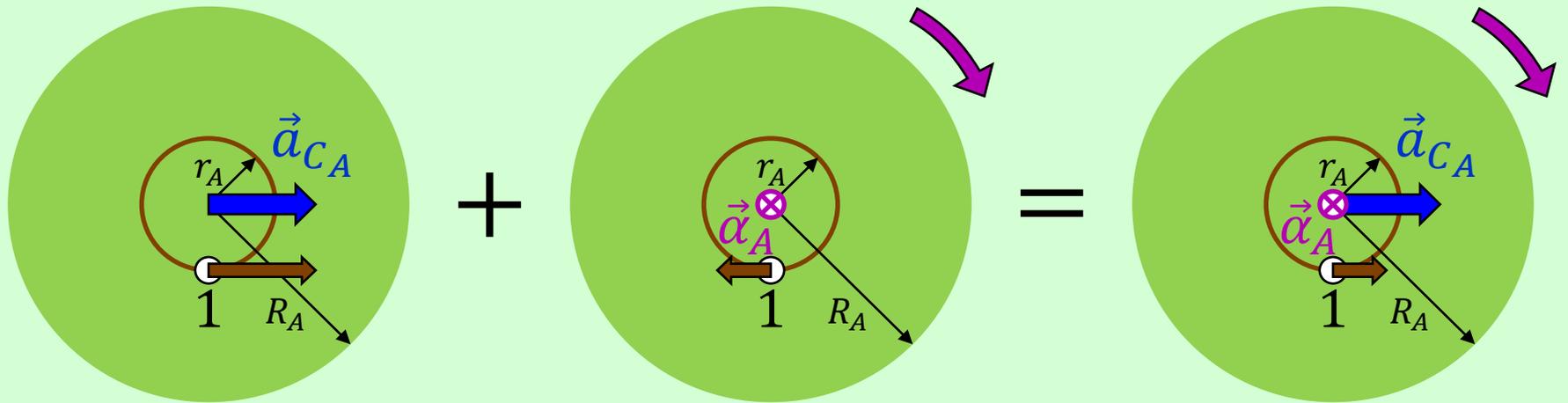
Dado que las cuerdas I, II y III son ideales, son inextensibles.

Como consecuencia, deben satisfacerse las tres igualdades siguientes.

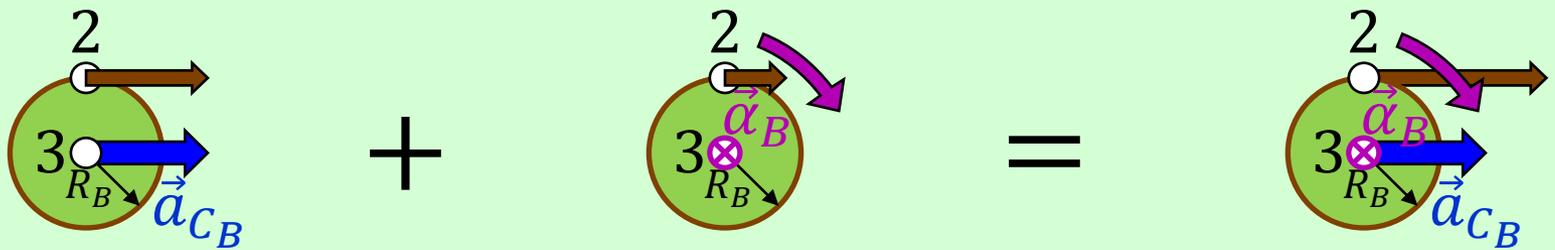
$$a_1 = a_2 \quad a_3 = a_4 \quad a_5 = a_6$$

Cada uno de estos valores está relacionado con la aceleración angular y del centro de masas del cuerpo adyacente.

A continuación obtendremos estas relaciones. Para ello utilizaremos un procedimiento análogo al empleado, para velocidades, en el apartado “[Velocidad de los puntos de una rueda](#)”.

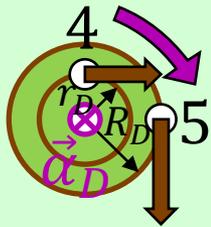


Punto 1. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Por traslación, } a_{C_A} \text{ hacia la derecha.} \\ \text{Por rotación, } \alpha_A r_A \text{ hacia la izquierda.} \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 = a_{C_A} - \alpha_A r_A$
 hacia la derecha.



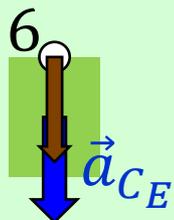
Punto 2. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Por traslación, } a_{C_B} \text{ hacia la derecha.} \\ \text{Por rotación, } \alpha_B R_B \text{ hacia la derecha.} \end{array} \right\} \Rightarrow a_2 = a_{C_B} + \alpha_B R_B$
 hacia la derecha.

Punto 3. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Por traslación, } a_{C_B} \text{ hacia la derecha.} \\ \text{Por rotación, } 0. \end{array} \right\} \Rightarrow a_3 = a_{C_B}$
 hacia la derecha.



Punto 4. Es un movimiento de rotación. $a_4 = \alpha_D r_D$ hacia la derecha.

Punto 5. Es un movimiento de rotación. $a_5 = \alpha_D R_D$ hacia abajo.



Punto 6. Es un movimiento de traslación. $a_6 = a_{C_E}$ hacia abajo.

Por tanto, las relaciones de aceleraciones debidas a las cuerdas ideales son las que siguen.

$$\begin{aligned}\text{Cuerda I: } a_1 = a_2 &\Rightarrow a_{C_A} - \alpha_A r_A = a_{C_B} + \alpha_B R_B \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_{C_A} - \alpha_A \times 0,2 = a_{C_B} + \alpha_B \times 0,2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cuerda II: } a_3 = a_4 &\Rightarrow a_{C_B} = \alpha_D r_D \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_{C_B} = \alpha_D \times 0,12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cuerda III: } a_5 = a_6 &\Rightarrow \alpha_D R_D = a_{C_E} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_D \times 0,2 = a_{C_E}\end{aligned}$$