FÍSICA TÉCNICA

Oscilaciones

V. 1.00.00

Marcos H. Giménez

Isabel Salinas

Vanesa P. Cuenca

Juan A. Monsoriu

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

ETSI Aeroespacial y Diseño Industrial

Créditos

Título:
Física Técnica

Subtítulo:
Oscilaciones

Autores:
Marcos H. Giménez, Isabel Salinas, Vanesa P. Cuenca y Juan A. Monsoriu

Editorial:
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial y Diseño Industrial

Valencia 2024

ISBN: 978-84-09-58862-6
Versión digital

Índice

Pulsando sobre el número de página de una diapositiva, se regresa a este índice.

I.- El movimiento armónico simple

Índice

II.- Sistemas con movimiento armónico simple

III.- Composición de m.a.s.

IV.- Energía de un m.a.s.

Índice

Índice (ejercicios)

Ejercicio 1

Una partícula tiene movimiento armónico simple, de pulsación $\omega = 3{,}3\ \mathrm{rad/s}$, a lo largo del eje X de un sistema de referencia. En el instante inicial, la partícula se encontraba en la coordenada $x_0 = -29$ cm, y se estaba alejando de la posición de equilibrio a $49{,}5\ \mathrm{cm/s}$. ¿Cuáles son el período y la frecuencia del movimiento? ¿Cuál es la ecuación de este?

Ejercicio 2

Un objeto de 20 g de masa está suspendido de un muelle de constante elástica $2\ \mathrm{N/m}$, cuyo otro extremo está unido al techo. Inicialmente el muelle está alargado 9 cm respecto a la posición de equilibrio del sistema, y el objeto se acerca a dicha posición a $150\ \mathrm{cm/s}$. Obténgase la ecuación del movimiento armónico simple del objeto.

Ejercicio 3

¿Qué longitud debe tener un péndulo simple para que su período sea de 1 s en un lugar donde el módulo de la aceleración de la gravedad es $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$? Una reloj basado en dicho péndulo, llevado a una montaña donde g es menor, ¿adelantará o atrasará?

Ejercicio 4

La tapa de la mirilla de una puerta tiene forma de disco de 1 cm de radio. El eje de giro está situado a 1 mm del contorno del disco. Si se hace oscilar la tapa, ¿cuál es el período de dicha oscilación? ¿Cuál es la longitud equivalente de la tapa?

Ejercicio 5

Se tiene una esfera maciza de 200 g de masa y 3 cm de radio. Para constituir un péndulo de torsión, se quiere suspender dicha esfera de un hilo de 10 cm de longitud, hecho de un material que tiene un módulo de rigidez de 72 GPa. ¿Qué grosor debe tener ese hilo para que el período del péndulo sea de 1 s?

Ejercicio 6

Un objeto está sometido a la superposición de dos movimientos armónicos simples, de ecuaciones $x_1 = 0{,}24\,\mathrm{sen}(20t + 0{,}3)$ (SI) y $x_2 = 0{,}16\,\mathrm{sen}(20t - 1{,}8)$ (SI). ¿Cuál es la ecuación del movimiento de ese objeto? ¿Qué tercer movimiento armónico simple habría que añadir para que la ecuación del movimiento del objeto fuera $x = 0{,}12\,\mathrm{sen}(20t + 0{,}9)$ (SI)?

Ejercicio 7

Un muelle, de constante elástica $25\ \mathrm{N/m}$ y masa despreciable, está colgado de uno de sus extremos, y en el otro lleva sujeto un objeto de masa 400 g. Tras comenzar un movimiento armónico simple, se observa que el módulo de la velocidad máxima del objeto es de $0{,}8\ \mathrm{m/s}$. Obténgase el valor absoluto de la elongación del muelle, y las energías cinética, potencial y mecánica del sistema, en los instantes en que el módulo de la velocidad del objeto es de $0{,}6\ \mathrm{m/s}$. Obténgase también la amplitud de la oscilación.

Ejercicio 8

Se deja caer un cuerpo de 5 kg de masa. Sabiendo que su coeficiente de amortiguamiento con el aire es 0,8 kg/s, ¿cuál es el módulo de la velocidad límite de caída del cuerpo?

Ejercicio 9

Un objeto de 20 g de masa está suspendido de un muelle de constante elástica $2\ \mathrm{N/m}$, cuyo otro extremo está unido al techo. Inicialmente el muelle está alargado 9 cm respecto a la posición de equilibrio del sistema, y el objeto se acerca a dicha posición a $150\ \mathrm{cm/s}$. Obténgase la ecuación del movimiento del objeto, sabiendo que el coeficiente de amortiguamiento es: a) $0{,}24\ \mathrm{kg/s}$; b) $0{,}5\ \mathrm{kg/s}$. c) ¿Cuál tendría que ser el coeficiente para que el amortiguamiento fuera crítico, y cuál sería entonces la ecuación del movimiento?

Ejercicio 10

Un objeto de 300 g de masa está unido a un muelle de constante $4{,}8\ \mathrm{N/m}$, cuyo otro extremo es fijo. El coeficiente de amortiguamiento del sistema es $0{,}072\ \mathrm{kg/s}$.

a) ¿Cuál es el período de la oscilación amortiguada resultante?
b) ¿Cuál es el cociente entre la amplitud en un máximo de la oscilación y la del siguiente?
c) ¿En qué porcentaje se reduce la amplitud en un período?
d) ¿Cuántas oscilaciones realiza el sistema en el tiempo en que la amplitud pasa a ser un 5 % de la inicial?
e) ¿Cuál hubiera tenido que ser el coeficiente de amortiguamiento para que, tras 10 oscilaciones, la amplitud ya fuera un 5 % de la inicial?
f) ¿Cuál sería el período en este caso?

Ejercicio 11

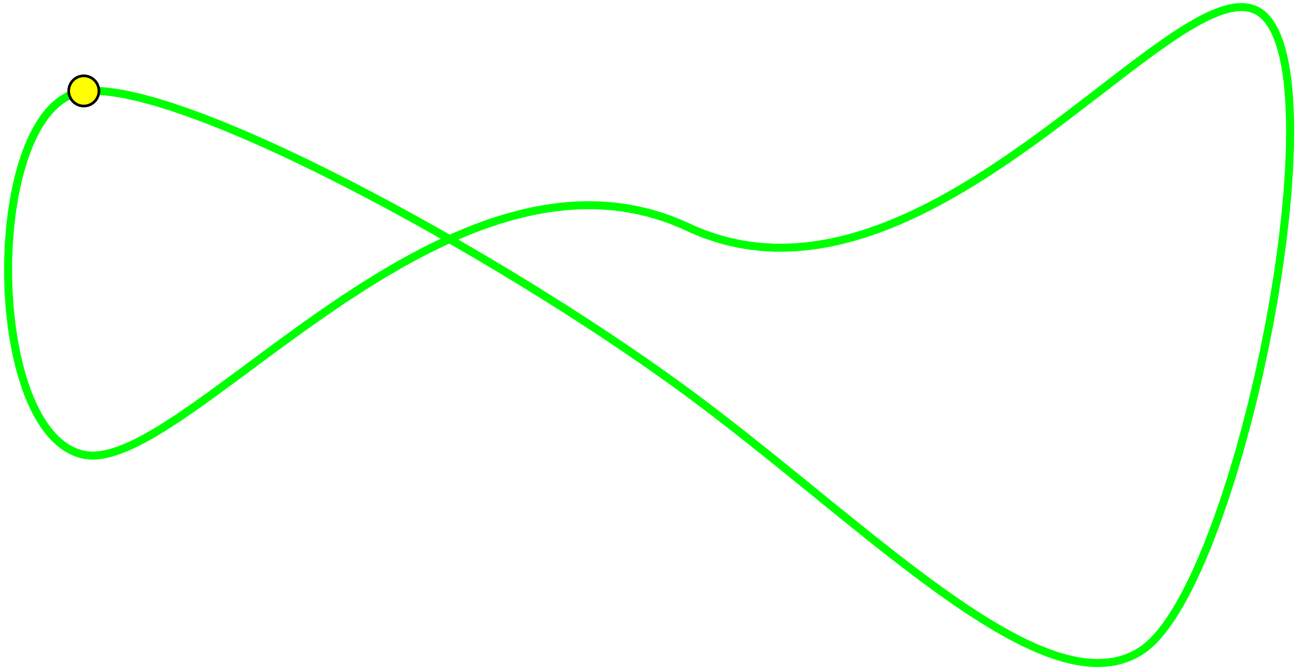
Un objeto de 20 g de masa está suspendido de un muelle de constante elástica $2\ \mathrm{N/m}$, cuyo otro extremo está unido al techo. Inicialmente el muelle está alargado 9 cm respecto a la posición de equilibrio del sistema, y el objeto se acerca a dicha posición a $150\ \mathrm{cm/s}$. El coeficiente de amortiguamiento es $0{,}24\ \mathrm{kg/s}$. El sistema está también sometido a una fuerza periódica de ecuación $F_x = 2\,\mathrm{sen}(20t + 1)$ (SI). Obténgase la ecuación del movimiento del objeto.

I.- El movimiento armónico simple

Movimiento periódico

Se denomina movimiento periódico al que se repite a intervalos regulares de tiempo.

La duración T de ese intervalo de tiempo se denomina período. Obviamente, su unidad SI coherente es el s.



Movimiento periódico

Se denomina frecuencia de un movimiento periódico a la inversa de su período.

$$\boxed{f = 1/T}$$

De acuerdo con esta expresión, su producto dimensional es

$$\dim f = \mathsf{T}^{-1}$$

La unidad SI coherente de frecuencia se puede definir a partir de la misma expresión.

Definición: el hercio (símbolo Hz) es la frecuencia de un movimiento periódico de 1 s de período.

Por tanto, $\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$.

Movimiento periódico

La frecuencia en Hz es el número de veces que se repite el movimiento en 1 s. Por ejemplo:

- si $T = 0{,}2$ s, el movimiento se repite 5 veces cada segundo, y es $f = 1/T = 1/0{,}2 = 5$ Hz;
- si $T = 4$ s, el movimiento se repite 0,25 veces cada segundo, y es $f = 1/T = 1/4 = 0{,}25$ Hz.

En realidad, todo procede de una regla de tres:

$$\left.\begin{array}{l}\text{En } T \text{ segundos} \leftrightarrow 1 \text{ ciclo}\\ \text{En } 1 \text{ segundo} \quad \leftrightarrow f \text{ ciclos}\end{array}\right\} \quad f = \frac{1 \times 1}{T}$$

Movimiento vibratorio

Se denomina movimiento vibratorio a un movimiento periódico en el que el móvil oscila respecto a un punto medio, que es la posición de equilibrio estable.

Por ser posición de equilibrio estable, el móvil tiende a dirigirse hacia ella. Sin embargo, cuando la alcanza tiene una velocidad que hace que pase de largo. Tras detenerse, el móvil vuelve a dirigirse hacia la posición de equilibrio, repitiéndose el proceso indefinidamente si no hay pérdida de energía mecánica.

Un ejemplo de movimiento periódico que no es vibratorio, es el de la Tierra orbitando alrededor del Sol: en dicho movimiento, la Tierra no pasa por la posición de equilibrio estable, el centro del Sol. Afortunadamente.

Movimiento armónico simple (m.a.s.)

Se denomina movimiento armónico simple (abreviado m.a.s.) a aquel en el que la posición, función del tiempo, queda descrita por una expresión del tipo

$$\boxed{x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)}$$

Se trata de un tipo particular de oscilación alrededor de una posición de equilibrio estable. Por tanto, es un caso particular de movimiento vibratorio.

Dado que un seno oscila entre los valores 1 y -1, x lo hace entre A y $-A$.

Como se mostrará más adelante, la posición de equilibrio corresponde a $x = 0$.

Parámetros de un m.a.s.

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

x: Típicamente,* se trata de la coordenada que indica la posición en un movimiento unidimensional. En tal caso recibe el nombre de elongación, y su unidad en el SI es el m.

A: Es el valor máximo de x, y recibe el nombre de amplitud. Ha de ser una constante positiva. Se mide en la misma unidad que x, ya que un seno es una magnitud de dimensión uno.

* En ocasiones es más cómodo identificar la posición mediante otro tipo de parámetro. Por ejemplo, en un péndulo simple se utiliza el ángulo que forma con respecto a la vertical; en este caso la unidad SI coherente de x es el rad.

Parámetros de un m.a.s.

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

ω: Recibe el nombre de pulsación. Ha de ser una constante positiva. Puesto que $\omega t + \varphi$ ha de tener dimensión uno, el producto dimensional de ω es T^{-1}. Su unidad SI coherente es el rad/s (recuérdese que rad es 1).

t: Es el tiempo, cuya unidad SI es, como sabemos, el s.

φ: Recibe el nombre de fase inicial. Es una constante que puede ser positiva, negativa o cero. Por homogeneidad, su unidad SI coherente es el rad.

Nota: Fases iniciales que difieren en 2π rad corresponden al mismo m.a.s. P.ej., da igual que su valor en radianes sea 1, 1 + 2π, 1 + 4π, 1 − 2π, etc. Por comodidad, es habitual utilizar $\varphi \in (-\pi; \pi]$ rad.

Fase de un m.a.s.

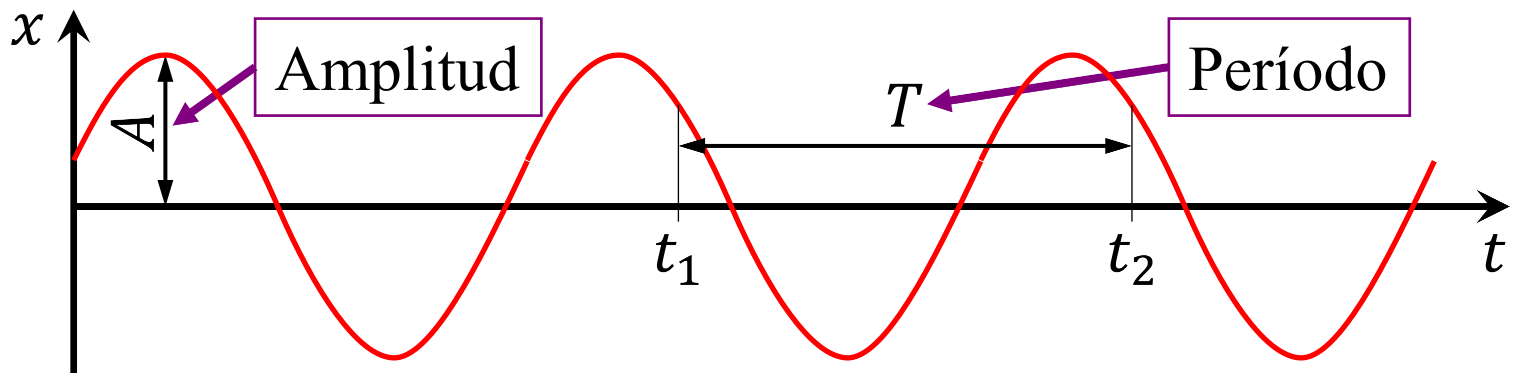
$$\boxed{x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)}$$

$\omega t + \varphi$ se denomina fase. Dado que φ es una constante, y que ω es una constante positiva, la fase crece linealmente.

Nótese que para $t = 0$ s el valor de la fase es φ. Este es el motivo de que φ se denomine fase inicial.

Período y frecuencia de un m.a.s.

$$\boxed{x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)}$$



Sea un instante t_1 cualquiera. En él, la fase es $\omega t_1 + \varphi$.

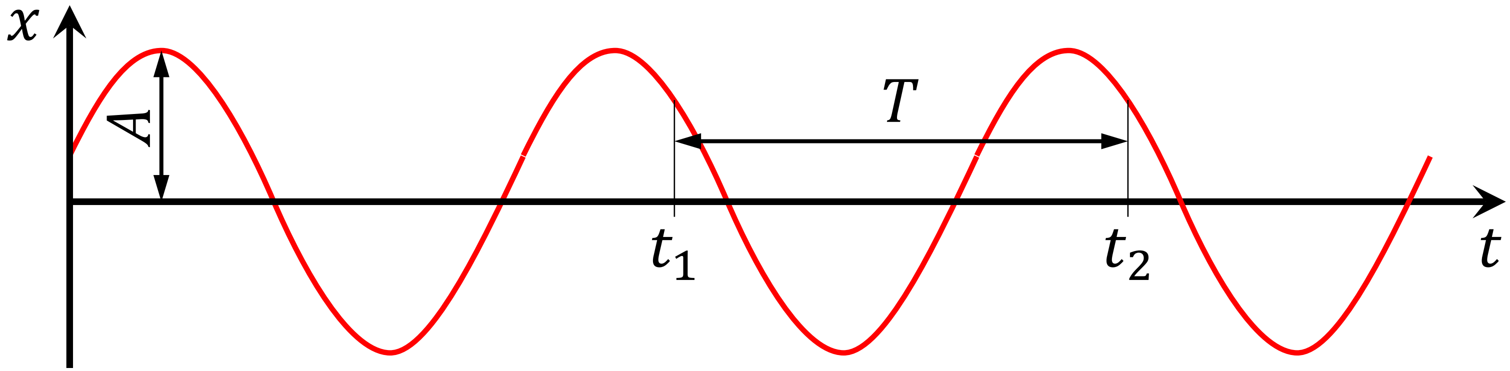
Sea el instante $t_2 = t_1 + T$. En él, la fase es $\omega t_2 + \varphi$.

Para que el intervalo $[t_1; t_2]$ abarque un ciclo, la fase debe haber aumentado 2π rad. Por tanto,

$$2\pi = (\omega t_2 + \varphi) - (\omega t_1 + \varphi) =$$
$$= \omega t_2 - \omega t_1 = \omega(t_2 - t_1) = \omega T$$

Período y frecuencia de un m.a.s.

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$



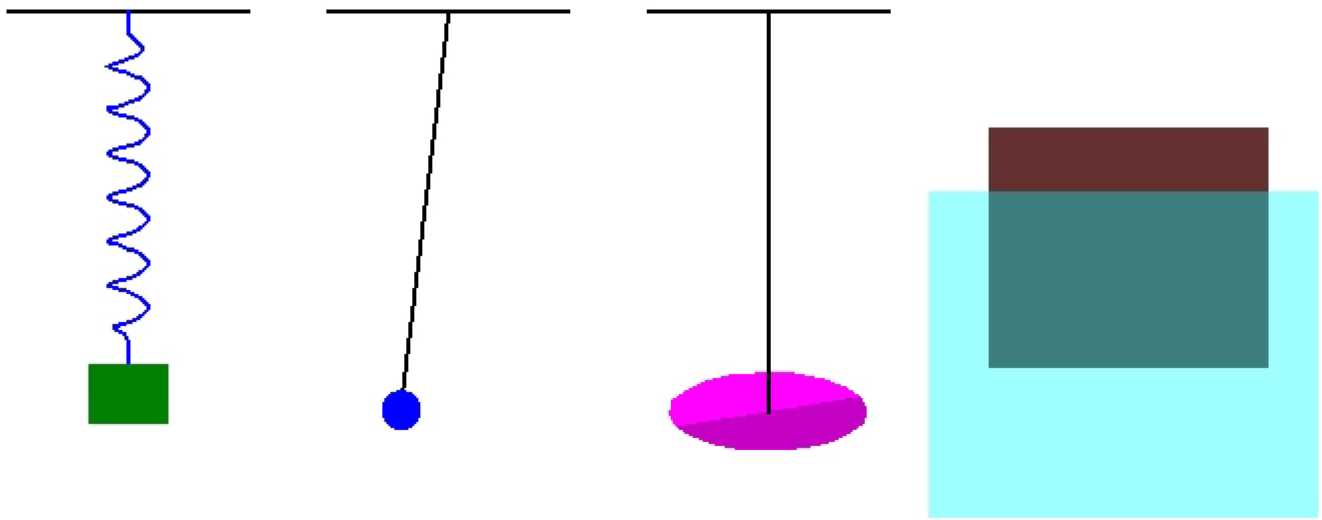
En consecuencia:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

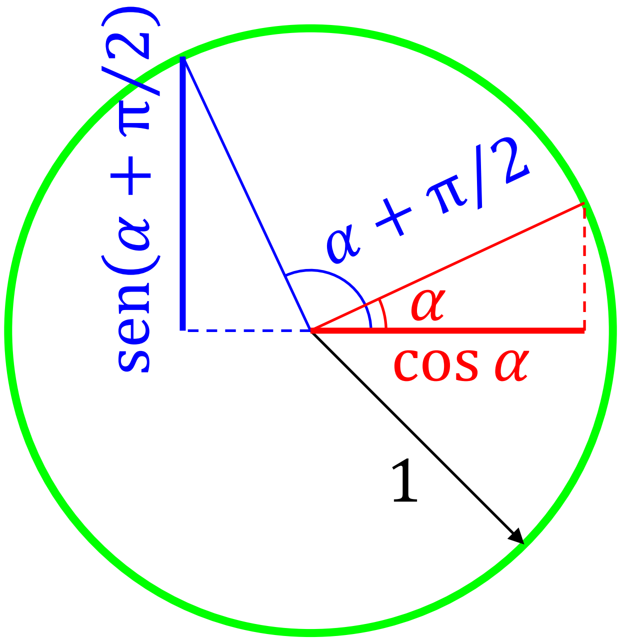
Ejemplos de m.a.s.

- Oscilaciones de un muelle.
- Péndulo simple.
- Péndulo de torsión.
- Oscilaciones de un prisma flotando en un líquido.



¿Y si es un coseno?

Existe un buen número de disciplinas y fuentes bibliográficas en las que se describe un m.a.s. mediante una ecuación de la forma $x = A\cos(\omega t + \varphi)$. ¿Es esto válido?



Como se muestra en la circunferencia unidad, es $\cos\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \pi/2)$. Por tanto,

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) =$$
$$= A\operatorname{sen}(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

En conclusión, la forma es válida. La única diferencia es que una fase inicial φ en el formato coseno, corresponde a una fase inicial $\varphi + \pi/2$ en el formato seno.

Cinemática de un m.a.s.

Sea un móvil que se desplaza sobre el eje X de un sistema de referencia, siendo su posición $x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$.

La velocidad del móvil únicamente tiene componente X, y es

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$$

La aceleración del móvil únicamente tiene componente X, y es

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

Para simplificar la notación, en alguna bibliografía se utiliza v para v_x, y a para a_x. Sin embargo, debemos recordar que en tal caso v y a no harán referencia a módulos, sino a componentes, y que por tanto tienen signo.

Cinemática de un m.a.s.

Recapitulando:

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$v_x = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$a_x = -\omega^2 A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

Aspectos destacables

- v_x oscila en el intervalo $[-\omega A; \omega A]$. Por tanto, el módulo máximo de la velocidad es ωA. Lo adquiere cuando el coseno de la fase es -1 (así $v_x = -\omega A$) o 1 (así $v_x = \omega A$), esto es, cuando el seno es 0, y por tanto cuando $x = 0$. Esto corresponde a la posición de equilibrio, por la que pasa dos veces por ciclo, una en cada sentido.

Cinemática de un m.a.s.

Recapitulando:

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$v_x = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$a_x = -\omega^2 A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

Aspectos destacables

- a_x oscila en el intervalo $[-\omega^2 A; \omega^2 A]$. Por tanto, el módulo máximo de la aceleración es $\omega^2 A$. Lo adquiere cuando el seno de la fase es -1 (así $a_x = \omega^2 A$ y $x = -A$) o 1 (así $a_x = -\omega^2 A$ y $x = A$). Esto corresponde a los extremos de la oscilación.
- Cuando $x = 0$ el seno de la fase es 0, y por tanto $a_x = 0$. Así pues, la resultante de las fuerzas aplicadas es nula, lo que confirma que se trata de una posición de equilibrio.

Cinemática de un m.a.s.

Para comprender mejor estos conceptos, se recomienda utilizar el laboratorio virtual *"Visualizador de movimientos bidimensionales"*.

https://riunet.upv.es/handle/10251/5122

- En la biblioteca de movimientos hay que seleccionar la opción vibratorio armónico simple de la lista desplegable.
- En la consola hay que pulsar sobre el botón inferior derecho para activar la repetición continua de la animación.
- En la consola hay que pulsar sobre el botón superior derecho para poner en marcha la animación.

Definición de m.a.s.

Hemos visto que:

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

Por tanto,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2[A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)] = -\omega^2 x$$

A la inversa, se puede demostrar que la solución de la ecuación diferencial $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$ es $x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$.

Definición de m.a.s.

Recapitulando:

$$\boxed{x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

Estas dos expresiones se implican mutuamente, y por tanto son equivalentes.

Por tanto, cualquiera de las dos puede considerarse como la definición de movimiento armónico simple, y la otra como la consecuencia.

Otras aplicaciones

La relación entre las expresiones $x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$ y $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$ es matemática, y por tanto no se limita al caso en que x es una coordenada.

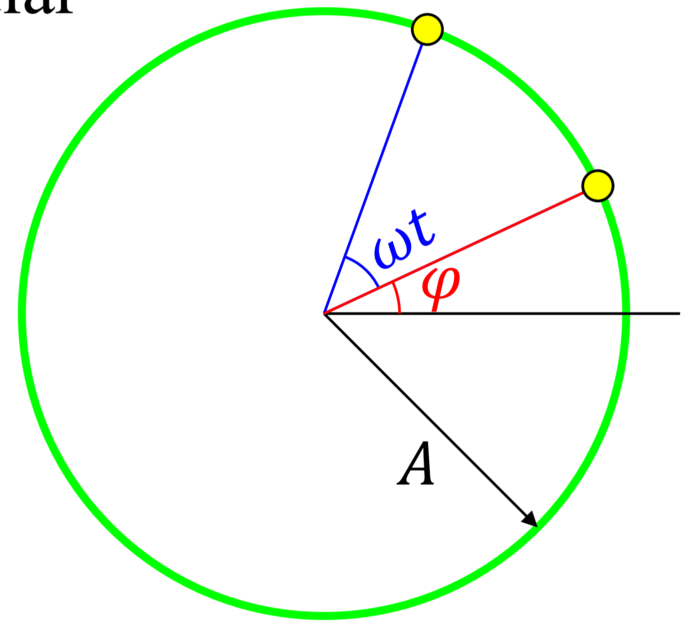
Sea, por ejemplo, un péndulo simple cuya posición se determina por el ángulo θ que forma con respecto a la vertical. Si el movimiento del péndulo es armónico simple, se tendrá que $\theta = \theta_{máx}\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$ y que $d^2\theta/dt^2 = -\omega^2\theta$.

En un circuito de corriente alterna sinusoidal, la corriente eléctrica I que circula por una rama cumple que $I = I_{máx}\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$ y que $d^2I/dt^2 = -\omega^2 I$. Además, la diferencia de potencial ΔV entre dos puntos cumple que $\Delta V = \Delta V_{máx}\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$ y que $d^2(\Delta V)/dt^2 = -\omega^2\Delta V$.

Relación entre m.a.s. y m.c.u.

Sea un m.a.s. de ecuación $x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$.

- Sea una circunferencia de radio igual a la amplitud A.
- Sea un móvil cuya posición angular respecto a una referencia dada es igual a la fase inicial φ.

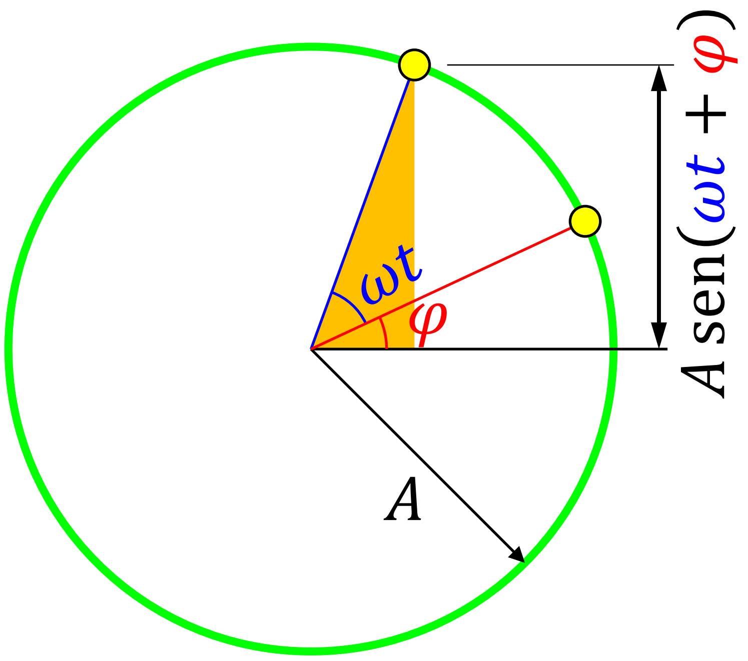


- A partir de ahí, el móvil recorre la circunferencia con movimiento circular uniforme, siendo el módulo de su velocidad angular igual a la pulsación ω.
- Consideremos que ha transcurrido un tiempo t, durante el cual el móvil ha girado un ángulo ωt.

Relación entre m.a.s. y m.c.u.

Como se muestra en la figura, la posición del móvil respecto a la línea de referencia de ángulos es $A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$.

En conclusión, la correspondiente proyección de este movimiento circular uniforme, es precisamente el movimiento armónico simple original.



Fasor de un m.a.s.

Se denomina fasor de un movimiento armónico simple al número complejo cuyo módulo y argumento son, respectivamente, la amplitud y la fase inicial de dicho m.a.s.

Por tanto, el fasor de $x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$ es $\vec{x} = A_\varphi$.

La notación $\vec{x}$ permite distinguir fácilmente el fasor del parámetro x. No debe extrañar dicha notación, ya que el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos es un espacio vectorial.

Recuérdese que un número complejo puede escribirse en forma polar como A_φ y $A\angle\varphi$, y en forma binómica (también denominada en ocasiones cartesiana o rectangular) como $A\cos\varphi + A\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{j}$.*

* En Matemáticas se emplea el símbolo i para la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$. Sin embargo, en Ingeniería lo habitual es utilizar j, y así se hará en el presente texto.

Fasor de un m.a.s.

Por ejemplo, el fasor de $x = 3{,}2\,\mathrm{sen}(4t + 0{,}8)$ (SI) es:

$$\vec{x} = 3{,}2_{0{,}8}\ \mathrm{m} \quad \text{(forma polar)}$$

$$\vec{x} = 3{,}2\angle 0{,}8\ \mathrm{m} \quad \text{(expresión alternativa de la forma polar)}$$

$$\vec{x} = 3{,}2\cos 0{,}8 + 3{,}2\,\mathrm{sen}\,0{,}8\,\mathrm{j} =$$
$$= 2{,}229 + 2{,}296\mathrm{j}\ \mathrm{m} \quad \text{(forma binómica)}$$

Dada una corriente alterna $I = 0{,}5\,\mathrm{sen}(50t - 0{,}4)$ (SI), el fasor sería:

$$\vec{I} = 0{,}5_{-0{,}4}\ \mathrm{A} \quad \text{(forma polar)}$$

$$\vec{I} = 0{,}5\angle -0{,}4\ \mathrm{A} \quad \text{(expresión alternativa de la forma polar)}$$

$$\vec{I} = 0{,}5\cos(-0{,}4) + 0{,}5\,\mathrm{sen}(-0{,}4)\,\mathrm{j} =$$
$$= 0{,}4605 - 0{,}1947\mathrm{j}\ \mathrm{A} \quad \text{(forma binómica)}$$

Fasor de un m.a.s.

Inciso

En el caso de corrientes alternas sinusoidales, existen dos criterios en la bibliografía con respecto al módulo del fasor.

- Utilizar el valor máximo de la corriente, como en el ejemplo anterior. Aquí se utilizará este criterio, con el fin de enfatizar la analogía entre oscilaciones mecánicas y eléctricas.
- Utilizar el denominado valor eficaz de la corriente, igual al máximo dividido por $\sqrt{2}$. Aunque es ampliamente utilizado, no es universal. Conforme a este criterio sería:

$$\vec{I} = \left(0{,}5/\sqrt{2}\right)_{-0{,}4} = 0{,}3536_{-0{,}4}\ \text{A} \ \ \text{(forma polar)}$$

$$\vec{I} = 0{,}3536\angle -0{,}4\ \text{A} \ \ \text{(expresión alternativa de la forma polar)}$$

$$\vec{I} = 0{,}3536\cos(-0{,}4) + 0{,}3536\,\text{sen}(-0{,}4)\,\text{j} =$$

$$= 0{,}3257 - 0{,}1377\text{j}\ \text{A} \ \ \text{(forma binómica)}$$

Fasor de un m.a.s.

Nótese que un movimiento armónico simple queda definido por su fasor y su pulsación. Por ejemplo:

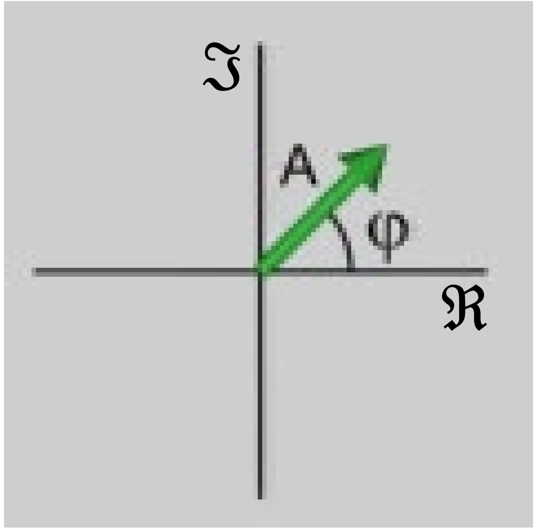
$$\left.\begin{array}{l}\vec{x} = 0{,}28_{-1{,}3}\ \mathrm{m} \\ \omega = 3{,}7\ \mathrm{rad/s}\end{array}\right\}\ x = 0{,}28\,\mathrm{sen}(3{,}7t - 1{,}3)\ \ (\mathrm{SI})$$

El uso de fasores simplifica notablemente el cálculo en un buen número de problemas, como:

- obtención de la ecuación de un m.a.s. a partir de sus condiciones iniciales;
- composición de m.a.s.;
- resolución de circuitos de corriente alterna.

Fasor girando en el plano complejo

Sea el m.a.s. $x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$, cuyo fasor $\vec{x} = A_\varphi$ aparece aquí representado en el plano complejo.



Si el fasor gira, respecto al origen, con velocidad angular de módulo ω igual a la pulsación, su extremo describe un movimiento circular uniforme.

Así, la parte imaginaria coincide en todo momento con el valor de x.

Ejercicio 1

Una partícula tiene movimiento armónico simple, de pulsación $\omega = 3{,}3\ \mathrm{rad/s}$, a lo largo del eje X de un sistema de referencia. En el instante inicial, la partícula se encontraba en la coordenada $x_0 = -29$ cm, y se estaba alejando de la posición de equilibrio a $49{,}5\ \mathrm{cm/s}$. ¿Cuáles son el período y la frecuencia del movimiento? ¿Cuál es la ecuación de este?

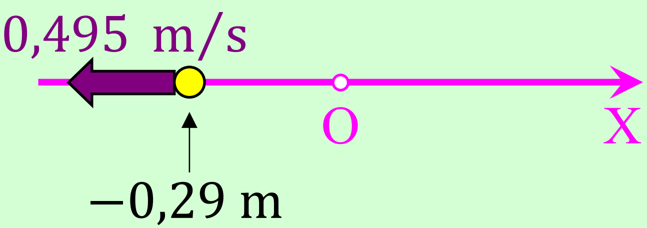
El período y la frecuencia son:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3{,}3} = 1{,}904\ \mathrm{s} \ ; \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}904} = 0{,}5252\ \mathrm{Hz}$$

Conocida la pulsación, se tiene que las expresiones de posición y velocidad para cualquier instante t, y en particular para $t = 0$ s, son:

$$x = A\,\mathrm{sen}(3{,}3t + \varphi) \;\Rightarrow x_0 = A\,\mathrm{sen}(3{,}3 \times 0 + \varphi) = A\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}3A\cos(3{,}3t + \varphi) \Rightarrow v_{x_0} = 3{,}3A\cos(3{,}3 \times 0 + \varphi) = \\ = 3{,}3A\cos\varphi$$



Sea el sistema de referencia de la figura. El origen de coordenadas O es la posición de equilibrio del móvil, ya que allí es $x = 0$ m.

Inicialmente, el móvil se encuentra en la posición $x_0 = -0{,}29$ m.

En ese instante, el móvil se aleja de la posición de equilibrio (O) a $0{,}495\,\mathrm{m/s}$. Por tanto, es $v_{x_0} = -0{,}495\,\mathrm{m/s}$.

En consecuencia: $A\,\mathrm{sen}\,\varphi = -0{,}29$

$$3{,}3A\cos\varphi = -0{,}495 \Rightarrow A\cos\varphi = -0{,}15$$

Tenemos, por tanto, el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (A y φ):

$$\begin{cases} A \operatorname{sen} \varphi = -0{,}29 \\ A \cos \varphi = -0{,}15 \end{cases}$$

Vamos a mostrar dos modos de resolverlo. El primero, que <u>recomendamos no utilizar</u> por los motivos que se expondrán, es el siguiente:

$$(A \operatorname{sen} \varphi)^2 + (A \cos \varphi)^2 = A^2(\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-0{,}29)^2 + (-0{,}15)^2 = A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{(-0{,}29)^2 + (-0{,}15)^2} = 0{,}3265 \text{ m}\,^{*}$$

$$\frac{A \operatorname{sen} \varphi}{A \cos \varphi} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \frac{-0{,}29}{-0{,}15} = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1{,}933 \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} 1{,}933 = 1{,}0934 \text{ rad}$$

* Se ha tomado como solución la raíz cuadrada positiva, ya que la amplitud ha de ser una constante positiva.

Por consiguiente: $x = 0{,}3265\,\mathrm{sen}(3{,}3t + 1{,}0934)$ (SI)

Vamos a comprobar si la solución es correcta.

$$x = 0{,}3265\,\mathrm{sen}(3{,}3t + 1{,}0934)\ \ (\mathrm{SI})$$

$$x_0 = 0{,}3265\,\mathrm{sen}(3{,}3 \times 0 + 1{,}0934) = 0{,}2900\ \mathrm{m} \neq -0{,}29\ \mathrm{m}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}3 \times 0{,}3265\cos(3{,}3t + 1{,}0934) =$$

$$= 1{,}077\cos(3{,}3t + 1{,}0934)\ \ (\mathrm{SI})$$

$$v_{x_0} = 1{,}077\cos(3{,}3 \times 0 + 1{,}0934) = 0{,}4948\,\mathrm{m/s} \neq -0{,}495\,\mathrm{m/s}$$

Nótese que no es un problema de precisión en los cálculos (un valor $v_{x_0} = -0{,}4948\,\mathrm{m/s}$ sería tolerable), sino de signos.

Por tanto, el ejercicio no ha sido resuelto correctamente.

El origen del problema es que en el presente tema trabajamos con $\varphi \in (-\pi; \pi]$ rad. Por tanto, siempre hay dos soluciones para un mismo seno (p.ej., para $\operatorname{sen}\theta = 0{,}4$ lo son el valor que da una calculadora, $0{,}4115$ rad, y su suplementario, $\pi - 0{,}4115 = 2{,}7301$ rad), y para un mismo coseno (p.ej., para $\cos\theta = 0{,}4$ lo son el valor que da la calculadora, $1{,}1593$ rad, y su opuesto, $-1{,}1593$ rad).

En el caso de la tangente, además de la solución proporcionada por la calculadora, existe otra que difiere de la primera en π rad (esto es, media vuelta).

Para que la segunda solución quede en el intervalo $(-\pi; \pi]$ rad, lo que debe hacerse es restar π rad a la primera si esta es positiva, y sumarlos si es negativa. Por ejemplo:

- Para $\operatorname{tg}\theta = 0{,}4$ la calculadora da el valor $0{,}3805$ rad. La otra solución es $0{,}3805 - \pi = -2{,}7611$ rad.
- Para $\operatorname{tg}\theta = -0{,}4$ la calculadora da el valor $-0{,}3805$ rad. La otra solución es $-0{,}3805 + \pi = 2{,}7611$ rad.

Retomando el ejercicio, tenemos:

$$\begin{cases} A\,\mathrm{sen}\,\varphi = -0{,}29 \\ A\cos\varphi = -0{,}15 \end{cases}$$

$$(A\,\mathrm{sen}\,\varphi)^2 + (A\cos\varphi)^2 = A^2(\mathrm{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi) = A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-0{,}29)^2 + (-0{,}15)^2 = A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{(-0{,}29)^2 + (-0{,}15)^2} = 0{,}3265\ \mathrm{m}$$

$$\frac{A\,\mathrm{sen}\,\varphi}{A\cos\varphi} = \frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos\varphi} = \mathrm{tg}\,\varphi \Rightarrow \frac{-0{,}29}{-0{,}15} = \mathrm{tg}\,\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\,\varphi = 1{,}933 \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}\,1{,}933 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = 1{,}0934\ \mathrm{rad} \\ \varphi = 1{,}0934 - \pi = -2{,}0482\ \mathrm{rad} \end{cases}$$

Las ecuaciones del sistema implican, por ser $A > 0$, que $\mathrm{sen}\,\varphi < 0$ y $\cos\varphi < 0$. Por tanto, el valor de φ ha de corresponder al tercer cuadrante, y el correcto es $\varphi = -2{,}0482\ \mathrm{rad}$.

Por consiguiente, $x = 0{,}3265\,\mathrm{sen}(3{,}3t - 2{,}0482)$ (SI)

Vamos a comprobar si la solución es correcta.

$$x = 0{,}3265\,\mathrm{sen}(3{,}3t - 2{,}0482)\ \ (\mathrm{SI})$$

$$x_0 = 0{,}3265\,\mathrm{sen}(3{,}3 \times 0 - 2{,}0482) = -0{,}2900\ \mathrm{m} \cong -0{,}29\ \mathrm{m}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}3 \times 0{,}3265\cos(3{,}3t - 2{,}0482) =$$

$$= 1{,}077\cos(3{,}3t - 2{,}0482)\ \ (\mathrm{SI})$$

$$v_{x_0} = 1{,}077\cos(3{,}3 \times 0 - 2{,}0482) = -0{,}4949\,\mathrm{m/s} \cong -0{,}495\,\mathrm{m/s}$$

Salvo las diferencias debidas a los redondeos realizados, la solución es correcta.

En general, este método de resolución requiere analizar los signos de sen φ y cos φ, que pueden darse en cuatro combinaciones diferentes.

Por tanto, dependiendo de las condiciones iniciales, φ puede corresponder a cualquiera de los cuatro cuadrantes.

En consecuencia, en un 50 % de los casos la solución correcta es la proporcionada por la calculadora u hoja de cálculo, y en otro 50 % es la otra. Por tanto, se requiere determinar en cada caso cuál es la correcta, lo que complica y enlentece la resolución.

¿Existe algún modo de obtener directamente la solución correcta?

Sí: obteniendo el fasor del movimiento armónico simple.

Volvamos de nuevo a nuestro sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} A \operatorname{sen} \varphi = -0{,}29 \\ A \cos \varphi = -0{,}15 \end{cases}$$

Sabemos que el fasor del movimiento armónico simple es $\vec{x} = A_\varphi$ en forma polar, y $\vec{x} = A \cos \varphi + A \operatorname{sen} \varphi \, \mathrm{j}$ en forma binómica. Así,

$$\vec{x} = A \cos \varphi + A \operatorname{sen} \varphi \, \mathrm{j} = -0{,}15 - 0{,}29\mathrm{j} = 0{,}3265_{-2{,}0481} \text{ m}$$

Por tanto: $\begin{cases} A = 0{,}3265 \text{ m}^{*} \\ \varphi = -2{,}0481 \text{ rad} \end{cases}$

En consecuencia, $x = 0{,}3265 \operatorname{sen}(3{,}3t - 2{,}0481)$ (SI)

Nótese que mediante este procedimiento se ha obtenido directamente el valor correcto de la fase inicial.

* Nótese que la amplitud (0,3265 m) no coincide con el valor absoluto de la elongación inicial (0,29 m). Esa coincidencia solo se da si se parte del reposo; si la velocidad inicial no es nula, la amplitud es mayor.

¿Por qué utilizando el fasor se obtiene directamente el valor correcto de φ?

Porque en las conversiones entre forma binómica y polar, las calculadoras no trabajan en el intervalo $(-\pi/2\,;\pi/2]$ rad (que es lo que hacen con la función arco tangente), sino en $(-\pi;\pi]$ rad.

Como ejemplo, considérese lo que ocurre, utilizando directamente la calculadora, con los dos sistemas de ecuaciones que siguen.

	Método	
	Arco tangente	Fasor
$\begin{cases} A\operatorname{sen}\varphi = -0{,}29 \\ A\cos\varphi = -0{,}15 \end{cases}$	$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{-0{,}29}{-0{,}15}$ $\varphi = 1{,}093\ \mathrm{rad}$	$\vec{x} = -0{,}15 - 0{,}29\mathrm{j}\ \mathrm{m}$ $\vec{x} = 0{,}3265_{-2{,}048}\ \mathrm{m}$
$\begin{cases} A\operatorname{sen}\varphi = 0{,}29 \\ A\cos\varphi = 0{,}15 \end{cases}$	$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{0{,}29}{0{,}15}$ $\varphi = 1{,}093\ \mathrm{rad}$	$\vec{x} = 0{,}15 + 0{,}29\mathrm{j}\ \mathrm{m}$ $\vec{x} = 0{,}3265_{1{,}093}\ \mathrm{m}$

Nótese que el problema está en que $\operatorname{tg}\varphi$ tiene el mismo valor si se invierten los signos de los valores de $A\operatorname{sen}\varphi$ y $A\cos\varphi$.

Sin embargo, ese cambio de signos implica un fasor opuesto, con el mismo módulo, pero con un argumento que difiere en π rad (esto es, media vuelta).

En lo que sigue, resolveremos siempre este tipo de sistemas de ecuaciones utilizando el método del fasor.

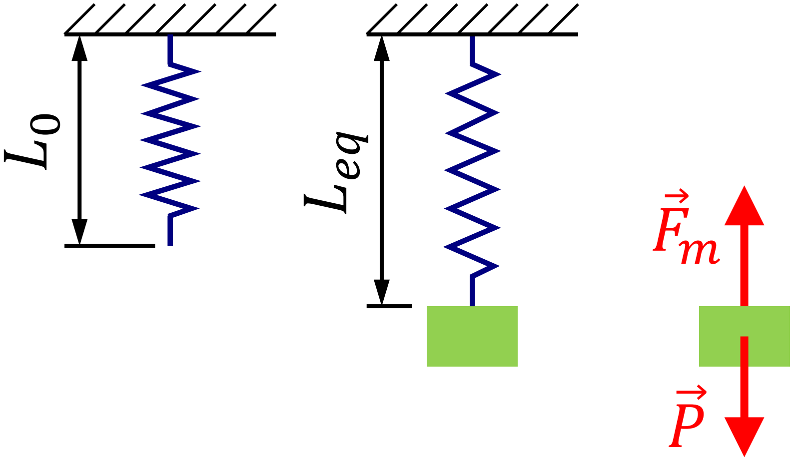
	Método	
	Arco tangente	Fasor
$\begin{cases} A\operatorname{sen}\varphi = -0{,}29 \\ A\cos\varphi = -0{,}15 \end{cases}$	$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{-0{,}29}{-0{,}15}$ $\varphi = 1{,}093\ \text{rad}$	$\vec{x} = -0{,}15 - 0{,}29\text{j}\ \text{m}$ $\vec{x} = 0{,}3265_{-2{,}048}\ \text{m}$
$\begin{cases} A\operatorname{sen}\varphi = 0{,}29 \\ A\cos\varphi = 0{,}15 \end{cases}$	$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{0{,}29}{0{,}15}$ $\varphi = 1{,}093\ \text{rad}$	$\vec{x} = 0{,}15 + 0{,}29\text{j}\ \text{m}$ $\vec{x} = 0{,}3265_{1{,}093}\ \text{m}$

II.- Sistemas con movimiento armónico simple

Muelle

Sea un muelle, de constante elástica k y masa despreciable, suspendido del techo. Sea L_0 su longitud en esa situación.

Se suspende del muelle un objeto de masa m. El nuevo sistema estará en equilibrio si la resultante de las fuerzas que actúan sobre el objeto (su peso $\vec{P}$ y la fuerza $\vec{F}_m$ ejercida por el muelle) es nula. La longitud L_{eq} del muelle en este estado de equilibrio debe satisfacer que



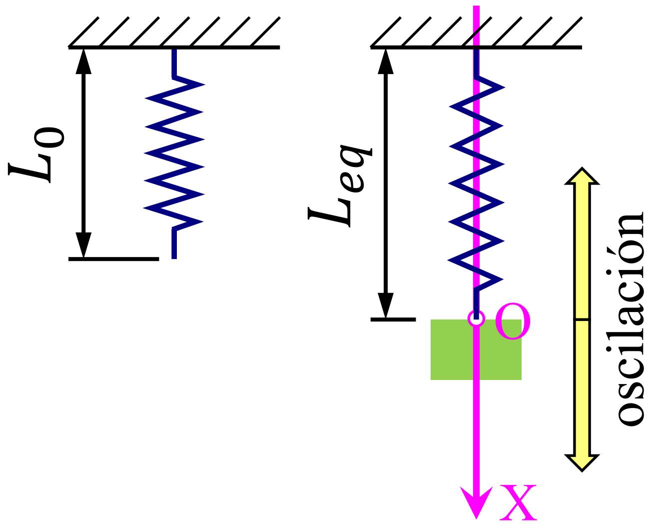
$$\vec{P} + \vec{F}_m = \vec{0} \Rightarrow P = F_m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg = k\left(L_{eq} - L_0\right)$$

Muelle

Si se hace que el sistema oscile, lo hará respecto a su posición de equilibrio (insistimos: la posición de equilibrio del sistema, no la del muelle sin objeto).

En lo que sigue, utilizaremos un sistema de referencia con el origen de coordenadas en la posición de equilibrio (por tanto, en ella es $x = 0$), y con el eje X en el sentido en que el muelle se alarga (hacia abajo en este caso).



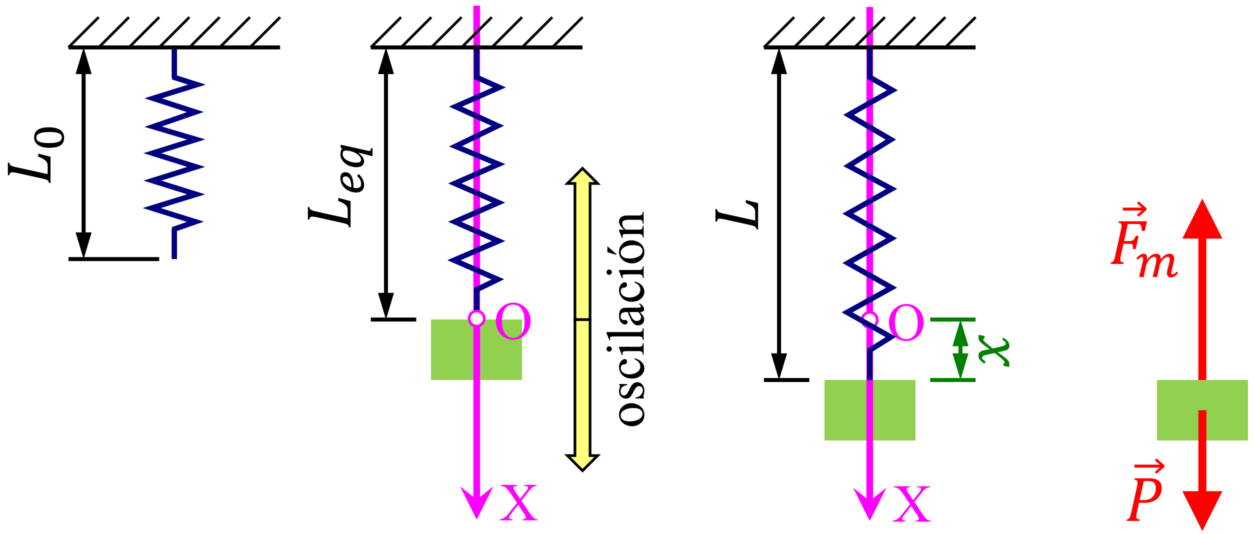
Muelle

Sea una posición x cualquiera, para la cual la longitud del muelle es $L = L_{eq} + x$ (cierto sea $x > 0$ o $x < 0$).
Aplicando al objeto el teorema del centro de masas,
y utilizando el sistema de referencia indicado, se tiene

$$\vec{P} + \vec{F}_m = m\vec{a} \Rightarrow mg + \left(-k(L - L_0)\right) = ma_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\, d^2x/dt^2 = mg - k\left(\left[L_{eq} + x\right] - L_0\right) =$$

$$= mg - k\left(L_{eq} - L_0\right) - kx$$



Muelle

Al analizar la situación de equilibrio, se obtuvo que

$$mg = k\left(L_{eq} - L_0\right)$$

Por ello, para una situación cualquiera resulta

$$m\, d^2x/dt^2 = \underbrace{mg - k\left(L_{eq} - L_0\right)}_{0} - kx = -kx$$

Por tanto, es

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Muelle

Puesto que k y m son constantes positivas del sistema, la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

es de la forma

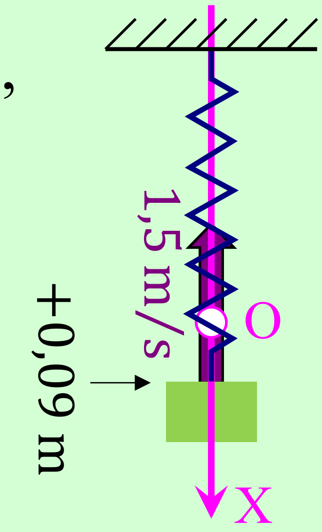
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

En consecuencia, el movimiento del sistema es armónico simple, y su pulsación es

$$\boxed{\omega = \sqrt{k/m}}$$

Ejercicio 2

Un objeto de 20 g de masa está suspendido de un muelle de constante elástica 2 N/m, cuyo otro extremo está unido al techo. Inicialmente el muelle está alargado 9 cm respecto a la posición de equilibrio del sistema, y el objeto se acerca a dicha posición a 150 cm/s. Obténgase la ecuación del movimiento armónico simple del objeto.



Sea el sistema de referencia que utilizamos habitualmente, con el origen de coordenadas en la posición de equilibrio (por tanto, en ella es $x = 0$), y con el eje X en el sentido en que el muelle se alarga (hacia abajo en este caso).

Inicialmente, el muelle está alargado 0,09 m. Por tanto, la posición inicial es $x_0 = +0{,}09$ m.

En ese instante, el móvil se acerca a la posición de equilibrio (O) a $1{,}5$ m/s. Por tanto, es $v_{x_0} = -1{,}5$ m/s.

Vamos a recapitular la información de que disponemos.

- Las características del sistema son: $k = 2\ \mathrm{N/m}$

  $m = 0{,}02\ \mathrm{kg}$
- Las condiciones iniciales son: $x_0 = +0{,}09\ \mathrm{m}$

  $v_{x_0} = -1{,}5\ \mathrm{m/s}$

De las características del sistema obtenemos que la pulsación es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{0{,}02}} = 10\ \mathrm{rad/s}$$

Conocida la pulsación, se tiene que las expresiones de posición y velocidad para cualquier instante t, y en particular para $t = 0$ s, son:

$$x = A\,\mathrm{sen}(10t + \varphi) \quad \Rightarrow x_0 = A\,\mathrm{sen}(10 \times 0 + \varphi) = A\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 10A\cos(10t + \varphi) \Rightarrow v_{x_0} = 10A\cos(10 \times 0 + \varphi) =$$

$$= 10A\cos\varphi$$

En consecuencia: $A \operatorname{sen} \varphi = 0{,}09$

$$10A \cos \varphi = -1{,}5 \ \Rightarrow A \cos \varphi = -0{,}15$$

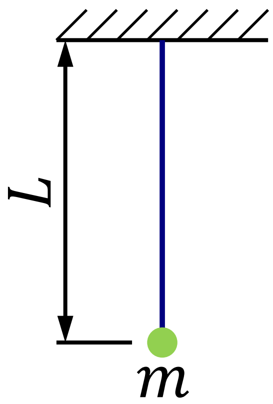
El fasor del movimiento armónico simple es

$$\vec{x} = A \cos \varphi + A \operatorname{sen} \varphi \, \mathrm{j} = -0{,}15 + 0{,}09\mathrm{j} = 0{,}1749_{2{,}6012} \ \mathrm{m}$$

Por tanto, $\begin{cases} A = 0{,}1749 \ \mathrm{m} \\ \varphi = 2{,}6012 \ \mathrm{rad} \end{cases}$

Por consiguiente, $x = 0{,}1749 \operatorname{sen}(10t + 2{,}6012) \ \ (\mathrm{SI})$

Péndulo simple

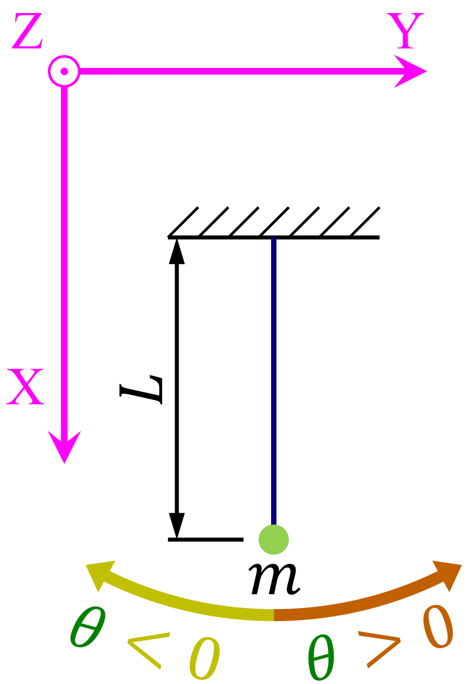


Un péndulo simple está constituido por un hilo ideal (por tanto inextensible y sin masa), suspendido de un extremo, y del que cuelga en el otro un punto material.

Se trata de una abstracción, ya que en la realidad no existen los hilos ideales ni los puntos materiales.

La idea básica es que toda la longitud L pertenece al hilo, y toda la masa m al punto material.

Péndulo simple



Si se hace que el péndulo oscile, lo hará respecto a su posición de equilibrio, que es la vertical.

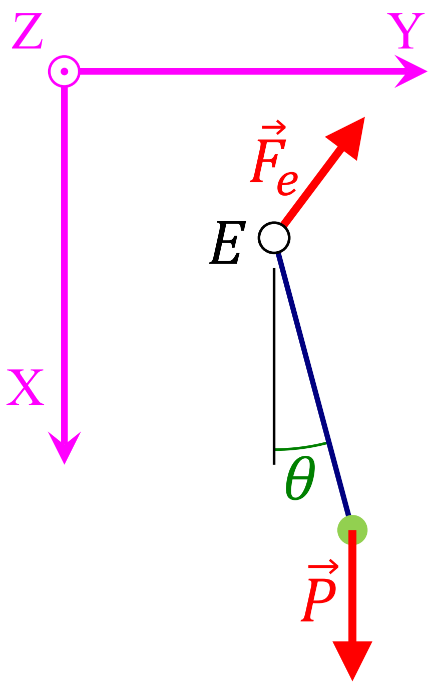
En lo que sigue, identificaremos la posición del péndulo por el ángulo θ que forma el hilo con la vertical. Obviamente, la posición de equilibrio es $\theta = 0$.

Sea el sistema de referencia dextrógiro de la figura.

La aceleración angular $\vec{\alpha}$ del péndulo tendrá la dirección del eje Z, siendo α_z positiva en el sentido antihorario.

Por tanto, el criterio de signos de θ es también que el ángulo positivo es el antihorario.

Péndulo simple



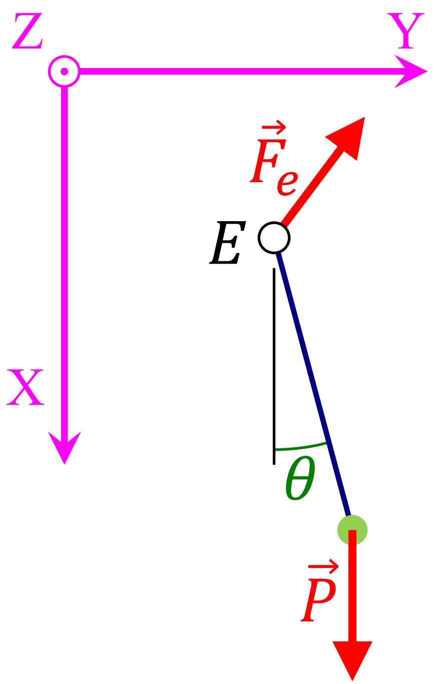
Sea una posición cualquiera, a la que corresponde un ángulo θ, para la que realizamos el diagrama de cuerpo libre del péndulo simple.

Las fuerzas que actúan sobre el péndulo son el peso $\vec{P}$ del punto material y la fuerza $\vec{F}_e$ ejercida por el eje de giro.

El momento de inercia del péndulo respecto al eje de giro es la suma del que tiene el hilo (0 ya que carece de masa) y el del punto material (mL^2 por ser L su distancia al eje).

Por tanto, $I = 0 + mL^2 = mL^2$

Péndulo simple



Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación, es

$$\overrightarrow{M}_{\vec{P}} + \overrightarrow{M}_{\vec{F}_e} = I\vec{\alpha}$$

Todos estos vectores tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación, resulta

$$\big(-P(L \operatorname{sen} \theta\,)\big) + 0 = I\alpha_z$$

- Fuerza de módulo P.
- Brazo $L \operatorname{sen} \theta$.
- Sentido hacia dentro del plano de la diapositiva.

Fuerza de brazo 0.

Así,

$$-mgL \operatorname{sen} \theta \;= mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta$$

Péndulo simple

Para ángulos pequeños es sen $\theta \cong \theta$. Por tanto,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \cong -\frac{g}{L}\theta$$

Puesto que g y L son constantes positivas del péndulo, la ecuación diferencial obtenida es de la forma

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$

En consecuencia, el movimiento del péndulo simple es aproximadamente armónico simple, y su pulsación es

$$\boxed{\omega = \sqrt{g/L}}$$

Ejercicio 3

¿Qué longitud debe tener un péndulo simple para que su período sea de 1 s en un lugar donde el módulo de la aceleración de la gravedad es $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$? Un reloj basado en dicho péndulo, llevado a una montaña donde g es menor, ¿adelantará o atrasará?

Es

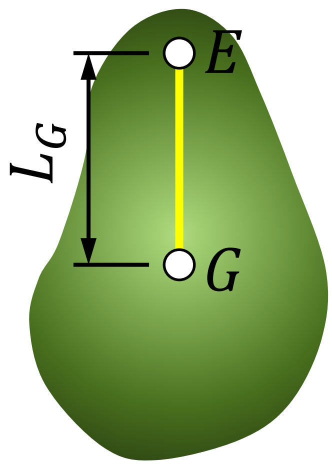
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/L}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow 1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9{,}8}} \Rightarrow L = 0{,}2482\ \mathrm{m}$$

Dado que $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, si g es menor T será mayor.

Dado que será $T > 1$ s, el reloj tardará más de 1 s en marcar 1 s. Por tanto, atrasará.

Para conseguir de nuevo que $T = 1$ s, el cociente L/g debe ser el mismo que en el primer caso. Puesto que ahora g es menor, L ha de reducirse en la misma proporción, haciendo el péndulo más corto.

Péndulo físico



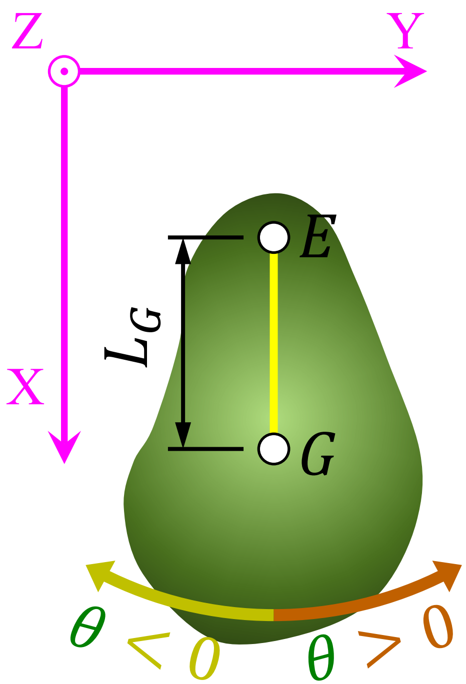
Un péndulo físico está constituido por un sólido rígido cualquiera que puede oscilar en un plano vertical alrededor de un eje E que no pase por su centro de gravedad G.

En la posición de equilibrio, el centro de gravedad estará situado bajo el eje de giro, de modo que el segmento EG será vertical.

Como se verá, los parámetros que definen el comportamiento del péndulo físico son:

- su masa m;
- su momento de inercia I respecto al eje de giro;
- la distancia L_G de su centro de gravedad a dicho eje.

Péndulo físico



Si se hace que el péndulo oscile, lo hará respecto a su posición de equilibrio, en la que el segmento EG es vertical.

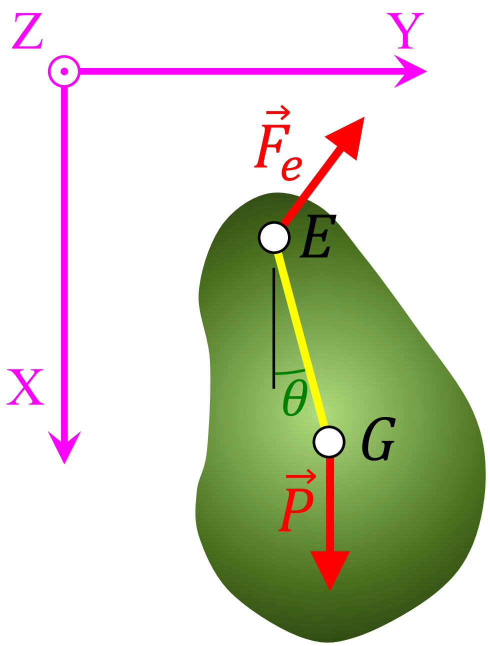
En lo que sigue, identificaremos la posición del péndulo por el ángulo θ que forma EG con la vertical. Obviamente, la posición de equilibrio es $\theta = 0$.

Sea el sistema de referencia dextrógiro de la figura.

La aceleración angular $\vec{\alpha}$ del péndulo tendrá la dirección del eje Z, siendo α_z positiva en el sentido antihorario.

Por tanto, el criterio de signos de θ es también que el ángulo positivo es el antihorario.

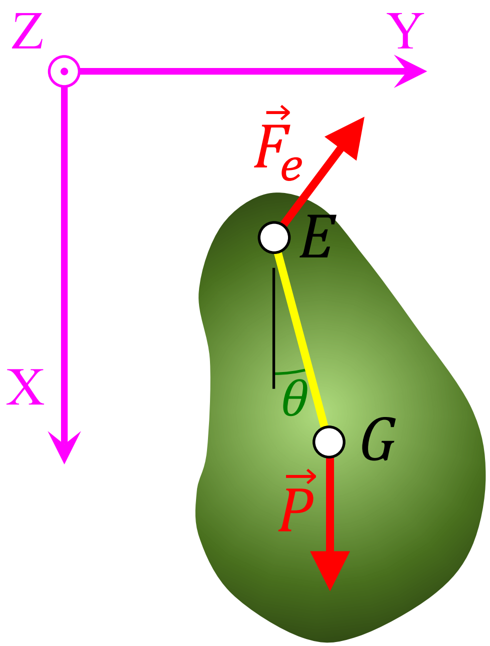
Péndulo físico



Sea una posición cualquiera, a la que corresponde un ángulo θ, para la que realizamos el diagrama de cuerpo libre del péndulo físico.

Las fuerzas que actúan sobre el péndulo son su peso $\vec{P}$ y la fuerza $\vec{F}_e$ ejercida por el eje de giro.

Péndulo físico



Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación, es

$$\overrightarrow{M}_{\vec{P}} + \overrightarrow{M}_{\vec{F}_e} = I\vec{\alpha}$$

Todos estos vectores tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación, resulta

$$\left(-P\left(L_G \operatorname{sen}\theta\right)\right) + 0 = I\alpha_z$$

- Fuerza de módulo P.
- Brazo L_G sen θ .
- Sentido hacia dentro del plano de la diapositiva.

Fuerza de brazo 0.

Así,

$$-mgL_G \operatorname{sen}\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgL_G}{I}\operatorname{sen}\theta$$

Péndulo físico

Para ángulos pequeños es sen $\theta \cong \theta$. Por tanto,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \cong -\frac{mgL_G}{I}\theta$$

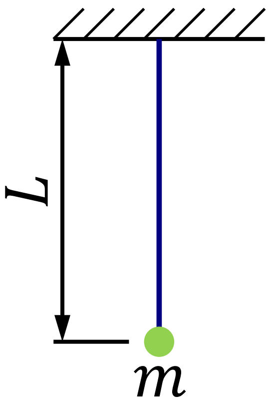
Puesto que m, g, L_G e I son constantes positivas del péndulo, la ecuación diferencial obtenida es de la forma

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$

En consecuencia, el movimiento del sistema es aproximadamente armónico simple, y su pulsación es

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgL_G}{I}}}$$

Péndulo físico



¿Qué ocurre si se aplica a un péndulo simple la expresión de un péndulo físico?

La masa m del péndulo es la del punto material.

Dado que toda la masa está en ese punto, allí se encuentra el centro de gravedad del péndulo. Por tanto, es $L_G = L$.

Como ya sabemos, el momento de inercia del péndulo simple respecto al eje de giro es $I = mL^2$.

Aplicando la expresión obtenida para un péndulo físico, resulta

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL_G}{I}} = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Péndulo físico

Se denomina longitud equivalente de un péndulo físico a la del péndulo simple que tiene el mismo período.

Sean ω_{pf} la pulsación del péndulo físico, y ω_{ps} la del péndulo simple de longitud equivalente L_{eq}.

Para que los dos péndulos tengan el mismo período, deben tener la misma pulsación. Por tanto,

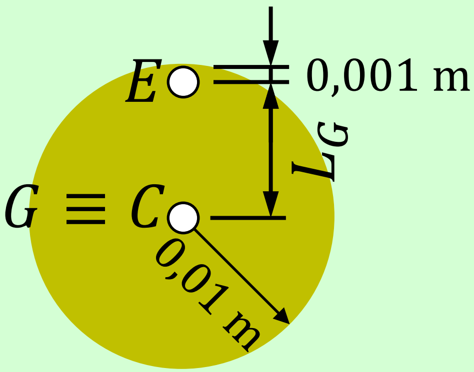
$$\omega_{pf} = \omega_{ps} \Rightarrow \sqrt{\frac{mgL_G}{I}} = \sqrt{\frac{g}{L_{eq}}} \Rightarrow \frac{mL_G}{I} = \frac{1}{L_{eq}}$$

En consecuencia,

$$\boxed{L_{eq} = \frac{I}{mL_G}}$$

Ejercicio 4

La tapa de la mirilla de una puerta tiene forma de disco de 1 cm de radio. El eje de giro está situado a 1 mm del contorno del disco. Si se hace oscilar la tapa, ¿cuál es el período de dicha oscilación? ¿Cuál es la longitud equivalente de la tapa?



Sea m_t la masa de la tapa.

La distancia de su centro de gravedad al eje de giro es $L_G = 0{,}01 - 0{,}001 = 0{,}009$ m.

Aplicando el teorema de Steiner, se obtiene que el momento de inercia de la tapa respecto al eje de giro es

$$I = \frac{1}{2} m_t R^2 + m_t L_G^2 = \frac{1}{2} m_t \times 0{,}01^2 + m_t \times 0{,}009^2 =$$

$$= 0{,}000131 m_t \text{ (SI)}$$

Por tanto,

$$\omega = \sqrt{\frac{m_t g L_G}{I}} = \sqrt{\frac{m_t \times 9{,}8 \times 0{,}009}{0{,}000131 m_t}} = 25{,}95\,\mathrm{rad/s}$$

El período de la oscilación es

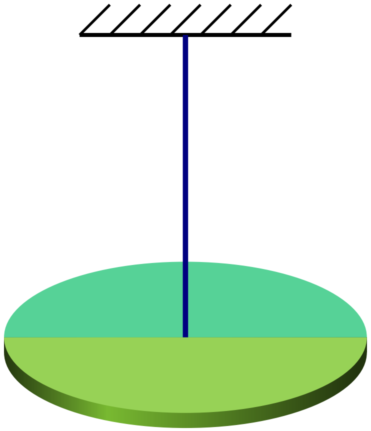
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{25{,}95} = 0{,}2421\ \mathrm{s}$$

La longitud equivalente de la tapa es

$$L_{eq} = \frac{I}{m_t L_G} = \frac{0{,}000131 m_t}{m_t \times 0{,}009} = 0{,}01456\ \mathrm{m} \quad (1{,}456\ \mathrm{cm})$$

Nótese que los resultados obtenidos son independientes de la masa de la tapa.

Péndulo de torsión



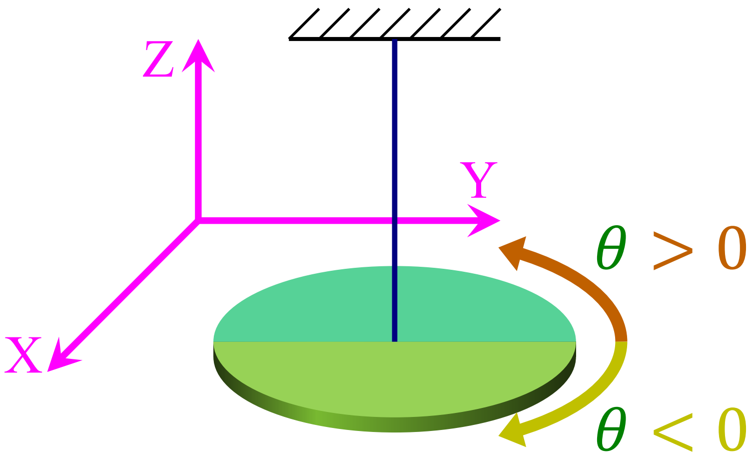
Un péndulo de torsión está constituido por un sólido rígido unido a un cable (también puede ser un hilo, una cuerda, etc.), que al retorcerse ejerce como eje de giro.

En la posición de equilibrio, la deformación por torsión del cable es nula. Si el sólido gira, el cable busca recuperar su forma inicial.

Como se verá, los parámetros que definen el comportamiento del péndulo de torsión son:

- su momento de inercia I respecto al eje de giro;
- el coeficiente de torsión D del cable.

Péndulo de torsión



Si se hace que el péndulo oscile, lo hará respecto a su posición de equilibrio.

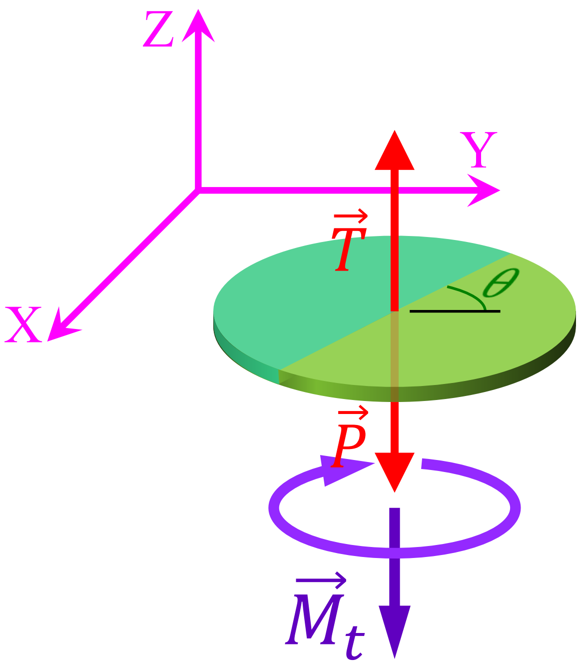
En lo que sigue, identificaremos la posición del péndulo por el ángulo θ que ha girado, y que el cable se ha retorcido. La posición de equilibrio es $\theta = 0$.

Sea el sistema de referencia dextrógiro de la figura.

La aceleración angular $\vec{\alpha}$ del sólido tendrá la dirección del eje Z, siendo α_z positiva en el sentido antihorario.

Por tanto, el criterio de signos de θ es también que el ángulo positivo es el antihorario.

Péndulo de torsión

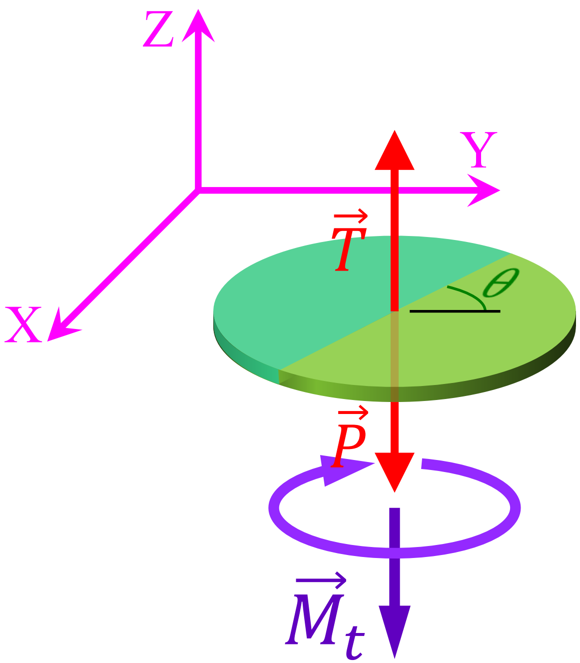


Sea una posición a la que corresponde un ángulo θ cualquiera, para la que realizamos el diagrama de cuerpo libre del sólido rígido.

Las fuerzas que actúan sobre el sólido son su peso $\vec{P}$ y la fuerza $\vec{T}$ ejercida por el cable.

El cable también aplica unas fuerzas tangenciales sobre el sólido, de resultante nula y momento $\vec{M}_t$ opuesto (por la tercera ley de Newton) al momento torsor que el sólido ejerce sobre el cable. Por tanto, su componente Z es $-D\theta$ (negativa si $\theta > 0$; positiva si $\theta < 0$).

Péndulo de torsión



Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación, es

$$\vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{F}_e} + \vec{M}_t = I\vec{\alpha}$$

Todos estos vectores tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación, resulta

$$0 + 0 + (-D\theta) = I\alpha_z$$

Fuerzas de brazo 0.

Así,

$$-D\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{D}{I}\theta$$

Péndulo de torsión

Puesto que I y D son constantes positivas del sistema, la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{D}{I}\theta$$

es de la forma

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$

En consecuencia, el movimiento del sistema es armónico simple, y su pulsación es

$$\boxed{\omega = \sqrt{D/I}}$$

Ejercicio 5

Se tiene una esfera maciza de 200 g de masa y 3 cm de radio. Para constituir un péndulo de torsión, se quiere suspender dicha esfera de un hilo de 10 cm de longitud, hecho de un material que tiene un módulo de rigidez de 72 GPa. ¿Qué grosor debe tener ese hilo para que el período del péndulo sea de 1 s?

El momento de inercia de la esfera maciza respecto al eje de giro es

$$I = \frac{2}{5}mR^2 = \frac{2}{5}0{,}2 \times 0{,}03^2 = 7{,}2 \times 10^{-5}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

El coeficiente de torsión que ha de tener el hilo se obtiene como sigue.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{D/I}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \Rightarrow 1 = 2\pi\sqrt{\frac{7{,}2 \times 10^{-5}}{D}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 2{,}842 \times 10^{-3}\ \mathrm{N \cdot m}$$

A partir de aquí se puede obtener el radio r del hilo.

$$D = \frac{G\pi r^4}{2L} \Rightarrow 2{,}842 \times 10^{-3} = \frac{72 \times 10^9 \pi r^4}{2 \times 0{,}1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = 2{,}239 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}$$

Por tanto, el grosor del hilo ha de ser

$$d = 2r = 2 \times 2{,}239 \times 10^{-4} = 4{,}478 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}\quad (0{,}4478\ \mathrm{mm})$$

III.- Composición de m.a.s.

Tipos de composición de m.a.s.

¿Qué ocurre cuando sobre un objeto actúa un conjunto de movimientos armónicos simples, combinando sus efectos?

El tipo de resultado depende de la orientación relativa de esos m.a.s., y de si sus pulsaciones son iguales o distintas.

Las orientaciones relativas más características son que los movimientos sean paralelos, o perpendiculares entre sí.

En este texto nos limitaremos al estudio de la composición de movimientos armónicos simples paralelos de la misma pulsación (y por tanto, de iguales frecuencia y período).

En todo caso, el laboratorio virtual que se menciona a continuación permite visualizar el comportamiento de todas las combinaciones mencionadas.

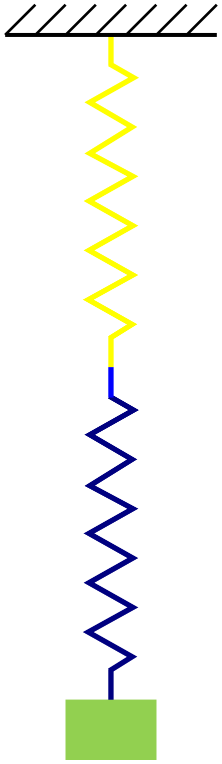
Tipos de composición de m.a.s.

Para comprender mejor estos conceptos, se recomienda utilizar el laboratorio virtual *"Visualizador de movimientos bidimensionales"*.

https://riunet.upv.es/handle/10251/5122

- En la biblioteca de movimientos hay que seleccionar en la lista desplegable, bien la opción composición de m.v.a.s. paralelos, bien composición de m.v.a.s. perpendiculares.
- En la biblioteca de movimientos hay que elegir, para los dos movimientos que se superponen, los valores de sus amplitudes (A y B), sus períodos (C y D), y sus fases iniciales (E y F).
- En la consola hay que pulsar sobre el botón inferior derecho para activar la repetición continua de la animación.
- En la consola hay que pulsar sobre el botón superior derecho para poner en marcha la animación.

M.a.s. paralelos de la misma pulsación



Sean dos muelles, uno suspendido del techo, y otro del extremo inferior del primero.

¿Qué ocurre si el primero oscila con m.a.s. de ecuación $x_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1)$, y el segundo lo hace con $x_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_2)$, teniendo ambos la misma pulsación ω?

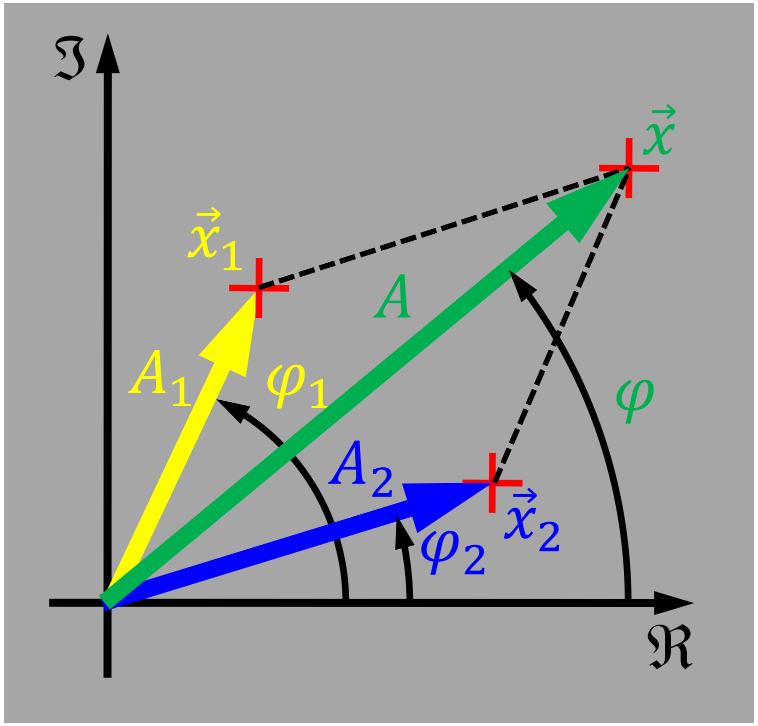
En tal caso, el movimiento del objeto que cuelga del segundo muelle vendrá dado por $x = x_1 + x_2$.

Como se mostrará a continuación, el movimiento del objeto es armónico simple de la misma pulsación, de modo que $x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$.

Pero… ¿cuáles son su amplitud y su fase inicial?

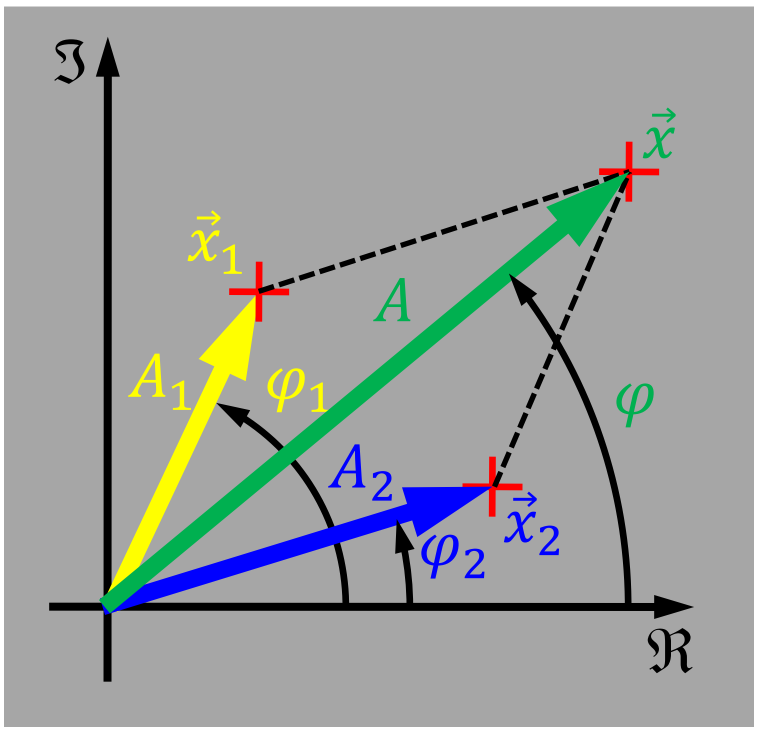
M.a.s. paralelos de la misma pulsación

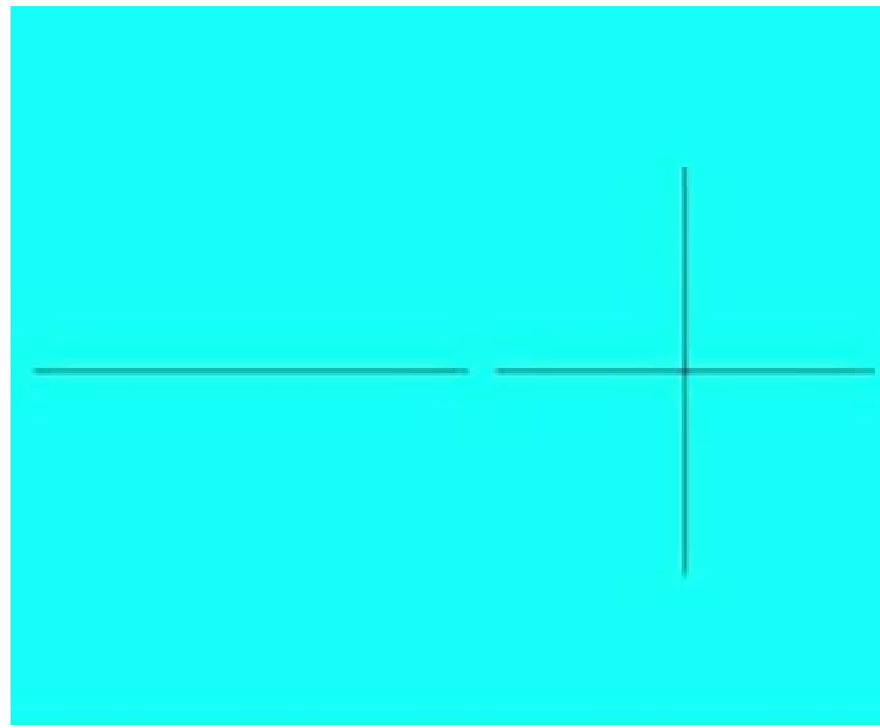
Sea el fasor $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, mostrado en la figura inferior izquierda.



M.a.s. paralelos de la misma pulsación

En la parte derecha puede verse que, al girar $\vec{x}$, su parte imaginaria coincide en todo momento con $x = x_1 + x_2$. Por tanto, $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ es el fasor del movimiento compuesto, que en efecto es armónico simple.





Laboratorio virtual: https://riunet.upv.es/handle/10251/105934

Ejercicio 6

Un objeto está sometido a la superposición de dos movimientos armónicos simples, de ecuaciones $x_1 = 0{,}24\,\mathrm{sen}(20t + 0{,}3)$ (SI) y $x_2 = 0{,}16\,\mathrm{sen}(20t - 1{,}8)$ (SI). ¿Cuál es la ecuación del movimiento de ese objeto? ¿Qué tercer movimiento armónico simple habría que añadir para que la ecuación del movimiento del objeto fuera $x = 0{,}12\,\mathrm{sen}(20t + 0{,}9)$ (SI)?

Los fasores de los dos m.a.s., ambos con la misma pulsación, son:

$$\vec{x}_1 = 0{,}24_{0,3}\ \mathrm{m} = 0{,}2293 + 0{,}07092\mathrm{j}\ \mathrm{m}$$
$$\vec{x}_2 = 0{,}16_{-1,8}\ \mathrm{m} = -0{,}03635 - 0{,}1558\mathrm{j}\ \mathrm{m}$$

El fasor de la superposición es

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = (0{,}2293 + 0{,}07092\mathrm{j}) + (-0{,}03635 - 0{,}1558\mathrm{j}) =$$
$$= 0{,}1930 - 0{,}08488\mathrm{j}\ \mathrm{m} = 0{,}2108_{-0,4143}\ \mathrm{m}$$

Por tanto, la ecuación de la superposición es

$$x = 0{,}2108\,\mathrm{sen}(20t - 0{,}4143)\ \ (\mathrm{SI})$$

Cuando actúan tres m.a.s. de igual pulsación, el fasor de su suma es

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$$

Sabemos que:

$$\vec{x}_1 = 0{,}24_{0{,}3}\ \mathrm{m} = 0{,}2293 + 0{,}07092\mathrm{j}\ \mathrm{m}$$

$$\vec{x}_2 = 0{,}16_{-1{,}8}\ \mathrm{m} = -0{,}03635 - 0{,}1558\mathrm{j}\ \mathrm{m}$$

Queremos que

$$\vec{x} = 0{,}12_{0{,}9}\ \mathrm{m} = 0{,}07459 + 0{,}09400\mathrm{j}\ \mathrm{m}$$

Para ello,

$$\vec{x}_3 = \vec{x} - \vec{x}_1 - \vec{x}_2 =$$

$$= (0{,}07459 + 0{,}09400\mathrm{j}) - (0{,}2293 + 0{,}07092\mathrm{j}) -$$

$$-(-0{,}03635 - 0{,}1558\mathrm{j}) =$$

$$= -0{,}1184 + 0{,}1789\mathrm{j}\ \mathrm{m} = 0{,}2145_{2{,}1554}\ \mathrm{m}$$

Por tanto, la ecuación del tercer m.a.s. ha de ser

$$x_3 = 0{,}2145\,\mathrm{sen}(20t + 2{,}1554)\ \ (\mathrm{SI})$$

IV.- Energía de un m.a.s.

Muelle

Sea un muelle, de constante elástica k y masa despreciable, con un extremo fijo y el otro unido a un objeto de masa m.

Como sabemos, un sistema de este tipo oscila con m.a.s. de pulsación $\omega = \sqrt{k/m}$, dependiendo la amplitud y la fase inicial de las condiciones iniciales.

Como también sabemos, en un m.a.s. es:

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$$

Por tanto,

$$v_x = \sqrt{{}^{k}/_{m}}\; A \cos(\omega t + \varphi)$$

Muelle

En consecuencia, la energía cinética del objeto varía con el tiempo conforme a la expresión

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{{}^{k}/_{m}}\,A\cos(\omega t+\varphi)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\frac{k}{m}A^2\cos^2(\omega t+\varphi) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

Sabemos también que la componente X de la resultante de las fuerzas que actúan sobre el objeto es $-kx$. Por tanto, dicha resultante es conservativa, y su energía potencial es $E_p = {}^{1}/_{2}\,kx^2$.*

* Puede comprobarse que $-\vec{\nabla}E_p = (-kx; 0; 0)$.

Muelle

En consecuencia, la energía potencial del sistema es

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi))^2 =$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi)$$

Así, la energía mecánica del sistema es

$$E = E_c + E_p =$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}kA^2[\cos^2(\omega t + \varphi) + \mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi)] = \frac{1}{2}kA^2$$

Muelle

Se comprueba así que la energía mecánica es constante, como era de esperar, ya que todas las fuerzas que trabajan son conservativas.

Por tanto, en el movimiento armónico simple existe una transferencia continua entre energía cinética y potencial.
En la posición de equilibrio la energía potencial es nula, y la cinética es máxima por serlo el módulo de la velocidad.
Al alejarse de la posición de equilibrio, en uno u otro sentido, la energía potencial crece a costa de la cinética. En los extremos, al detenerse el objeto, su energía cinética es nula y su potencial máxima.
Cuando a continuación el objeto se dirige hacia la posición de equilibrio, es la energía cinética la que crece a costa de la potencial.

Muelle

Nótese que en los extremos de la oscilación, donde es $x = \pm A$ y $v = 0$, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} E_c &= {}^1\!/_2\, m0^2 = 0 \\ E_p &= {}^1\!/_2\, k(\pm A)^2 = {}^1\!/_2\, kA^2 \end{aligned}\right\} \; E = {}^1\!/_2\, kA^2$$

En la posición de equilibrio, donde es $x = 0$, se tiene $v_x = \pm\omega A = \pm\sqrt{k/m}\,A$, resultando

$$\left.\begin{aligned} E_c &= {}^1\!/_2\, m\left(\sqrt{k/m}\,A\right)^2 = {}^1\!/_2\, kA^2 \\ E_p &= {}^1\!/_2\, k0^2 = 0 \end{aligned}\right\} \; E = {}^1\!/_2\, kA^2$$

Muelle

Conviene recalcar que $^1/_2\, kx^2$ no es la energía potencial elástica, ya que aquí x hace referencia al desplazamiento del sistema respecto a su posición de equilibrio, en la que en general el muelle, por la presencia del objeto, no tiene su longitud natural.

Como se indicó en el desarrollo, $E_P = {}^1/_2\, kx^2$ es la energía potencial de la resultante de las fuerzas actuantes. Por tanto incluye la energía potencial elástica, la gravitatoria, y más en general la de todas las fuerzas conservativas que intervienen en el movimiento armónico simple.

Energía mecánica de un m.a.s.

La conservación de la energía mecánica es una propiedad general de los movimientos armónicos simples. Además, de igual forma que en el caso del muelle es proporcional al cuadrado de la amplitud, en general lo es al cuadrado del valor máximo del parámetro que corresponda.

A continuación aparecen, sin demostración, las expresiones correspondientes a diversos casos típicos.

Péndulo simple: $E = mgL(1 - \cos\theta_{máx}) \cong {}^1\!/_2\, mgL\theta_{máx}^2$ *

Péndulo físico: $E = mgL_G(1 - \cos\theta_{máx}) \cong {}^1\!/_2\, mgL_G\theta_{máx}^2$ *

Péndulo de torsión: $E = {}^1\!/_2\, D\theta_{máx}^2$

* En los péndulos simple y físico, las expresiones exactas no son proporcionales al cuadrado de $\theta_{máx}$ por no tratarse de m.a.s. Las expresiones aproximadas para ángulos pequeños sí satisfacen esta proporcionalidad.

Ejercicio 7

Un muelle, de constante elástica 25 N/m y masa despreciable, está colgado de uno de sus extremos, y en el otro lleva sujeto un objeto de masa 400 g. Tras comenzar un movimiento armónico simple, se observa que el módulo de la velocidad máxima del objeto es de 0,8 m/s. Obténgase el valor absoluto de la elongación del muelle, y las energías cinética, potencial y mecánica del sistema, en los instantes en que el módulo de la velocidad del objeto es de 0,6 m/s. Obténgase también la amplitud de la oscilación.

El módulo de la velocidad es máxima cuando el sistema pasa por la posición de equilibrio, $x = 0$ m. En esa posición, las energías cinética, potencial y mecánica son:

$$E_c = {}^1\!/_2\, mv^2 = {}^1\!/_2 \times 0{,}4 \times 0{,}8^2 = 0{,}128 \text{ J}$$

$$E_p = {}^1\!/_2\, kx^2 = {}^1\!/_2 \times 25 \times 0^2 = 0 \text{ J}$$

$$E = E_c + E_p = 0{,}128 + 0 = 0{,}128 \text{ J}$$

En los instantes en que el módulo de la velocidad del objeto es $v = 0{,}6\ \mathrm{m/s}$, la energía mecánica es la misma que en cualquier otro momento, ya que es constante.

$$E = 0{,}128\ \mathrm{J}$$

En tales instantes, la energía cinética es

$$E_c = {}^1\!/_2\, mv^2 = {}^1\!/_2 \times 0{,}4 \times 0{,}6^2 = 0{,}072\ \mathrm{J}$$

En tales instantes, la energía potencial es

$$E_p = E - E_c = 0{,}128 - 0{,}072 = 0{,}056\ \mathrm{J}$$

El valor absoluto de la elongación del muelle en tales instantes se obtiene como sigue.

$$E_p = {}^1\!/_2\, kx^2 \Rightarrow 0{,}056 = {}^1\!/_2 \times 25 \times x^2 \Rightarrow x^2 = 0{,}00448 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm 0{,}06693\ \mathrm{m} \Rightarrow |x| = 0{,}06693\ \mathrm{m}$$

La amplitud se puede obtener a partir de la energía mecánica.

$$E = {}^1\!/_2\, kA^2 \Rightarrow 0{,}128 = {}^1\!/_2 \times 25 \times A^2 \Rightarrow A = 0{,}1012\ \mathrm{m}$$

V.- Amortiguamiento de un m.a.s.

Fricción por viscosidad

Cuando un cuerpo se desplaza por un fluido, este, debido a su viscosidad, ejerce sobre aquel una fuerza que ralentiza su movimiento. El módulo de esta fuerza es proporcional al módulo de la velocidad relativa entre cuerpo y fluido, elevada a una potencia, $F_v \propto v'^n$.

El modelo más sencillo de tratar matemáticamente es el que toma $n = 1$. Si además consideramos que el fluido está en reposo, el módulo de la fuerza que, debido a la viscosidad del fluido, actúa sobre el cuerpo, es $F_v = cv$.

El factor de proporcionalidad c recibe el nombre de coeficiente de amortiguamiento. Su valor depende tanto del fluido como de las características del cuerpo: tamaño, forma, material, etc.

Fricción por viscosidad

De acuerdo con la expresión $F_v = cv$, el producto dimensional del coeficiente de amortiguamiento es

$$\dim c = \dim F \cdot (\dim v)^{-1} = (\mathsf{T}^{-2}\mathsf{LM})(\mathsf{T}^{-1}\mathsf{L})^{-1} =$$
$$= (\mathsf{T}^{-2}\mathsf{LM})(\mathsf{TL}^{-1}) = \mathsf{T}^{-1}\mathsf{M}$$

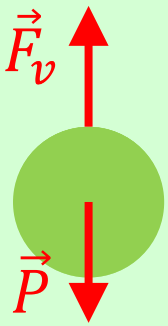
A partir de $\dim c = \dim F \cdot (\dim v)^{-1}$, se obtiene que la unidad SI coherente del coeficiente de amortiguamiento es el $\mathrm{N \cdot s/m}$. En base a $\dim c = \mathsf{T}^{-1}\mathsf{M}$ se deduce que, equivalentemente, puede expresarse como $\mathrm{kg/s}$.

Puesto que la fuerza de fricción por viscosidad se opone al movimiento del cuerpo, su expresión vectorial es

$$\boxed{\vec{F}_v = -c\vec{v}}$$

Ejercicio 8

Se deja caer un cuerpo de 5 kg de masa. Sabiendo que su coeficiente de amortiguamiento con el aire es 0,8 kg/s, ¿cuál es el módulo de la velocidad límite de caída del cuerpo?



Las fuerzas que actúan sobre el objeto son su peso $\vec{P}$, y la fuerza $\vec{F}_v$ debida a la viscosidad del aire.

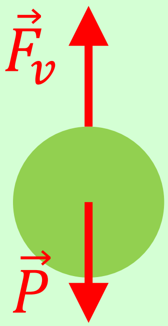
Inicialmente, cuando el cuerpo está en reposo, es $\vec{F}_v = \vec{0}$, y la aceleración del cuerpo es la de la gravedad.

Sin embargo, a medida que el cuerpo aumenta el módulo v de su velocidad, el de $\vec{F}_v$ crece, haciendo que el módulo de la aceleración disminuya. El valor de v sigue aumentando, pero a menor ritmo.

Cuando $\vec{P} + \vec{F}_v = \vec{0}$, esto es, cuando $F_v = P$, la aceleración es nula. Así, a partir de ese momento el cuerpo cae con movimiento rectilíneo uniforme, con la denominada velocidad límite, de módulo $v_{lím}$.

Nótese que si, por cualquier causa, el cuerpo sobrepasa $v_{lím}$, será $F_v > P$, con lo que se tendrá una aceleración hacia arriba y el cuerpo frenará hasta recuperar la velocidad límite.

Para calcular el módulo de la velocidad límite, se procede como sigue.



$$F_v = P \Rightarrow mg = c v_{lím} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{lím} = \frac{mg}{c} = \frac{5 \times 9{,}8}{0{,}8} = 61{,}25\ \mathrm{m/s}$$

Sistema con amortiguamiento

Considérese un sistema constituido por un muelle, de constante elástica k y masa despreciable, con un extremo fijo y el otro unido a un objeto de masa m.

Sea un sistema de referencia con el origen de coordenadas en la posición de equilibrio (por tanto, en ella es $x = 0$), y con el eje X en el sentido en que el muelle se alarga.

Si no existe amortiguamiento, sabemos que la resultante de las fuerzas exteriores tiene $-kx$ como componente X, y que al aplicar el teorema del centro de masas al objeto se obtiene que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Sistema con amortiguamiento

Si existe amortiguamiento debido a la viscosidad del fluido circundante, actúa además la fuerza $\vec{F}_v = -c\vec{v}$, de modo que $F_{v_x} = -cv_x$.

Añadiendo esta fuerza en la expresión del teorema del centro de masas, se tiene que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + \left(-c\frac{dx}{dt}\right)$$

Por tanto:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Sistema con amortiguamiento

Esta relación puede reescribirse como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

donde:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad \gamma = \frac{c}{2m}$$

- ω_0 recibe el nombre de pulsación libre del sistema. Nótese que se trata de la pulsación que tendría (pero no tiene) si no hubiera amortiguamiento, y por tanto se tratara de un m.a.s.
- γ recibe el nombre de constante de amortiguamiento del sistema (no confundir con el coeficiente de amortiguamiento, c).

Sistema con amortiguamiento

De acuerdo con la expresión $\gamma = {}^{c}/_{(2m)}$, el producto dimensional de la constante de amortiguamiento es

$$\dim \gamma = \dim c \cdot \mathsf{M}^{-1} = (\mathsf{T}^{-1}\mathsf{M})\mathsf{M}^{-1} = \mathsf{T}^{-1}$$

Por tanto, la unidad SI coherente de la constante de amortiguamiento es el s^{-1}.

Recuérdese que el producto dimensional de la pulsación también es T^{-1}.* Por tanto, es correcto comparar los valores de ω_0 y γ, y también realizar operaciones que aparecerán más adelante, tales como $\gamma^2 - \omega_0^2$.

* Aunque rad es 1, y pese a que ω_0 y γ tienen el mismo producto dimensional, debe utilizarse el $\mathrm{rad/s}$ para las pulsaciones y el s^{-1} para las constantes de amortiguamiento.

Tipos de amortiguamiento

La solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

depende de si las dos soluciones, λ_1 y λ_2, de la ecuación de segundo grado $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$ son reales diferentes, reales iguales, o complejas conjugadas.

Puesto que estas soluciones son

$$\lambda = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{(2\gamma)^2 - 4 \times 1 \times \omega_0^2}}{2 \times 1} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

esto depende de si el radicando, $\gamma^2 - \omega_0^2$, es positivo, nulo, o negativo, respectivamente.

Tipos de amortiguamiento

Vamos a analizar las tres posibilidades existentes.

- $\gamma < \omega_0$. En este caso es $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$, y λ_1 y λ_2 son números complejos conjugados. Se dice que el amortiguamiento es débil o subcrítico.
- $\gamma = \omega_0$. En este caso es $\gamma^2 - \omega_0^2 = 0$, y λ_1 y λ_2 son números reales iguales. Se dice que el amortiguamiento es crítico. Se trata del caso límite entre los otros dos.
- $\gamma > \omega_0$. En este caso es $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$, y λ_1 y λ_2 son números reales diferentes. Se dice que el amortiguamiento es fuerte o supercrítico.

Los nombres se deben a que, en el orden en que se han enumerado, corresponden a valores crecientes de $\gamma = {}^{c}/_{(2m)}$, y por tanto del coeficiente de amortiguamiento c.

Tipos de amortiguamiento

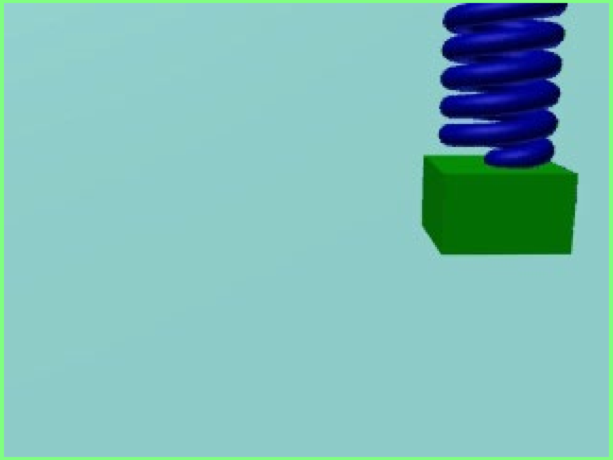
Las formas de las correspondientes soluciones son:

- $\gamma < \omega_0$: $$\boxed{x = D\mathrm{e}^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)\ ;\ \ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$
- $\gamma = \omega_0$: $$\boxed{x = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\gamma t}}$$
- $\gamma > \omega_0$: $$\boxed{\begin{aligned} x = A_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + A_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\ ;\ \ \lambda_1 &= -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \\ \lambda_2 &= -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{aligned}}$$

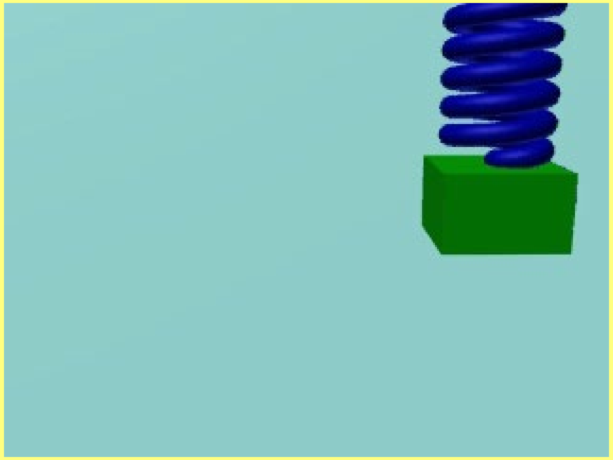
En estas expresiones, los parámetros característicos del sistema aparecen en color rojo. Por su parte, los que dependen del movimiento particular (p.ej., de las condiciones iniciales), dos en cada caso, aparecen en color azul.

Tipos de amortiguamiento

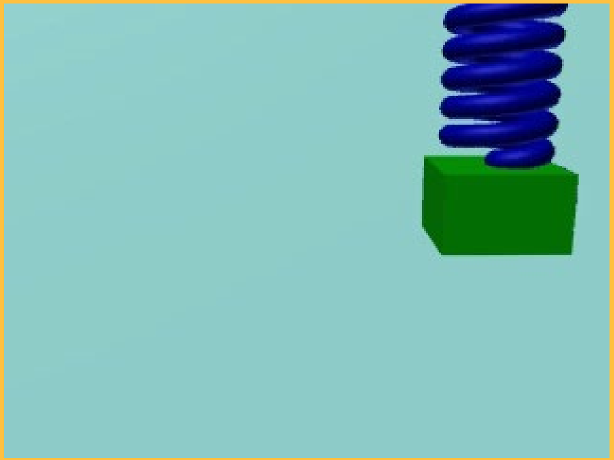
Movimiento armónico simple
$\gamma = 0$



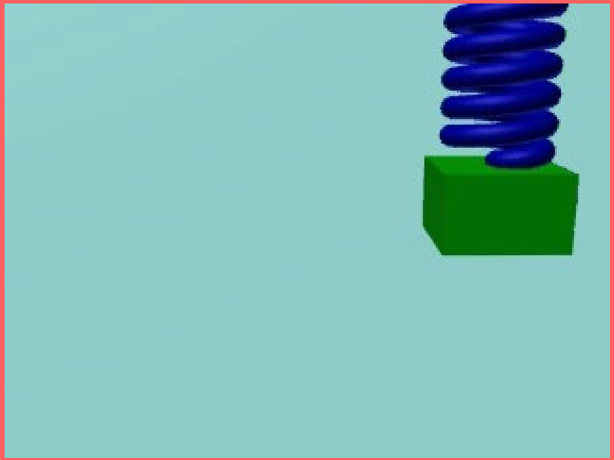
Amortiguamiento débil
$\gamma \in (0; \omega_0)$



Amortiguamiento crítico
$\gamma = \omega_0$



Amortiguamiento fuerte
$\gamma \in (\omega_0; \infty)$



Tipos de amortiguamiento

Para comprender mejor estos conceptos, se recomienda utilizar el laboratorio virtual *"Visualizador de oscilaciones"*.

https://riunet.upv.es/handle/10251/5125

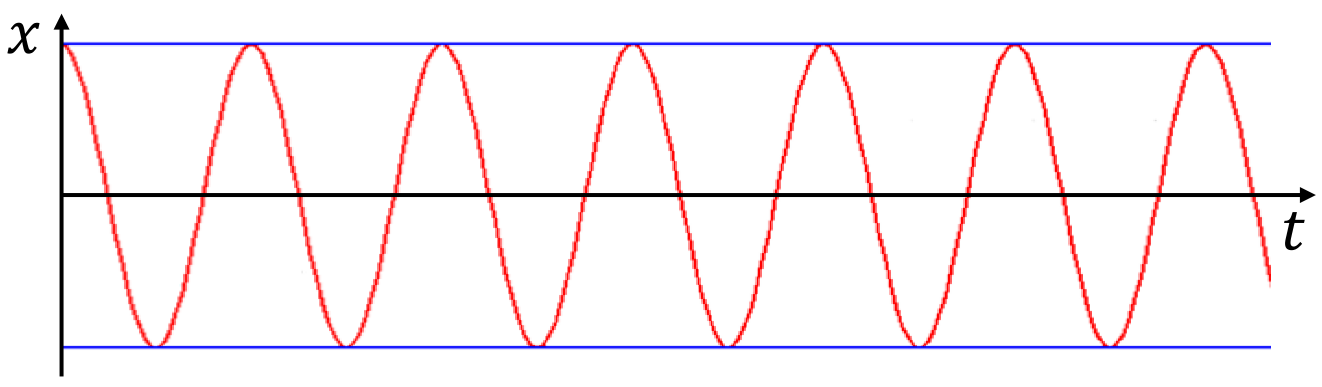
- Utilizando los valores por defecto de los parámetros ($m = 1$ kg; $k = 16\ \mathrm{N/m}$), se puede arrastrar la deslizadera coef. amortiguamiento para observar cómo varía la representación gráfica del resultado.
- Con los valores indicados, el amortiguamiento crítico corresponde a $c = 8\ \mathrm{kg/s}$).
- En la parte inferior de la interfaz aparece la ecuación del movimiento.

Amortiguamiento débil

El comportamiento de un amortiguamiento débil se entiende mejor comparándolo con un m.a.s.

La expresión de un m.a.s. es $x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$. Por tanto, se trata de una función seno multiplicada por una constante A, la amplitud.

Como resultado, x oscila entre las líneas azules de la representación gráfica adjunta, que corresponden a las ordenadas A y $-A$.

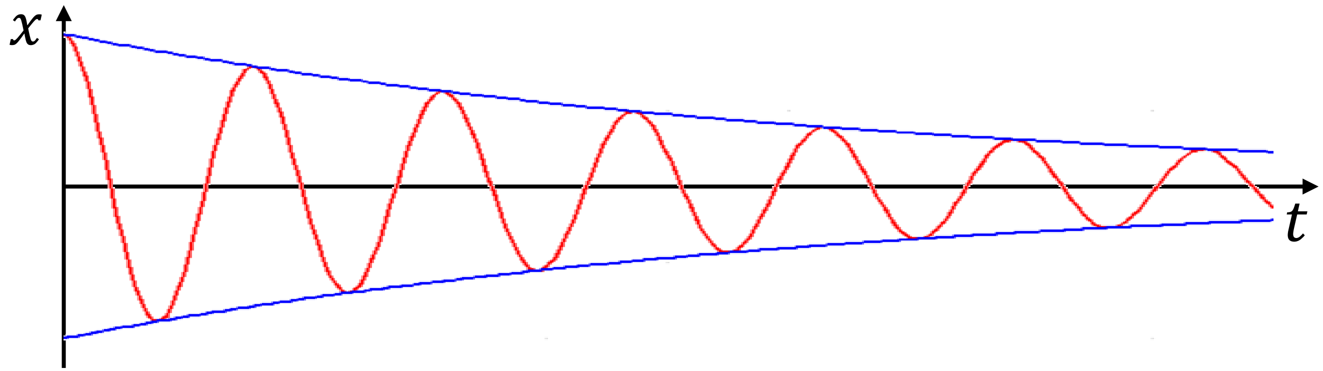


Amortiguamiento débil

En un amortiguamiento débil es $x = D\mathrm{e}^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$. Por tanto, se trata de una función seno multiplicada por la exponencial decreciente $D\mathrm{e}^{-\gamma t}$.

Como resultado, x oscila entre las líneas azules de la representación gráfica adjunta, que corresponden a las funciones $D\mathrm{e}^{-\gamma t}$ y $-D\mathrm{e}^{-\gamma t}$.

Así, se puede considerar que se tiene una amplitud variable $A = D\mathrm{e}^{-\gamma t}$. Por tanto, el sistema tiende asintóticamente al reposo.



Amortiguamiento débil

Por otra parte, la pulsación en un amortiguamiento débil es

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

En consecuencia, es menor que la pulsación libre ω_0.

En sentido estricto, en un amortiguamiento débil no hay período, ya que no se trata de un movimiento periódico.

Sin embargo, es habitual considerar como período de una oscilación de este tipo, el del seno de su expresión. Por tanto,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

Amortiguamiento débil

La expresión de un amortiguamiento débil converge a la de un m.a.s. cuando γ tiende a 0, pues en tal caso

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 0^2} = \omega_0$$

y así

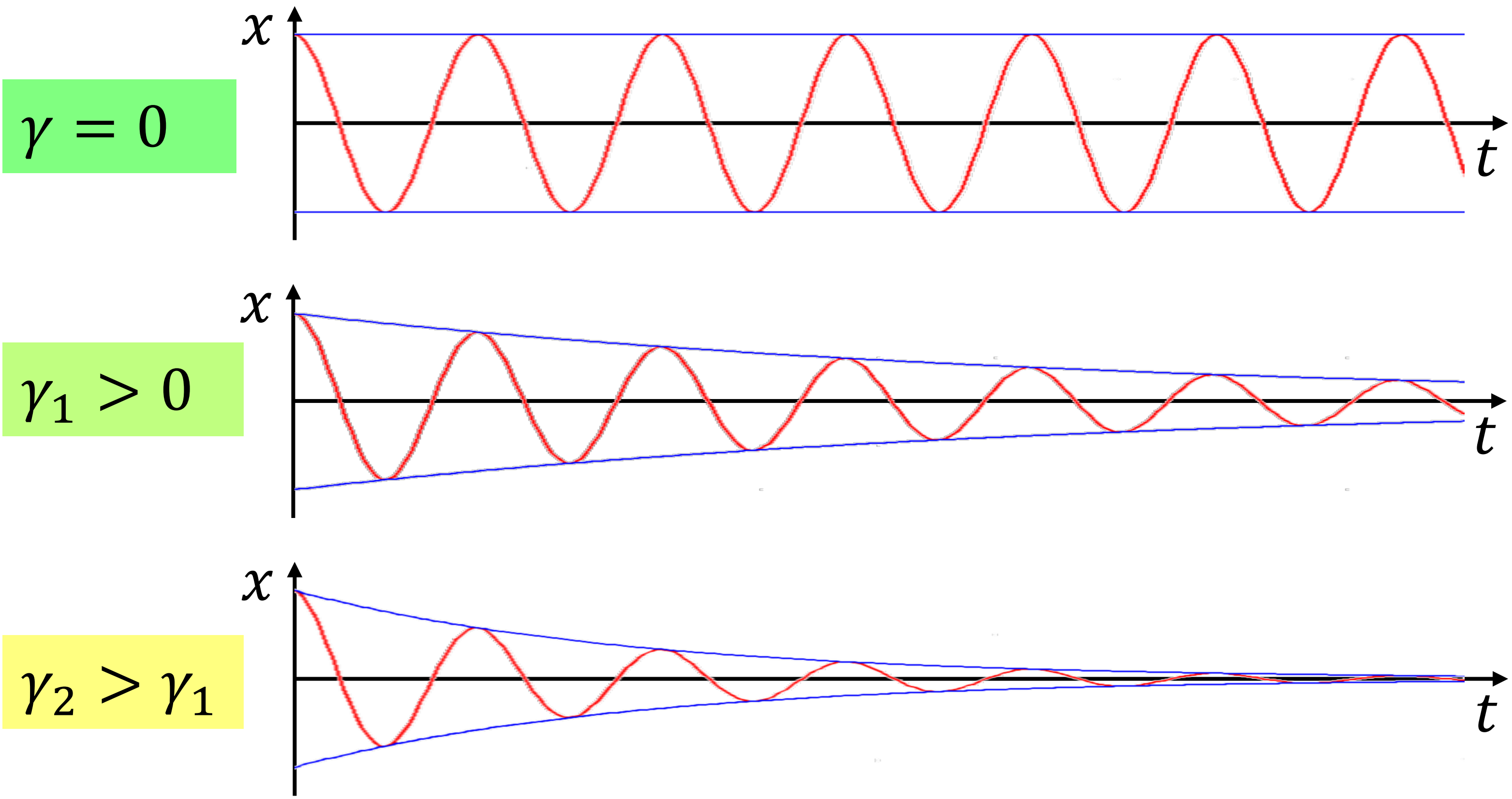
$$x = D\mathrm{e}^{-0t}\operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi) = D\operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$

A medida que la constante de amortiguamiento γ es mayor:

- la amplitud, $A = D\mathrm{e}^{-\gamma t}$, decrece más rápidamente;
- la pulsación, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, es menor, y por tanto la frecuencia es también menor, y el período mayor.

<u>Amortiguamiento débil</u>

Las representaciones gráficas muestran estos efectos. Con mayor amortiguamiento, las oscilaciones son más lentas, y además se amortiguan más rápidamente.



Amortiguamiento crítico

En un amortiguamiento crítico es $x = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\gamma t}$.

Por efecto de la exponencial decreciente $\mathrm{e}^{-\gamma t}$, x tiende a cero.* Por tanto, el sistema tiende asintóticamente al reposo.

Se puede demostrar que, si el sistema parte del reposo, a partir de ahí se aproxima a la posición de equilibrio sin llegar nunca a sobrepasarla. Por tanto, no hay oscilaciones.

* Puede comprobarse aplicando la regla de l'Hôpital a la función $x = \frac{(A+Bt)}{\mathrm{e}^{\gamma t}}$.

Amortiguamiento crítico

Si inicialmente el sistema se dirige hacia la posición de equilibrio con velocidad suficiente, puede sobrepasarla.

Sin embargo, una vez se detenga (punto C en la figura), es de aplicación lo anteriormente comentado: no sobrepasará la posición de equilibrio una segunda vez.

Amortiguamiento fuerte

En un amortiguamiento fuerte es $x = A_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + A_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$.

Nótese que $\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ es siempre un número negativo.

Por su parte, $\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ es también siempre un número negativo, ya que $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < \sqrt{\gamma^2} = \gamma$.

Así pues, la expresión de x es la suma de dos exponenciales decrecientes. Por tanto, el sistema tiende asintóticamente al reposo.

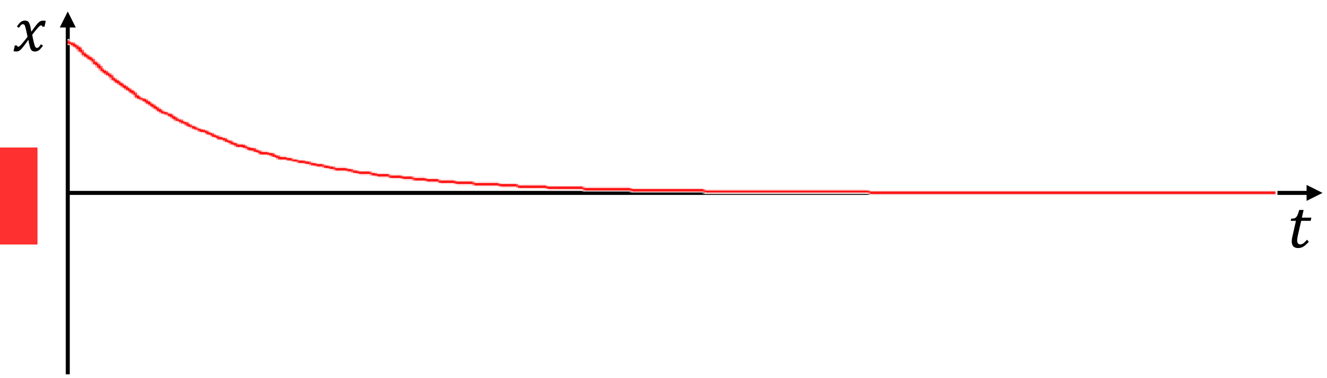
Amortiguamiento fuerte

Puesto que es $0 > \lambda_1 > \lambda_2$, la exponencial $A_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ tiende a cero más lentamente.

Además, cuando γ aumenta, $\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ tiende a cero, por lo que el movimiento se amortigua más lentamente.

$\gamma_1 > \omega_0$

$\gamma_2 > \gamma_1$



Amortiguamiento fuerte

Se puede demostrar que, como en el amortiguamiento crítico, si el sistema parte del reposo, a partir de ahí se aproxima a la posición de equilibrio sin llegar nunca a sobrepasarla. Por tanto, no hay oscilaciones.

Si inicialmente el sistema se dirige hacia la posición de equilibrio con velocidad suficiente, puede sobrepasarla.

Sin embargo, una vez se detenga, es de aplicación lo anteriormente comentado: no sobrepasará la posición de equilibrio una segunda vez.

Ejercicio 9

Un objeto de 20 g de masa está suspendido de un muelle de constante elástica 2 N/m, cuyo otro extremo está unido al techo. Inicialmente el muelle está alargado 9 cm respecto a la posición de equilibrio del sistema, y el objeto se acerca a dicha posición a 150 cm/s. Obténgase la ecuación del movimiento del objeto, sabiendo que el coeficiente de amortiguamiento es: a) 0,24 kg/s; b) 0,5 kg/s . c) ¿Cuál tendría que ser el coeficiente para que el amortiguamiento fuera crítico, y cuál sería entonces la ecuación del movimiento?

Salvo por la existencia de amortiguamiento, el enunciado es el mismo del ejercicio 2. Por tanto,

- las características del sistema son: $k = 2\ \mathrm{N/m}$
  $m = 0{,}02\ \mathrm{kg}$
  c según apartado
- las condiciones iniciales son: $x_0 = +0{,}09\ \mathrm{m}$
  $v_{x_0} = -1{,}5\ \mathrm{m/s}$

a) $c = 0{,}24\,\mathrm{kg/s}$

La pulsación libre y la constante de amortiguamiento son:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{0{,}02}} = 10\,\mathrm{rad/s}$$

$$\gamma = \frac{c}{2m} = \frac{0{,}24}{2 \times 0{,}02} = 6\ \mathrm{s}^{-1}$$

Puesto que es $\gamma < \omega_0$, se trata de un amortiguamiento débil, cuya pulsación es

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\,\mathrm{rad/s}$$

Conocidas γ y ω, se tiene que las expresiones de posición y velocidad para cualquier instante t, y en particular para $t = 0$ s, son:

$$x = D\mathrm{e}^{-6t}\,\mathrm{sen}(8t+\varphi) \Rightarrow x_0 = D\mathrm{e}^{-6\times 0}\,\mathrm{sen}(8\times 0+\varphi) = D\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = D\mathrm{e}^{-6t}(-6)\,\mathrm{sen}(8t+\varphi) + D\mathrm{e}^{-6t}8\cos(8t+\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{x_0} = D\mathrm{e}^{-6\times 0}(-6)\,\mathrm{sen}(8\times 0+\varphi) + D\mathrm{e}^{-6\times 0}8\cos(8\times 0+\varphi) =$$

$$= -6D\,\mathrm{sen}\,\varphi + 8D\cos\varphi$$

En consecuencia, $D\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0{,}09$

$$-6D\,\mathrm{sen}\,\varphi + 8D\cos\varphi = -1{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6\times 0{,}09 + 8D\cos\varphi = -1{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8D\cos\varphi = -0{,}96 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D\cos\varphi = -0{,}12$$

Así pues: $D \operatorname{sen}\varphi = 0{,}09$

$$D\cos\varphi = -0{,}12$$

Sea el número complejo $\vec{x} = D_{\varphi}$. Es

$$\vec{x} = D\cos\varphi + D\operatorname{sen}\varphi\,\mathrm{j} = -0{,}12 + 0{,}09\mathrm{j} = 0{,}15_{2{,}4981}\ \mathrm{m}$$

Por tanto, $\begin{cases} D = 0{,}15\ \mathrm{m} \\ \varphi = 2{,}4981\ \mathrm{rad} \end{cases}$

Por consiguiente, $x = 0{,}15\mathrm{e}^{-6t}\operatorname{sen}(8t + 2{,}4981)\ \ (\mathrm{SI})$

b) $c = 0{,}5\ \mathrm{kg/s}$

La pulsación libre y la constante de amortiguamiento son:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{0{,}02}} = 10\ \mathrm{rad/s}$$

$$\gamma = \frac{c}{2m} = \frac{0{,}5}{2 \times 0{,}02} = 12{,}5\ \mathrm{s}^{-1}$$

Puesto que es $\gamma > \omega_0$, se trata de un amortiguamiento fuerte, en el que:

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -12{,}5 + \sqrt{12{,}5^2 - 10^2} = -5\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -12{,}5 - \sqrt{12{,}5^2 - 10^2} = -20\ \mathrm{s}^{-1}$$

Conocidos λ_1 y λ_2, se tiene que las expresiones de posición y velocidad para cualquier instante t, y en particular para $t = 0$ s, son:

$$x = A_1 \mathrm{e}^{-5t} + A_2 \mathrm{e}^{-20t} \Rightarrow x_0 = A_1 \mathrm{e}^{-5\times 0} + A_2 \mathrm{e}^{-20\times 0} = A_1 + A_2$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A_1 \mathrm{e}^{-5t}(-5) + A_2 \mathrm{e}^{-20t}(-20) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{x_0} = A_1 \mathrm{e}^{-5\times 0}(-5) + A_2 \mathrm{e}^{-20\times 0}(-20) = -5A_1 - 20A_2$$

En consecuencia: $A_1 + A_2 = 0{,}09$

$$-5A_1 - 20A_2 = -1{,}5$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, resulta: $A_1 = 0{,}02$ m

$$A_2 = 0{,}07 \text{ m}$$

Por consiguiente, $x = 0{,}02\mathrm{e}^{-5t} + 0{,}07\mathrm{e}^{-20t}$ (SI)

c) Amortiguamiento crítico

Tiene lugar si $\gamma = \omega_0$. Por tanto,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{0{,}02}} = 10\,\mathrm{rad/s}$$

$$\gamma = \omega_0 = 10\ \mathrm{s}^{-1}$$

Para ello, el coeficiente de amortiguamiento debe tener el valor que se obtiene a continuación.

$$\gamma = \frac{c}{2m} \Rightarrow 10 = \frac{c}{2 \times 0{,}02} \Rightarrow c = 0{,}4\,\mathrm{kg/s}$$

Nótese que en el primer apartado, donde se tenía un valor inferior, ($c = 0{,}24\,\mathrm{kg/s}$), el amortiguamiento era débil como debía suceder.

Por el contrario, en el segundo apartado, donde se tenía un valor superior ($c = 0{,}5\,\mathrm{kg/s}$), el amortiguamiento era fuerte.

Conocida γ, se tiene que las expresiones de posición y velocidad para cualquier instante t, y en particular para $t = 0$ s, son:

$$x = (A + Bt)\mathrm{e}^{-10t} \Rightarrow x_0 = (A + B \times 0)\mathrm{e}^{-10\times 0} = A$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = B\mathrm{e}^{-10t} + (A + Bt)\mathrm{e}^{-10t}(-10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{x_0} = B\mathrm{e}^{-10\times 0} + (A + B \times 0)\mathrm{e}^{-10\times 0}(-10) = B - 10A$$

En consecuencia: $A = 0{,}09$

$\mathrm{B} - 10A = -1{,}5$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, resulta: $A = 0{,}09\ \mathrm{m}$

$B = -0{,}6\ \mathrm{m/s}$

Por consiguiente, $x = (0{,}09 - 0{,}6t)\mathrm{e}^{-10t}$ (SI)

Ejercicio 10

Un objeto de 300 g de masa está unido a un muelle de constante $4{,}8\ \mathrm{N/m}$, cuyo otro extremo es fijo. El coeficiente de amortiguamiento del sistema es $0{,}072\ \mathrm{kg/s}$.

a) ¿Cuál es el período de la oscilación amortiguada resultante?

b) ¿Cuál es el cociente entre la amplitud en un máximo de la oscilación y la del siguiente?

c) ¿En qué porcentaje se reduce la amplitud en un período?

d) ¿Cuántas oscilaciones realiza el sistema en el tiempo en que la amplitud pasa a ser un 5 % de la inicial?

e) ¿Cuál hubiera tenido que ser el coeficiente de amortiguamiento para que, tras 10 oscilaciones, la amplitud ya fuera un 5 % de la inicial?

f) ¿Cuál sería el período en este caso?

a) ¿Cuál es el período de la oscilación amortiguada resultante?

La pulsación libre y la constante de amortiguamiento son:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4{,}8}{0{,}3}} = 4\,\mathrm{rad/s}$$

$$\gamma = \frac{c}{2m} = \frac{0{,}072}{2 \times 0{,}3} = 0{,}12\ \mathrm{s}^{-1}$$

Puesto que es $\gamma < \omega_0$, se trata de un amortiguamiento débil, cuya pulsación es

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{4^2 - 0{,}12^2} = 3{,}9982\,\mathrm{rad/s}$$

Por tanto, el período es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3{,}9982} = 1{,}5715\ \mathrm{s}$$

No debe confundirse con $2\pi/\omega_0 = 1{,}5708$ s, que sería el período si no hubiera amortiguamiento.

b) ¿Cuál es el cociente entre la amplitud en un máximo de la oscilación y la del siguiente?

Conocidas γ y ω, se tiene que la ecuación del movimiento es

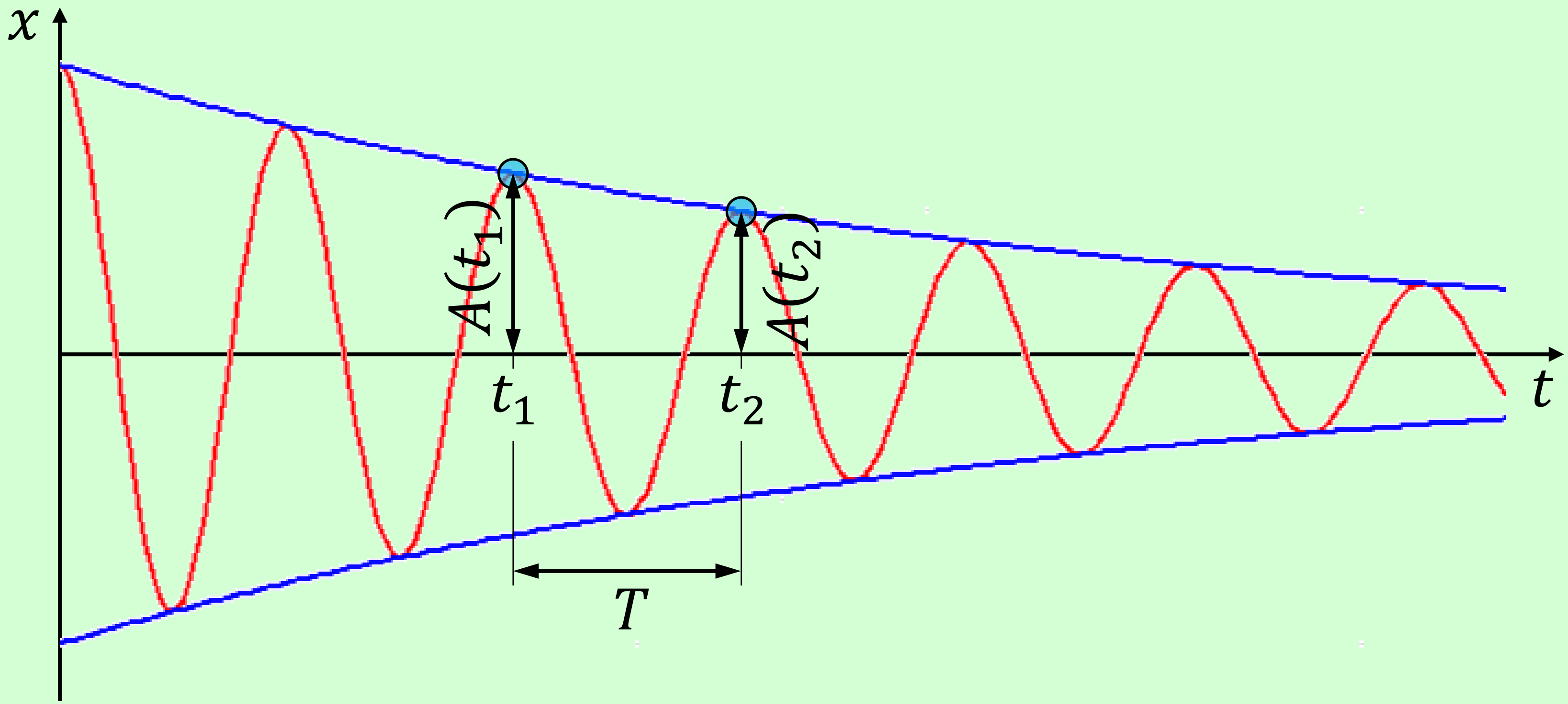
$$x = D\mathrm{e}^{-0,12t}\,\mathrm{sen}(3{,}9982t + \varphi)$$

Con la información proporcionada, no es posible determinar los valores de D y φ.

Sin embargo, como se irá viendo, estos valores no son necesarios para resolver el presente ejercicio. Por tanto, las respuestas que se obtendrán son consecuencia de las características del sistema, pero no de las condiciones iniciales.

A partir de la ecuación del movimiento, sabemos que la amplitud de la oscilación, decreciente con el tiempo, es

$$A = D\mathrm{e}^{-0,12t}$$



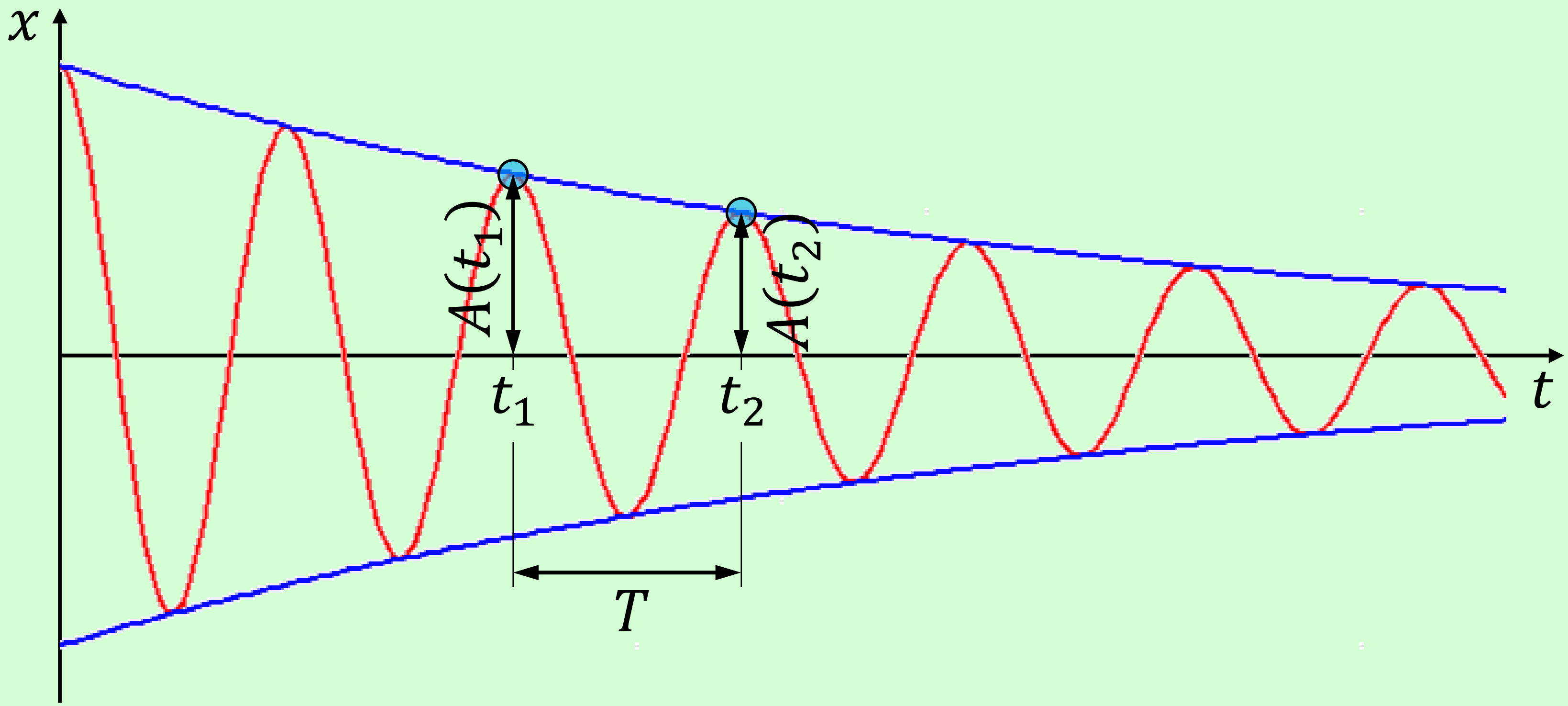
Se pide el cociente entre la amplitud en un máximo cualquiera (instante t_1), y la del siguiente (instante $t_2 = t_1 + T$).

$$\frac{A(t_1)}{A(t_2)} = \frac{D\mathrm{e}^{-0{,}12t_1}}{D\mathrm{e}^{-0{,}12t_2}} = \mathrm{e}^{-0{,}12t_1}\mathrm{e}^{0{,}12t_2} = \mathrm{e}^{0{,}12(t_2-t_1)} = \mathrm{e}^{0{,}12T} =$$

$$= \mathrm{e}^{0{,}12\times 1{,}5715} = 1{,}2075$$

Nótese que el resultado no depende de los valores de D y φ. Más aún, tampoco depende de los máximos concretos: el cociente de las amplitudes del primero y el segundo, es el mismo que las del duodécimo y el decimotercero.

c) ¿En qué porcentaje se reduce la amplitud en un período?



El factor de reducción de amplitud en un período es

$$\frac{A(t_1) - A(t_2)}{A(t_1)} = 1 - \frac{A(t_2)}{A(t_1)} = 1 - \frac{1}{A(t_1)/A(t_2)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{1{,}2075} = 0{,}1718 = 17{,}18\ \%$$

También puede resolverse, sin recurrir al resultado del apartado anterior, como sigue.

$$\frac{A(t_1)-A(t_2)}{A(t_1)}=\frac{D\mathrm{e}^{-0{,}12t_1}-D\mathrm{e}^{-0{,}12t_2}}{D\mathrm{e}^{-0{,}12t_1}}=1-\frac{D\mathrm{e}^{-0{,}12t_2}}{D\mathrm{e}^{-0{,}12t_1}}=$$

$$=1-\mathrm{e}^{-0{,}12t_2}\mathrm{e}^{0{,}12t_1}=1-\mathrm{e}^{0{,}12(t_1-t_2)}=$$

$$=1-\mathrm{e}^{0{,}12(-T)}=1-\mathrm{e}^{0{,}12\times(-1{,}5715)}=0{,}1718=$$

$$=17{,}18\ \%$$

d) ¿Cuántas oscilaciones realiza el sistema en el tiempo en que la amplitud pasa a ser un 5 % de la inicial?

Sea t_3 el instante en que la amplitud es un 5 % de la inicial, esto es,

$$A(t_3) = 0{,}05A(0)$$

De esta condición se deduce que

$$D\mathrm{e}^{-0{,}12t_3} = 0{,}05D\mathrm{e}^{-0{,}12\times 0} \Rightarrow \mathrm{e}^{-0{,}12t_3} = 0{,}05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0{,}12t_3 = \ln 0{,}05 = -2{,}996 \Rightarrow t_3 = 24{,}97 \text{ s}$$

En ese tiempo, el número de oscilaciones que realiza el sistema, cada una de un período de duración, es

$$N = \frac{t_3}{T} = \frac{24{,}97}{1{,}5715} = 15{,}89$$

e) ¿Cuál hubiera tenido que ser el coeficiente de amortiguamiento para que, tras 10 oscilaciones, la amplitud ya fuera un 5 % de la inicial?

Debe tenerse en cuenta que el cambio de valor del coeficiente de amortiguamiento c afecta, no solo al de la constante de amortigua-miento $\gamma = \frac{c}{2m}$, sino también al de la pulsación $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, y al del período $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Por tanto, los nuevos γ y T son desconocidos.

La expresión matemática de la condición del enunciado es

$$A(10T) = 0{,}05A(0)$$

De aquí se deduce que

$$De^{-\gamma(10T)} = 0{,}05De^{-\gamma\times 0} \Rightarrow e^{-10\gamma T} = 0{,}05 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -10\gamma T = \ln 0{,}05 = -2{,}996 \Rightarrow \gamma T = 0{,}2996$$

Insistimos: los valores de γ y T son nuevos, no los de los apartados anteriores.

Puesto que no se ha modificado los valores de k y m, la pulsación libre sigue siendo $\omega_0 = 4\ \mathrm{rad/s}$. Por tanto,

$$0{,}2996 = \gamma T = \gamma \frac{2\pi}{\omega} = \gamma \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{4^2 - \gamma^2}} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{16 - \gamma^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}2996\sqrt{16 - \gamma^2} = 2\pi\gamma$$

Elevando al cuadrado los dos miembros, se obtiene

$$0{,}08976(16 - \gamma^2) = 4\pi^2\gamma^2 \Rightarrow 1{,}436 - 0{,}08976\gamma^2 = 4\pi^2\gamma^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 39{,}57\gamma^2 = 1{,}436 \Rightarrow \gamma = 0{,}1905\ \mathrm{s}^{-1}$$

Por tanto, el coeficiente de amortiguamiento hubiera tenido que ser

$$\gamma = \frac{c}{2m} \Rightarrow 0{,}1905 = \frac{c}{2 \times 0{,}3} \Rightarrow c = 0{,}1143\ \mathrm{kg/s}$$

f) ¿Cuál sería el período en este caso?

Con $c = 0{,}1143\ \text{kg/s}$, y por tanto con $\gamma = 0{,}1905\ \text{s}^{-1}$, se tiene

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{4^2 - 0{,}1905^2} = 3{,}9955\ \text{rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3{,}9955} = 1{,}5726\ \text{s}$$

VI.- Oscilación forzada

Fuerza exterior periódica

Como se ha visto, un sistema oscilante con amortiguamiento, sea este débil, crítico o fuerte, tiende asintóticamente al reposo.

Sin embargo, es posible hacer que el sistema se mantenga oscilando aplicando una fuerza exterior periódica, por ejemplo por medio de un motor. En este caso se dice que el sistema tiene una oscilación forzada.

El caso más sencillo de tratar matemáticamente es el de que la fuerza exterior periódica sea sinusoidal, esto es, de la forma $F_x = F_M \operatorname{sen}(\Omega t + \alpha)$. Este es el caso que se estudiará en el presente texto.

Parámetros de una fuerza sinusoidal

$$F_x = F_M \operatorname{sen}(\Omega t + \alpha)$$

F_M: Valor máximo de F_x. Es una constante positiva, y su unidad SI coherente es el N.

Ω: Pulsación de la fuerza. Es una constante positiva, y su unidad SI coherente es el rad/s.

α: Fase inicial de la fuerza. Es una constante que puede ser positiva, negativa o cero, y su unidad SI coherente es el rad.

Efecto de una fuerza externa sinusoidal

Aunque lo que sigue se justificará más adelante, conviene destacar algunos de los efectos de la aplicación de una fuerza externa sinusoidal a un sistema oscilante.

- Con el tiempo, el sistema tiende asintóticamente a tener un movimiento armónico simple.
- La pulsación de ese m.a.s. no es la pulsación libre (también llamada pulsación natural), ω_0, del sistema, sino la pulsación de la fuerza externa, Ω. Por ejemplo, aunque sea $\omega_0 = 3\ \mathrm{rad/s}$, el sistema oscilará con $6\ \mathrm{rad/s}$ si $\Omega = 6\ \mathrm{rad/s}$, y con $2\ \mathrm{rad/s}$ si $\Omega = 2\ \mathrm{rad/s}$.
- La transferencia de energía al sistema es máxima si la pulsación de la fuerza coincide con la natural del sistema, esto es, si $\Omega = \omega_0$.

Sistema con oscilación forzada sinusoidal

Considérese un sistema constituido por un muelle, de constante elástica k y masa despreciable, con un extremo fijo y el otro unido a un objeto de masa m, siendo c el coeficiente de amortiguamiento.

Como ya se justificó, aplicando el teorema del centro de masas se obtiene que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + \left(-c\frac{dx}{dt}\right)$$

Si, además de las fuerzas $-kx$ y $-cv_x$, actúa una fuerza externa sinusoidal, la expresión resultante pasa a ser

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + \left(-c\frac{dx}{dt}\right) + F_M \operatorname{sen}(\Omega t + \alpha)$$

Sistema con oscilación forzada sinusoidal

Por tanto,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F_M\,\mathrm{sen}(\Omega t+\alpha)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F_M}{m}\mathrm{sen}(\Omega t+\alpha)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F_M}{m}\mathrm{sen}(\Omega t+\alpha)$$

Como nos ha ocurrido al analizar el m.a.s. y los sistemas con amortiguamiento, la solución de esta ecuación diferencial no es única, sino que incluye dos parámetros que, típicamente, se obtienen de las condiciones iniciales.

Sistema con oscilación forzada sinusoidal

Sea x_p una solución de esta ecuación. Por tanto, cumple que

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx_p}{dt} + \omega_0^2 x_p = \frac{F_M}{m}\,\mathrm{sen}(\Omega t + \alpha)$$

Sea x_t una función cualquiera que satisfaga la ecuación

$$\frac{d^2x_t}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx_t}{dt} + \omega_0^2 x_t = 0$$

Sea la función $x = x_p + x_t$.* Vamos a demostrar que x también es solución de la ecuación diferencial de la oscilación forzada.

* En Matemáticas x_p recibe el nombre de solución particular, y x_t el de solución de la ecuación diferencial homogénea.

Sistema con oscilación forzada sinusoidal

Es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x =$$

$$= \frac{d^2\left(x_p + x_t\right)}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\left(x_p + x_t\right)}{dt} + \omega_0^2\left(x_p + x_t\right) =$$

$$= \left[\frac{d^2x_p}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx_p}{dt} + \omega_0^2 x_p\right] + \left[\frac{d^2x_t}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx_t}{dt} + \omega_0^2 x_t\right] =$$

$$= \left[\frac{F_M}{m}\mathrm{sen}(\Omega t + \alpha)\right] + [0] =$$

$$= \frac{F_M}{m}\mathrm{sen}(\Omega t + \alpha)$$

Sistema con oscilación forzada sinusoidal

Nótese que

$$\frac{d^2x_t}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx_t}{dt} + \omega_0^2 x_t = 0$$

es la ecuación diferencial de una oscilación amortiguada, y por tanto la función x_t es igual a la de un amortiguamiento débil, crítico o fuerte, según sea $\gamma < \omega_0$, $\gamma = \omega_0$ o $\gamma > \omega_0$, respectivamente.

Sea cual sea el tipo de función, sabemos que su valor tiende asintóticamente a cero. Por este motivo, x_t recibe el nombre de componente transitoria de la oscilación forzada.

Sistema con oscilación forzada sinusoidal

Con respecto a la solución particular, puede comprobarse que la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx_p}{dt} + \omega_0^2 x_p = \frac{F_M}{m}\operatorname{sen}(\Omega t + \alpha)$$

es satisfecha por $\boxed{x_p = A_p \operatorname{sen}(\Omega t + \alpha + \phi)}$

donde

$$\boxed{\begin{gathered} A_p = \frac{F_M}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} \\ \phi = \operatorname{arc\,tg}\frac{-2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad ; \quad \phi \in (-\pi; 0)\ \text{rad} \end{gathered}}$$

Sistema con oscilación forzada sinusoidal

Nótese que se trata de una función sinusoidal, y por tanto corresponde a una oscilación periódica. Por este motivo, x_p recibe el nombre de componente permanente de la oscilación forzada.

Con el paso del tiempo, la componente transitoria tiende a cero. En consecuencia, la ecuación del movimiento tiende asintóticamente a coincidir con la de la componente permanente, y por tanto a ser un movimiento armónico simple de pulsación la de la fuerza externa aplicada, como ya se indicó.

Sistema con oscilación forzada sinusoidal

Para comprender mejor estos conceptos, se recomienda utilizar el laboratorio virtual *"Visualizador de oscilaciones"*.

https://riunet.upv.es/handle/10251/5125

- Utilícese los valores por defecto de masa (1 kg) y constante elástica (16 N/m).
- Asígnese los valores 1 kg/s para el coeficiente de amortiguamiento, 10 N para la amplitud de la fuerza externa sinusoidal, y 10 rad/s para la pulsación de esta.
- La representación gráfica muestra cómo la elongación tiende con el tiempo a ser una función sinusoidal.

Sistema con oscilación forzada sinusoidal

- Arrástrese la deslizadera coef. amortiguamiento para aumentar el valor de este, sin sobrepasar los 8 kg/s, que corresponden en el ejemplo al amortiguamiento crítico de la componente transitoria. Obsérvese cómo cada vez la forma sinusoidal se alcanza en menos tiempo.
- Tras sobrepasar los 8 kg/s compruébese que, al corresponder ahora la componente transitoria a un amortiguamiento fuerte, coeficientes de amortiguamiento mayores suponen que cada vez se tarda más en tener la forma sinusoidal.

Ejercicio 11

Un objeto de 20 g de masa está suspendido de un muelle de constante elástica 2 N/m, cuyo otro extremo está unido al techo. Inicialmente el muelle está alargado 9 cm respecto a la posición de equilibrio del sistema, y el objeto se acerca a dicha posición a 150 cm/s. El coeficiente de amortiguamiento es 0,24 kg/s. El sistema está también sometido a una fuerza periódica de ecuación $F_x = 2\,\mathrm{sen}(20t + 1)$ (SI). Obténgase la ecuación del movimiento del objeto.

Salvo por la existencia de la fuerza sinusoidal, el enunciado es el mismo del ejercicio 9. Por tanto,

- las características del sistema son: $k = 2\ \mathrm{N/m}$, $m = 0{,}02\ \mathrm{kg}$, $c = 0{,}24\ \mathrm{kg/s}$
- las condiciones iniciales son: $x_0 = +0{,}09\ \mathrm{m}$, $v_{x_0} = -1{,}5\ \mathrm{m/s}$

La pulsación libre y la constante de amortiguamiento son:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{0{,}02}} = 10\,\mathrm{rad/s}$$

$$\gamma = \frac{c}{2m} = \frac{0{,}24}{2 \times 0{,}02} = 6\ \mathrm{s}^{-1}$$

Puesto que es $\gamma < \omega_0$, la componente transitoria es la de un amortiguamiento débil, cuya pulsación es

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\,\mathrm{rad/s}$$

Por tanto,

$$x_t = D\mathrm{e}^{-6t}\,\mathrm{sen}(8t + \varphi)$$

De la expresión de la fuerza sinusoidal se obtiene

$$F_x = 2\,\mathrm{sen}(20t + 1)\ \ (\mathrm{SI}) \Rightarrow \begin{cases} F_M = 2\ \mathrm{N} \\ \Omega = 20\,\mathrm{rad/s} \\ \alpha = 1\ \mathrm{rad} \end{cases}$$

Por tanto,

$$A_p = \frac{F_M}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} =$$

$$= \frac{2}{0{,}02\sqrt{(10^2 - 20^2)^2 + (2 \times 6 \times 20)^2}} = 0{,}2603\ \mathrm{m}$$

$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{-2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{-2 \times 6 \times 20}{10^2 - 20^2} = 0{,}8 \Rightarrow \begin{cases} \phi = 0{,}6747\,\mathrm{rad} \\ \phi = 0{,}6747 - \pi = \\ \quad = -2{,}4669\,\mathrm{rad} \end{cases}$$

Puesto que ha de ser $\phi \in (-\pi; 0)$ rad, la solución correcta es $\phi = -2{,}4669$ rad.

Por tanto, la componente permanente es

$$x_p = A_p \operatorname{sen}(\Omega t + \alpha + \phi) = 0{,}2603 \operatorname{sen}\big(20t + 1 + (-2{,}4669)\big) =$$

$$= 0{,}2603 \operatorname{sen}(20t - 1{,}4669)$$

En consecuencia, la ecuación de la oscilación es

$$x = x_p + x_t =$$

$$= 0{,}2603 \operatorname{sen}(20t - 1{,}4669) + D\mathrm{e}^{-6t} \operatorname{sen}(8t + \varphi)$$

Es

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 0{,}2603 \times 20 \cos(20t - 1{,}4669) +$$

$$+ D\mathrm{e}^{-6t}(-6) \operatorname{sen}(8t + \varphi) + D\mathrm{e}^{-6t} 8 \cos(8t + \varphi)$$

Para $t = 0$ s:

$$x_0 = 0{,}2603\,\mathrm{sen}(20 \times 0 - 1{,}4669) + D\mathrm{e}^{-6\times 0}\,\mathrm{sen}(8 \times 0 + \varphi) =$$
$$= -0{,}2589 + D\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$v_{x_0} = 0{,}2603 \times 20\cos(20 \times 0 - 1{,}4669) +$$
$$+D\mathrm{e}^{-6\times 0}(-6)\,\mathrm{sen}(8 \times 0 + \varphi) + D\mathrm{e}^{-6\times 0}8\cos(8 \times 0 + \varphi) =$$
$$= 0{,}5399 - 6D\,\mathrm{sen}\,\varphi + 8D\cos\varphi$$

En consecuencia,

$$-0{,}2589 + D\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0{,}09 \;\Rightarrow D\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0{,}3489$$

$$0{,}5399 - 6D\,\mathrm{sen}\,\varphi + 8D\cos\varphi = -1{,}5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0{,}5399 - 6 \times 0{,}3489 + 8D\cos\varphi = -1{,}5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8D\cos\varphi = 0{,}0535 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D\cos\varphi = 0{,}006688$$

Así pues: $D \operatorname{sen} \varphi = 0{,}3489$

$D \cos \varphi = 0{,}006688$

Sea el número complejo $\vec{x} = D_\varphi$. Es

$$\vec{x} = D \cos \varphi + D \operatorname{sen} \varphi \, \mathrm{j} = 0{,}006688 + 0{,}3489\mathrm{j} = 0{,}3490_{1{,}5516} \text{ m}$$

Por tanto: $\begin{cases} D = 0{,}3490 \text{ m} \\ \varphi = 1{,}5516 \text{ rad} \end{cases}$

Por consiguiente,

$$x = 0{,}2603 \operatorname{sen}(20t - 1{,}4669) + 0{,}3490\mathrm{e}^{-6t} \operatorname{sen}(8t + 1{,}5516) \ \text{(SI)}$$

Energía en una oscilación forzada

Como se ha visto, bajo la acción de una fuerza externa sinusoidal, el sistema tiende asintóticamente a tener movimiento armónico simple.

Dado que la fuerza debida a la viscosidad consume energía mecánica, esta pérdida ha de ser compensada con un aporte de igual cuantía por parte de la fuerza externa sinusoidal. Sin ese aporte, la energía mecánica se consumiría y el sistema tendería al reposo.

Energía en una oscilación forzada

La potencia suministrada por la fuerza debida a la viscosidad es

$$P_v = \vec{F}_v \cdot \vec{v} = (-cv_x) \cdot (v_x) = -cv_x^2 = -c(dx/dt)^2$$

A medida que la componente transitoria se anula, se tiene:

$$x = x_p = A_p \operatorname{sen}(\Omega t + \alpha + \phi)$$

$$dx/dt = A_p \Omega \cos(\Omega t + \alpha + \phi)$$

Por tanto,

$$P_v = -cA_p^2 \Omega^2 \cos^2(\Omega t + \alpha + \phi) =$$

$$= -cA_p^2 \Omega^2 \left[\frac{1 + \cos 2(\Omega t + \alpha + \phi)}{2}\right]$$

Energía en una oscilación forzada

El valor medio de esta potencia es

$$\langle P_v \rangle = -cA_p^2 \Omega^2 \left[\frac{1 + \langle \cos 2(\Omega t + \alpha + \phi) \rangle}{2} \right] =$$

$$= -cA_p^2 \Omega^2 \left[\frac{1+0}{2} \right] = -\frac{1}{2} cA_p^2 \Omega^2$$

Como era de esperar, el resultado es negativo, ya que $\vec{F}_v$ no aporta potencia, sino que la consume. Para mantener la oscilación, la potencia (el ritmo al que aporta energía) media de la fuerza exterior sinusoidal $F_x = F_M \operatorname{sen}(\Omega t + \alpha)$, ha de ser

$$\langle P_F \rangle = -\langle P_v \rangle = \frac{1}{2} cA_p^2 \Omega^2$$

Energía en una oscilación forzada

Por tanto,

$$\langle P_F \rangle = \frac{1}{2} c A_p^2 \Omega^2 = \frac{1}{2} c \left[\frac{F_M}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} \right]^2 \Omega^2 =$$

$$= \frac{cF_M^2}{2m^2} \frac{\Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2} =$$

$$= \frac{cF_M^2}{2m^2} \frac{1}{\left(\dfrac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\Omega} \right)^2 + (2\gamma)^2}$$

Energía en una oscilación forzada

Para un sistema concreto, y aplicando una fuerza externa sinusoidal con un valor máximo F_M concreto, ¿cuál ha de ser la pulsación de dicha fuerza para que la transferencia de energía sea máxima?

Dado que, salvo Ω, los parámetros de la expresión

$$\langle P_F \rangle = \frac{cF_M^2}{2m^2} \frac{1}{\left(\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\Omega}\right)^2 + (2\gamma)^2}$$

son fijos, $\langle P_F \rangle$ es máxima si la expresión resaltada es mínima.

Puesto que esa expresión es un valor al cuadrado, ese mínimo se da cuando dicho valor es cero, y por tanto cuando $\Omega = \omega_0$.

Resonancia

Se llama pulsación de resonancia a la de la fuerza aplicada para la que el ritmo medio al que se transfiere energía al sistema es máximo. El fenómeno que tiene lugar en estas condiciones, recibe el nombre de resonancia.

De acuerdo con lo visto, la pulsación de resonancia coincide con la frecuencia natural del sistema: $\Omega_r = \omega_0$.

De igual forma, se puede hablar de período de resonancia, $T_r = 2\pi/\Omega_r$, y de frecuencia de resonancia, $f_r = 1/T_r$. Obviamente, sus valores coinciden con los del período natural y la frecuencia natural del sistema, respectivamente.

Resonancia

Para comprender mejor estos conceptos, se recomienda utilizar el laboratorio virtual *"Visualizador de oscilaciones"*.

https://riunet.upv.es/handle/10251/5125

- Utilícese los valores por defecto de masa (1 kg) y constante elástica (16 N/m). Así, la pulsación libre del sistema es 4 rad/s.
- Asígnese los valores 2 kg/s para el coeficiente de amortiguamiento, 10 N para la amplitud de la fuerza externa sinusoidal , y 1 rad/s para la pulsación de esta.
- Arrástrese la deslizadera pulsación fuerza para aumentar el valor de esta. Obsérvese que la amplitud de la componente permanente crece, pero que a partir de cierto punto pasa a disminuir.

Resonancia

- Nótese que la amplitud máxima se alcanza cuando la pulsación de la fuerza está cerca de la de resonancia, $4\ \mathrm{rad/s}$.

Conviene puntualizar que, en efecto, la amplitud máxima no se consigue exactamente con la pulsación de resonancia.

Lo que sí se consigue exactamente a la pulsación de resonancia, como ya se indicó, es el mayor ritmo de transferencia de energía al sistema.