FÍSICA TÉCNICA

Geometría de masas

V. 1.00.00

Marcos H. Giménez

Isabel Salinas

Vanesa P. Cuenca

Juan A. Monsoriu

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

ETSI Aeroespacial y Diseño Industrial

Créditos

Título:
Física Técnica

Subtítulo:
Geometría de masas

Autores:
Marcos H. Giménez, Isabel Salinas, Vanesa P. Cuenca y Juan A. Monsoriu

Editorial:
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial y Diseño Industrial

Valencia 2024

ISBN: 978-84-09-58855-8
Versión digital

Índice

Pulsando sobre el número de página de una diapositiva, se regresa a este índice.

Índice

III.- Momento de inercia

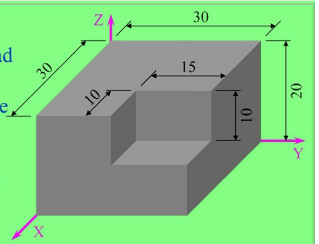
Índice (ejercicios)

Ejercicio 1

Tres partículas de masas 1 kg, 2 kg y 3 kg se encuentran en las posiciones $(0;0)$ m, $(-2;1)$ m y $(3;-1)$ m, respectivamente. ¿En qué posición se debe situar una partícula de 4 kg para que el centro de masas del conjunto de las cuatro se halle en el punto $(1;1)$ m?

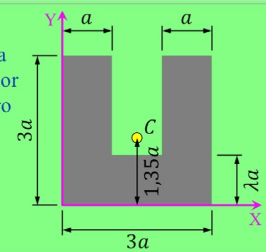
Ejercicio 2

Un bloque de hormigón (densidad $2500\,\mathrm{kg/m^3}$) tiene la forma y dimensiones (cotas en cm) que se muestran en la figura. Determínese la posición de su centro de masas en el sistema de referencia indicado.



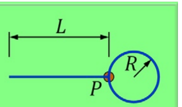
Ejercicio 3

Sea la placa homogénea y plana de la figura. ¿Qué valor ha de tener el factor λ para que la coordenada Y del centro de masas sea $y_C = 1{,}35a$?



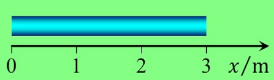
Ejercicio 4

¿Qué longitud L debe tener la parte recta de la varilla homogénea doblada de la figura, si se quiere que el centro de masas de dicha varilla se encuentre en el punto P?



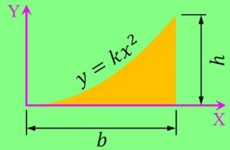
Ejercicio 5

Una varilla de longitud $L = 3$ m tiene una densidad lineal de valor $\lambda = 2 + x^2/3$ (SI). ¿Cuáles son su masa y la coordenada X de su centro de masas?



Ejercicio 6

Obténgase la posición del centro de masas de la figura homogénea y plana de la figura.



Ejercicio 7

Obténgase la altura, respecto a la base, a la que se encuentra el centro de masas de un triángulo homogéneo.

Ejercicio 8

Utilizando un teorema de Guldin, obténgase la altura, respecto a la base, a la que se encuentra el centro de masas de un triángulo homogéneo.

Ejercicio 9

Utilizando un teorema de Guldin, obténgase la posición del centro de masas de una semicircunferencia homogénea.

Ejercicio 10

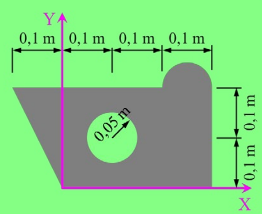
Utilizando un teorema de Guldin, obténgase la posición del centro de masas de un semicírculo homogéneo.

Ejercicio 11

Utilizando un teorema de Guldin, obténgase la posición del centro de masas de un cuarto de círculo homogéneo.

Ejercicio 12

Una placa (densidad superficial $12\ \mathrm{kg/m^2}$) tiene la forma y dimensiones que se muestran en la figura. Determínese la posición de su centro de masas en el sistema de referencia indicado.



Ejercicio 13

Una partícula de masa 2 kg se encuentra en la posición $(3;-1;5)$ m. Obténgase su momento de inercia respecto a: a) el punto $(1;1;2)$ m; b) el eje Z; c) el plano YZ.

Ejercicio 14

Tres partículas de masas 1 kg, 2 kg y 3 kg se encuentran en las posiciones $(0;0)$ m, $(-2;1)$ m y $(3;-1)$ m, respectivamente. ¿Cuál es el momento de inercia del sistema respecto al eje Y?

Ejercicio 15

Determínese el momento de inercia de un alambre homogéneo muy fino, de masa m, respecto a un eje paralelo situado a una distancia d.

Ejercicio 16

Determínese el momento de inercia de un anillo homogéneo muy fino, de masa m y radio R, respecto al eje de simetría perpendicular a su plano.

Ejercicio 17

Determínese el momento de inercia de un rectángulo homogéneo, de masa m y lados de longitud a y b, respecto al eje de simetría paralelo al segundo de esos lados.

Ejercicio 18

Determínese el momento de inercia de un rectángulo homogéneo, de masa m y dimensiones a y b, respecto a un eje que recorre uno de los lados de longitud b.

Ejercicio 19

Determínese el momento de inercia de un paralelogramo homogéneo, de masa m, base b y altura h, respecto a un eje que recorre uno de los lados de longitud b.

Ejercicio 20

Determínese el momento de inercia de un disco homogéneo muy fino, de masa m y radio R, respecto al eje de simetría perpendicular a su plano.

Índice ejercicios (2)

Ejercicio 21

Determínese el momento de inercia de un rectángulo homogéneo, de masa m y dimensiones a y b, respecto a un eje que recorre uno de los lados de longitud b. Para ello, utilícese el teorema de Steiner a partir del eje paralelo que pasa por el centro de masas del rectángulo.

Ejercicio 22

Determínese el momento de inercia de un triángulo homogéneo, de masa m, base b y altura h, respecto a un eje que recorre el lado de longitud b.

Ejercicio 23

Determínese el momento de inercia de un rectángulo homogéneo, de masa m y dimensiones a y b, respecto al eje perpendicular que pasa por su centro de masas.

Ejercicio 24

Determínese el momento de inercia de un anillo homogéneo muy fino, de masa m y radio R, respecto a un eje diametral.

Ejercicio 25

Determínese el momento de inercia de un disco homogéneo muy fino, de masa m y radio R, respecto un eje diametral.

Ejercicio 26

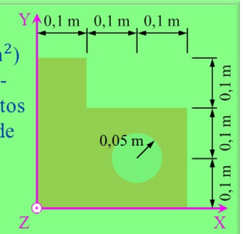
Determínese el momento de inercia de un semidisco homogéneo muy fino, de masa m y radio R, respecto a un eje que recorre su borde recto.

Ejercicio 27

Determínese el momento de inercia de un cilindro macizo homogéneo, de masa m, radio R y longitud L, respecto a un eje diametral de su sección circular central.

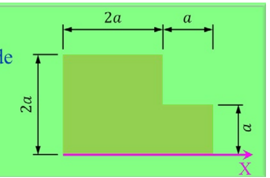
Ejercicio 28

Una placa (densidad superficial 15 kg/m^2) tiene la forma y dimensiones que se muestran en la figura. Determínense sus momentos de inercia respecto a los ejes del sistema de referencia indicado.



Ejercicio 29

Obténgase la expresión del momento de inercia, respecto al eje X, de la placa homogénea de la figura, en función de su masa M y de la longitud a.



Ejercicio 30

Determínese el momento de inercia de una esfera hueca homogénea muy fina, de masa m y radio R, respecto a: a) su centro; b) un eje de simetría.

Ejercicio 31

Determínese el momento de inercia de una esfera maciza homogénea muy fina, de masa m y radio R, respecto a: a) su centro; b) un eje de simetría.

I.- Conceptos previos

Punto material y sistema

Se denomina punto material a un ente abstracto dotado de masa (material) y sin dimensiones (punto).

Los cuerpos reales no son puntos materiales, pero se puede considerar que están formados por un conjunto de ellos, esto es, constituyen un sistema de puntos materiales.

Estrictamente hablando, un punto material tiene masa dm y volumen dV, no nulo.

Por tanto, su densidad es $\rho = dm/dV$, no infinita como parece sugerir la definición.

Densidad

Como se acaba de indicar, se denomina densidad (también densidad de masa, cuando se requiere diferenciarla de la denominada densidad de carga eléctrica) en un punto al cociente entre la masa diferencial, dm, de un diferencial de volumen, dV, alrededor de dicho punto, y el propio dV.

Por tanto, la densidad es $\rho = dm/dV$.

En ocasiones, la densidad recibe los nombres de densidad volúmica o densidad volumétrica, para diferenciarla de las densidades lineal y superficial, descritas más adelante.

Densidad

De acuerdo con su definición, la densidad es una magnitud escalar, y su producto dimensional es

$$\dim \rho = \mathsf{M}(\dim V)^{-1} = \mathsf{M}(\mathsf{L}^3)^{-1} = \mathsf{L}^{-3}\mathsf{M}$$

La unidad SI coherente de la densidad es el $\mathrm{kg/m^3}$.

Densidad lineal

Sea un elemento prácticamente unidimensional (por ejemplo un alambre), o que tiene sección constante (por ejemplo un tubo). En estos casos, puede resultar más cómodo utilizar la masa, no por unidad de volumen, sino de longitud.

Se denomina densidad lineal (también densidad lineal de masa, cuando se requiere diferenciarla de la denominada densidad lineal de carga eléctrica) en un punto al cociente entre la masa diferencial, dm, de un diferencial de longitud, dl, alrededor de dicho punto, y el propio dl.

Por tanto, la densidad lineal es $\lambda = dm/dl$.

Densidad lineal

De acuerdo con su definición, la densidad lineal es una magnitud escalar, y su producto dimensional es

$$\dim \lambda = \mathsf{L}^{-1}\mathsf{M}$$

La unidad SI coherente de la densidad lineal es el kg/m.

Densidad superficial

Sea un elemento prácticamente bidimensional (por ejemplo una hoja de papel), o que tiene grosor constante (por ejemplo una placa). En estos casos, puede resultar más cómodo utilizar la masa, no por unidad de volumen, sino de superficie.

Se denomina densidad superficial (también densidad superficial de masa, cuando se requiere diferenciarla de la denominada densidad superficial de carga eléctrica) en un punto al cociente entre la masa diferencial, dm, de un diferencial de área, dS, alrededor de dicho punto, y el propio dS.

Por tanto, la densidad superficial es $\sigma = dm/dS$.

Densidad superficial

De acuerdo con su definición, la densidad superficial es una magnitud escalar, y su producto dimensional es

$$\dim \sigma = \mathsf{M}(\dim S)^{-1} = \mathsf{M}(\mathsf{L}^2)^{-1} = \mathsf{L}^{-2}\mathsf{M}$$

La unidad SI coherente de la densidad superficial es el kg/m^2.

Densidad de un cuerpo homogéneo

En el contexto del presente tema, se dice que un cuerpo es homogéneo si su densidad es la misma en todos sus puntos. En tal caso, se puede hablar simplemente de densidad del cuerpo.

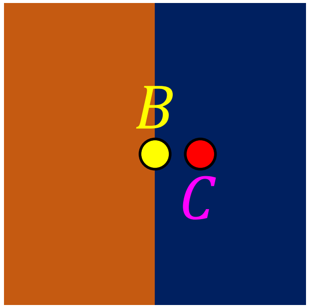
En el caso de cuerpos homogéneos, su densidad es igual al cociente entre su masa y su volumen, $\rho = m/V$.

Análogamente, se puede hablar de densidad lineal del cuerpo y densidad superficial del cuerpo cuando estas no cambian de un punto a otro. Así, dichas densidades son respectivamente $\lambda = m/l$ y $\sigma = m/S$.

Geometría de masas

La geometría de masas es la parte de la Mecánica que estudia la distribución espacial de la masa en los sistemas de puntos materiales.

Se diferencia de la geometría en que esta se ocupa de la distribución de longitudes, áreas y volúmenes.



Sea por ejemplo el cuadrado de la figura, en el que la densidad de la masa es mayor en la mitad derecha que en la izquierda.

La posición media B del área del cuadrado (concepto de geometría) está en su punto medio.

En cambio, la posición media C de la masa del cuadrado (concepto de geometría de masas) está desplazada hacia la derecha.

Geometría de masas

Los conceptos de geometría de masas más relevantes para la Mecánica son:

- el centro de masas, que representa la posición media de la distribución de masas;
- los momentos de inercia, que están relacionados con cómo se distribuye la masa respecto a un punto, recta o plano.

II.- Centro de masas

Definición de centro de masas

Se denomina centro de masas (abreviado c.d.m.) de un sistema de puntos materiales al punto cuyas coordenadas son

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}}$$

$\vec{r}_C$: vector de posición (coordenadas) del centro de masas del sistema.

$\vec{r}_i$: vector de posición (coordenadas) del *i*-ésimo punto material del sistema.

m_i: masa del *i*-ésimo punto material del sistema.

$m = \sum m_i$: masa total del sistema.

Definición de centro de masas

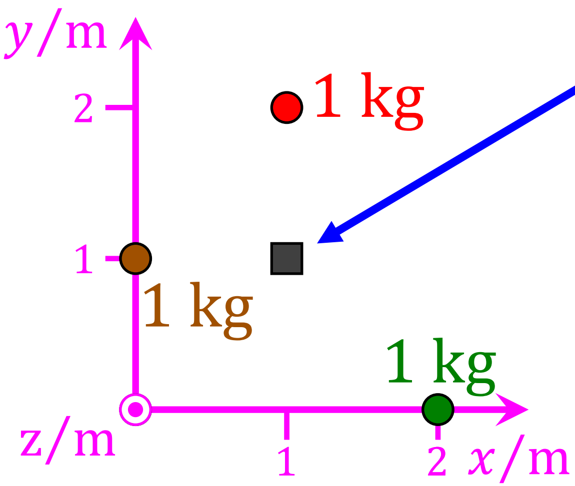
De la definición de centro de masas se deduce que

$$(x_C; y_C; z_C) = \frac{\sum m_i (x_i; y_i; z_i)}{m} \Rightarrow \begin{cases} x_C = \dfrac{\sum m_i x_i}{m} \\ y_C = \dfrac{\sum m_i y_i}{m} \\ z_C = \dfrac{\sum m_i z_i}{m} \end{cases}$$

Posición media de masas

¿Cuál es la posición media de tres masas de 1 kg situadas en los puntos $(1; 2; 0)$ m, $(2; 0; 0)$ m y $(0; 1; 0)$ m?

$$\frac{(1;2;0) + (2;0;0) + (0;1;0)}{3} = (1;1;0)\ \mathrm{m}$$



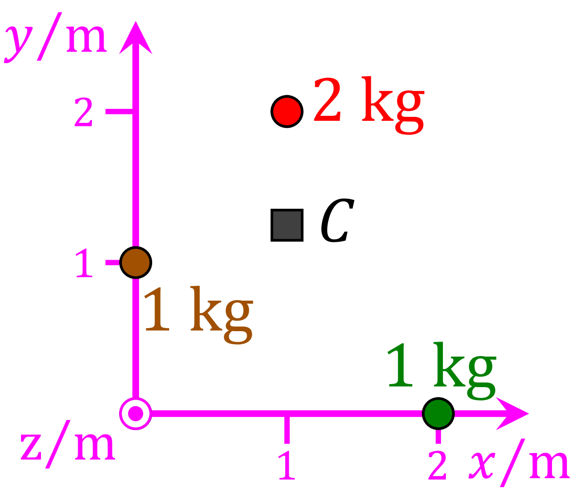
Posición media de masas

¿Y si la masa en el punto (1; 2; 0) m es de 2 kg?

$$\frac{(1;2;0)+(1;2;0)+(2;0;0)+(0;1;0)}{4}=(1;1{,}25;0)\ \mathrm{m}$$

Más sencillo:

$$\frac{2(1;2;0)+1(2;0;0)+1(0;1;0)}{2+1+1}=(1;1{,}25;0)\ \mathrm{m}$$



$$\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+m_3\vec{r}_3}{m}=\vec{r}_C$$

Significado del centro de masas

El centro de masas no es sino la posición media de los puntos materiales del sistema, ponderada con las masas correspondientes.

Se trata de una definición de tipo geométrico, pero intervi-niendo los valores de las masas. Junto con otros conceptos del mismo tipo (como los momentos de inercia que se trata-remos más adelante), constituyen la denominada geometría de masas.

Ejercicio 1

Tres partículas de masas 1 kg, 2 kg y 3 kg se encuentran en las posiciones $(0; 0)$ m, $(-2; 1)$ m y $(3; -1)$ m, respectivamente. ¿En qué posición se debe situar una partícula de 4 kg para que el centro de masas del conjunto de las cuatro se halle en el punto $(1; 1)$ m?

Nótese que en este ejercicio se trabaja únicamente en dos dimensiones.

Sea $\vec{r}_4$ la posición de la cuarta partícula. Se tiene que

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \Rightarrow m\vec{r}_C = \sum m_i \vec{r}_i \Rightarrow$$

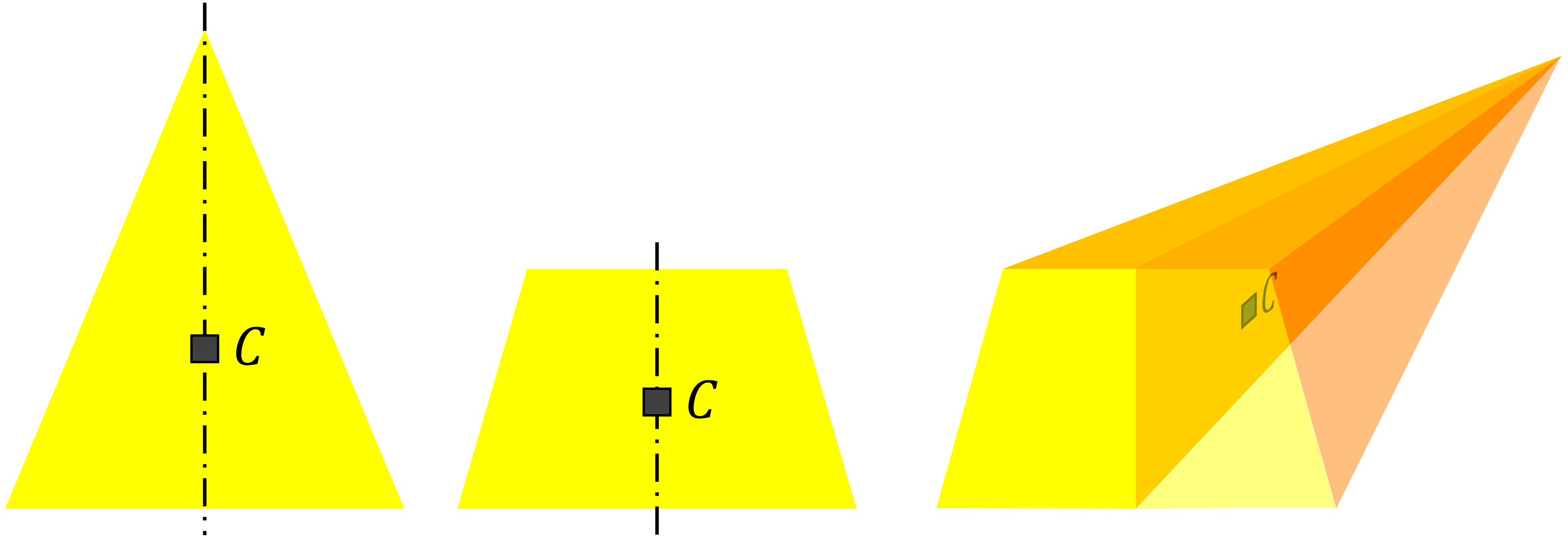
$$\Rightarrow [1 + 2 + 3 + 4](1;\ 1) = 1(0; 0) + 2(-2; 1) + 3(3; -1) + 4\vec{r}_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (10; 10) = (0; 0) + (-4; 2) + (9; -3) + 4\vec{r}_4 = (5; -1) + 4\vec{r}_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\vec{r}_4 = (10; 10) - (5; -1) = (5; 11) \Rightarrow \vec{r}_4 = (1{,}25; 2{,}75)\ \mathrm{m}$$

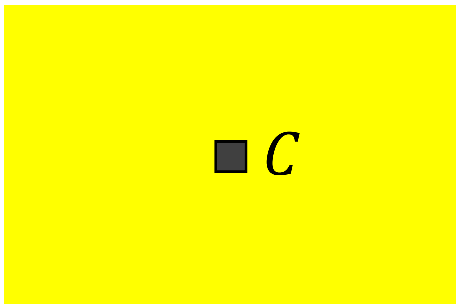
Distribuciones simétricas de masas

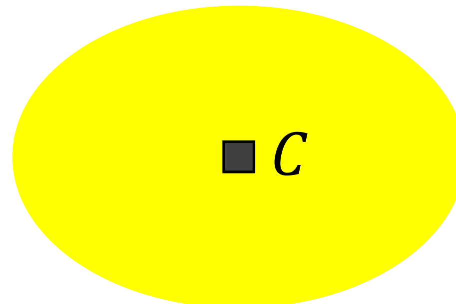
Al tratarse de la posición media, los cuerpos que poseen un eje o plano de simetría tienen su centro de masas sobre el mismo.

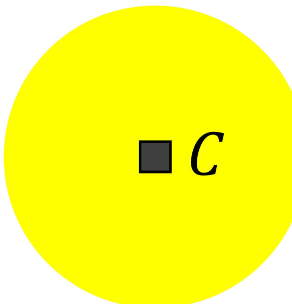


Distribuciones simétricas de masas

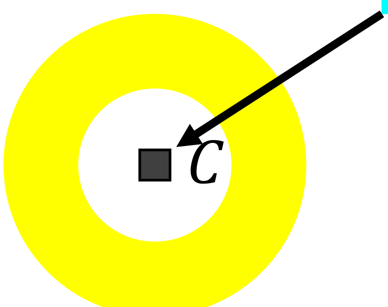
Si el cuerpo posee un centro de simetría, en él se encuentra el centro de masas.

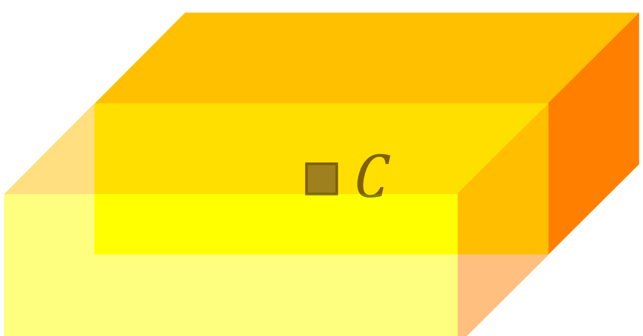






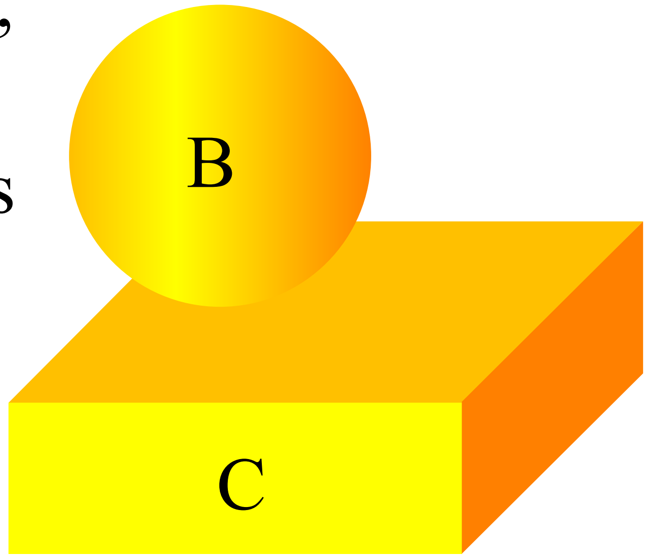
El centro de masas no tiene por qué encontrarse en un punto en el que exista masa.





Cuerpos compuestos

Sea un sistema A de puntos materiales, de masa m_A y centro de masas $\vec{r}_{C_A}$. Lo vamos a considerar constituido por dos subsistemas B y C, de masas m_B y m_C y centros de masa $\vec{r}_{C_B}$ y $\vec{r}_{C_C}$. Es:



$$m_B\vec{r}_{C_B} = \sum_B m_i\vec{r}_i$$

$$m_C\vec{r}_{C_C} = \sum_C m_i\vec{r}_i$$

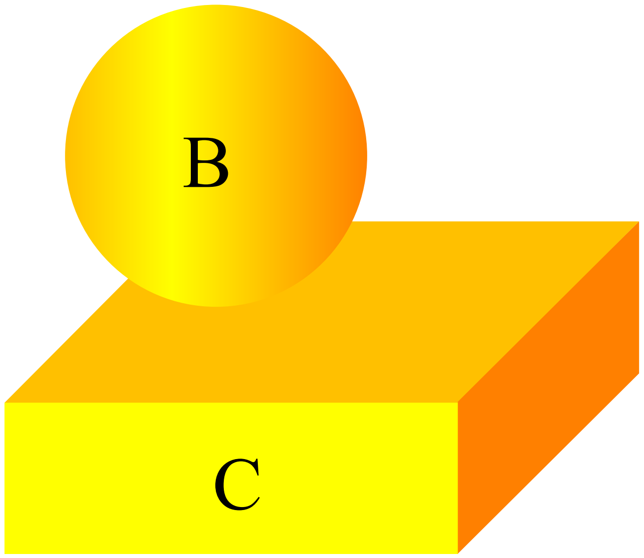
$$m_A\vec{r}_{C_A} = \sum_A m_i\vec{r}_i = \sum_B m_i\vec{r}_i + \sum_C m_i\vec{r}_i = m_B\vec{r}_{C_B} + m_C\vec{r}_{C_C}$$

Cuerpos compuestos

Por tanto,

$$\vec{r}_{C_A} = \frac{m_B \vec{r}_{C_B} + m_C \vec{r}_{C_C}}{m_A}$$

$$(m_A = m_B + m_C)$$



Generalización

El centro de masas de un sistema compuesto por cualquier cantidad de otros más simples, se encuentra en la posición media de los centros de masas de los mismos, ponderada con sus masas correspondientes.

Cuerpos compuestos

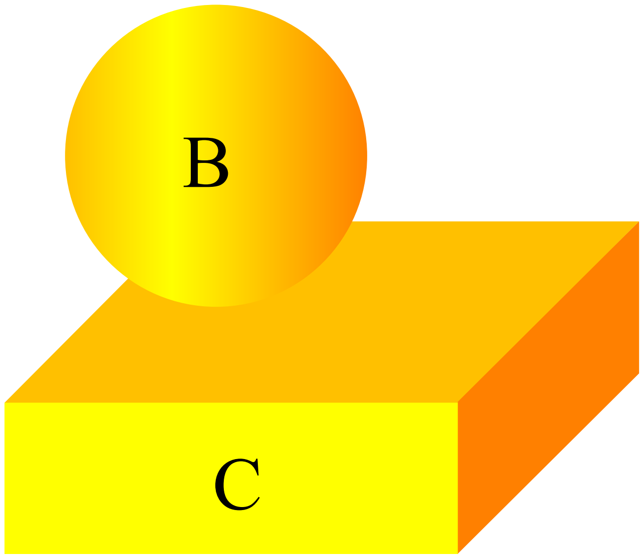
A partir de la relación

$$m_A \vec{r}_{C_A} = m_B \vec{r}_{C_B} + m_C \vec{r}_{C_C}$$

que apareció durante el desarrollo anterior, también se deduce que

$$\vec{r}_{C_C} = \frac{m_A \vec{r}_{C_A} - m_B \vec{r}_{C_B}}{m_C}$$

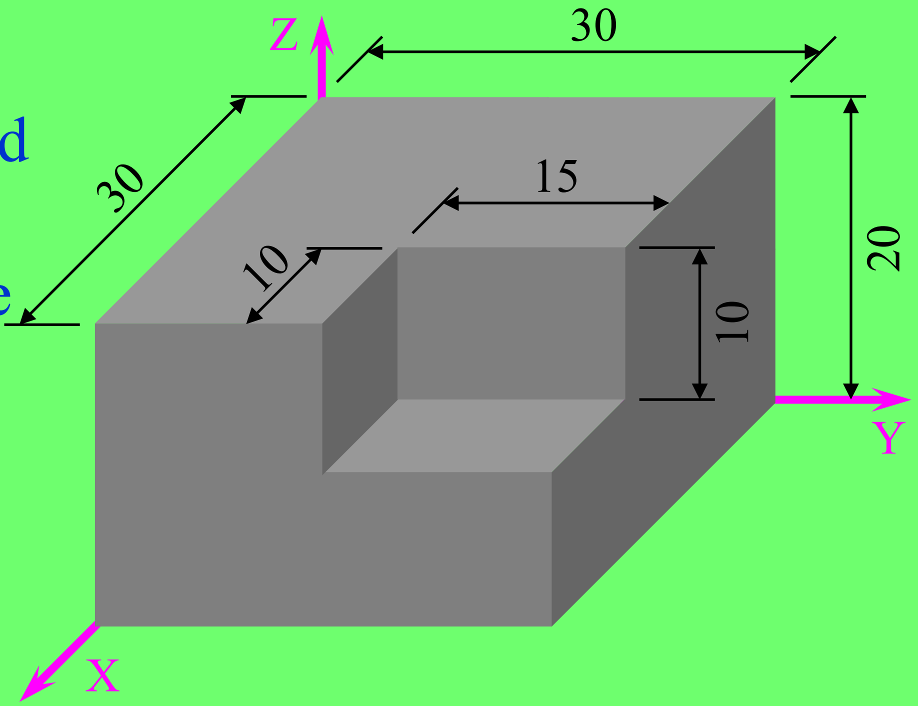
$$(m_C = m_A - m_B)$$

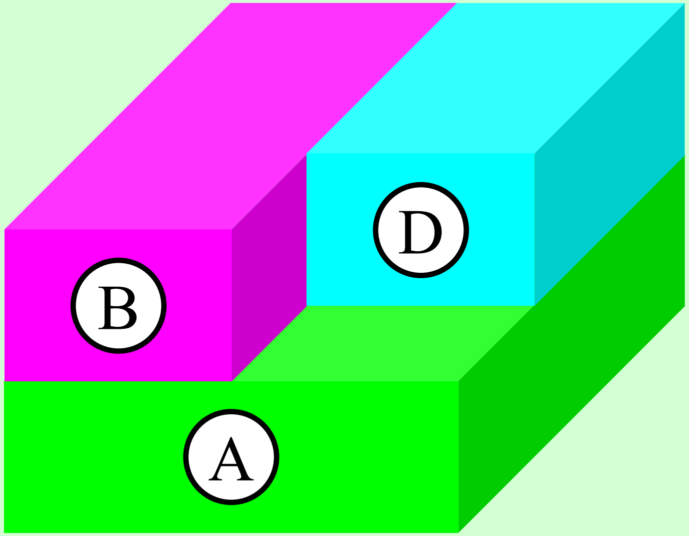


Por tanto, se puede obtener la posición del centro de masas de un sistema compuesto por adición y sustracción de otros más simples, a partir de las correspondientes sumas y restas de sus masas y de sus contribuciones ponderadas.

Ejercicio 2

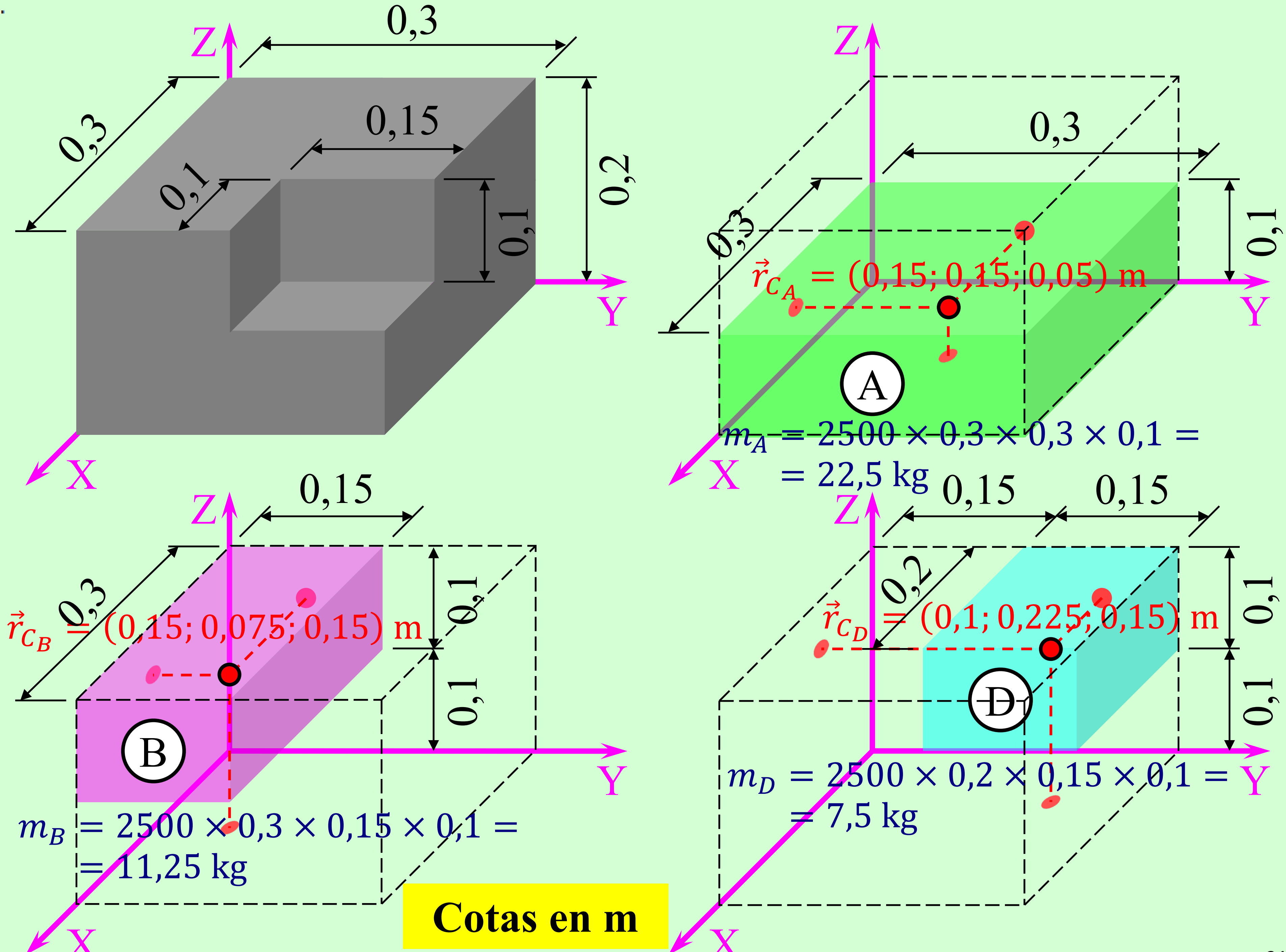
Un bloque de hormigón (densidad 2500 kg/m^3) tiene la forma y dimensiones (cotas en cm) que se muestran en la figura.
Determínese la posición de su centro de masas en el sistema de referencia indicado.





Una de las formas (no la única) de descomponer el bloque, es en los tres ortoedros homogéneos indicados en la figura.

A continuación se va a obtener la masa, y las coordenadas del centro de masas, de cada ortoedro.

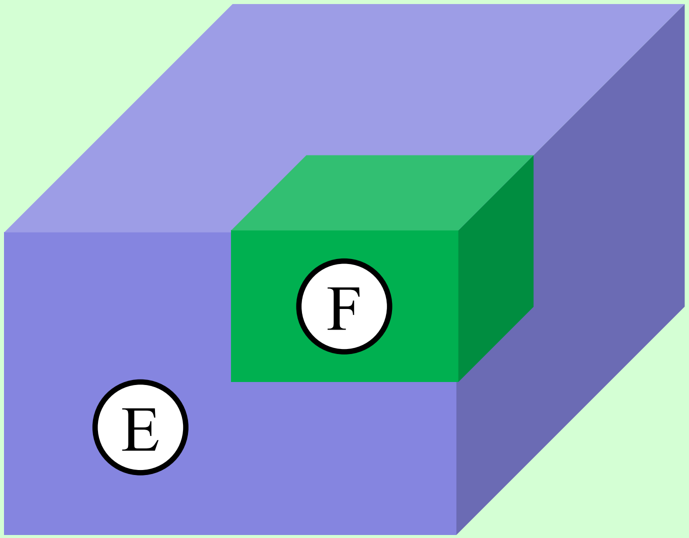


Z
Y
X
0,3
0,3
0,15
0,1
0,1
0,2
A
$\vec{r}_{C_A} = (0,15; 0,15; 0,05)$ m
$m_A = 2500 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,1 =$
$= 22,5$ kg
B
$\vec{r}_{C_B} = (0,15; 0,075; 0,15)$ m
$m_B = 2500 \times 0,3 \times 0,15 \times 0,1 =$
$= 11,25$ kg
D
0,2
$\vec{r}_{C_D} = (0,1; 0,225; 0,15)$ m
$m_D = 2500 \times 0,2 \times 0,15 \times 0,1 =$
$= 7,5$ kg
Cotas en m

$$\vec{r}_C = \frac{m_A \vec{r}_{C_A} + m_B \vec{r}_{C_B} + m_D \vec{r}_{C_D}}{m} =$$

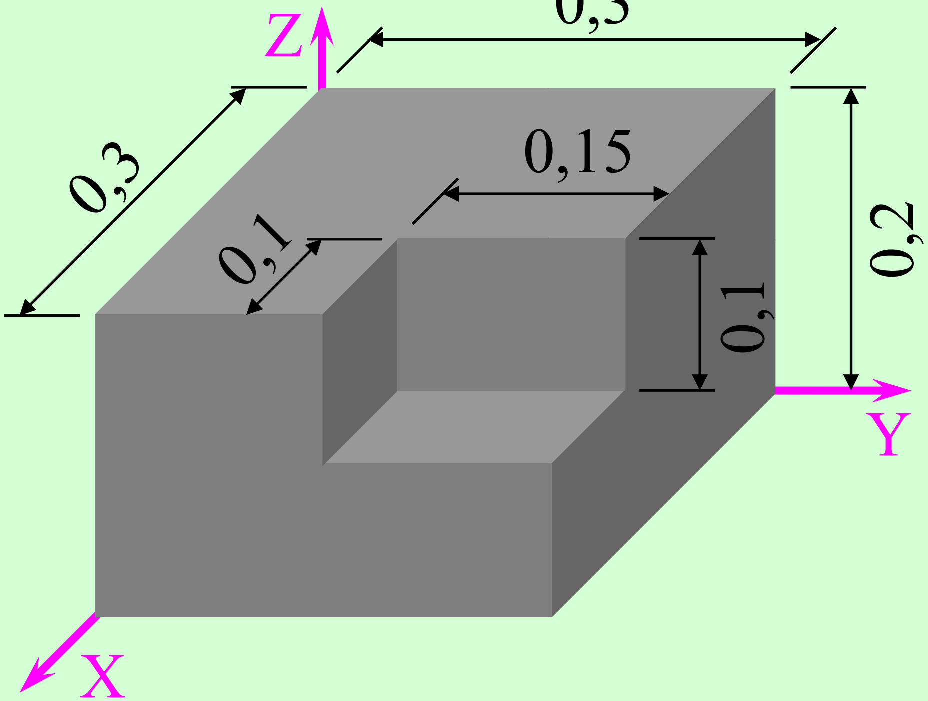
$$= \frac{22{,}5(0{,}15; 0{,}15; 0{,}05) + 11{,}25(0{,}15; 0{,}075; 0{,}15) + 7{,}5(0{,}1; 0{,}225; 0{,}15)}{22{,}5 + 11{,}25 + 7{,}5} =$$

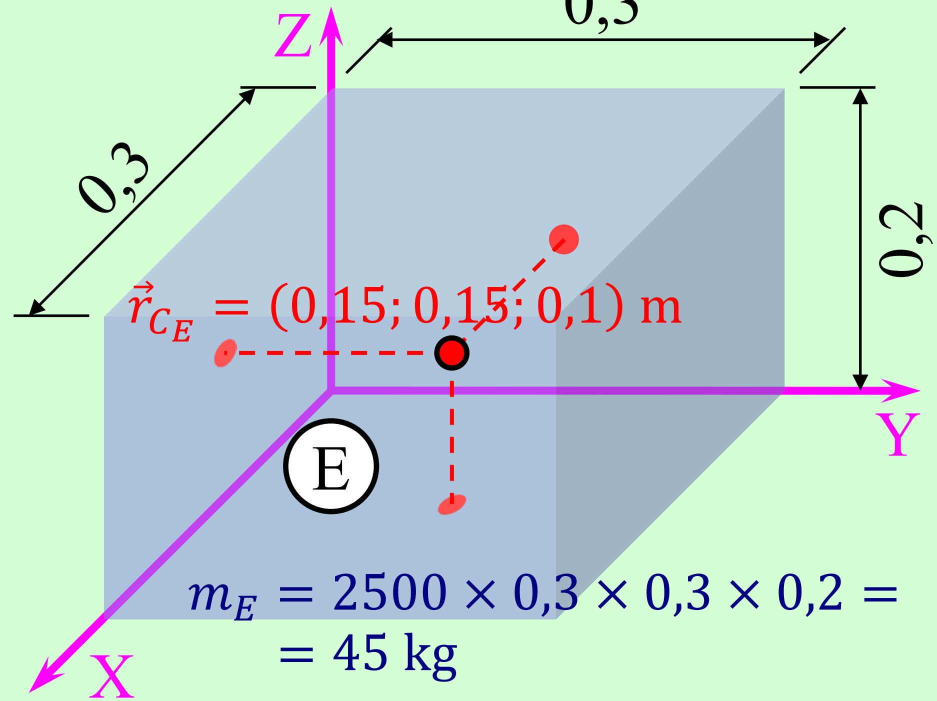
$$= (0{,}1409; 0{,}1432; 0{,}0955)\ \mathrm{m}$$



Una alternativa más sencilla, por implicar únicamente dos partes, es considerar el ortoedro E y quitarle el F, como se muestra en la figura.

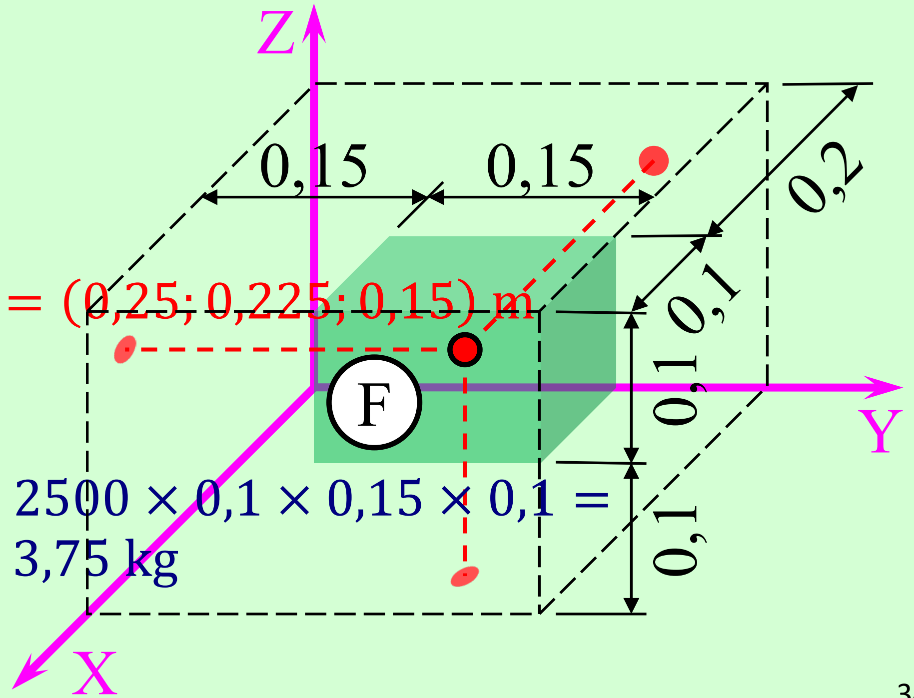
A continuación se va a obtener la masa, y las coordenadas del centro de masas, de cada ortoedro.





$\vec{r}_{C_E} = (0{,}15;\, 0{,}15;\, 0{,}1)$ m

$m_E = 2500 \times 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}2 =$
$= 45$ kg



$\vec{r}_{C_F} = (0{,}25;\, 0{,}225;\, 0{,}15)$ m

$m_F = 2500 \times 0{,}1 \times 0{,}15 \times 0{,}1 =$
$= 3{,}75$ kg

Cotas en m

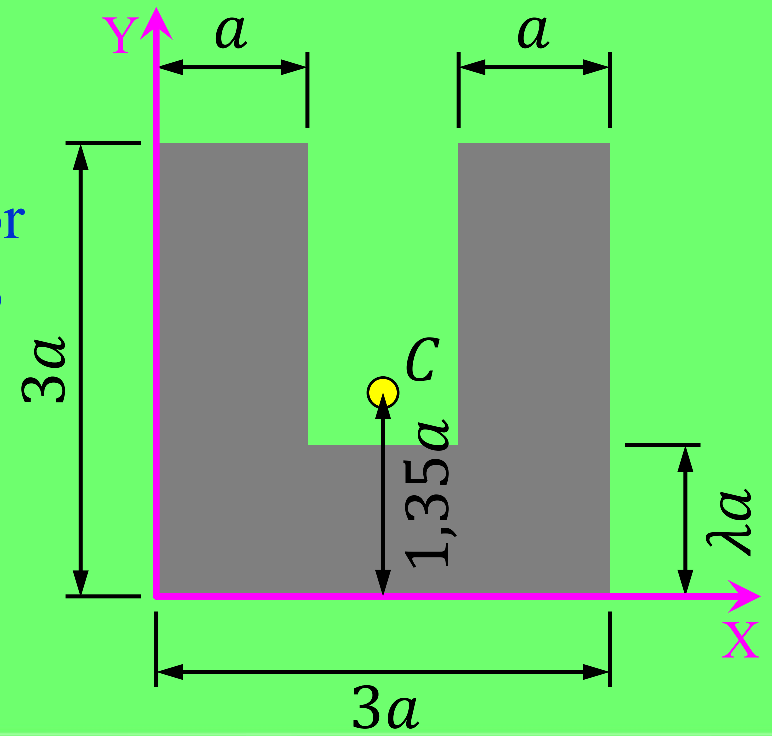
$$\vec{r}_C = \frac{m_E \vec{r}_{C_E} - m_F \vec{r}_{C_F}}{m} =$$

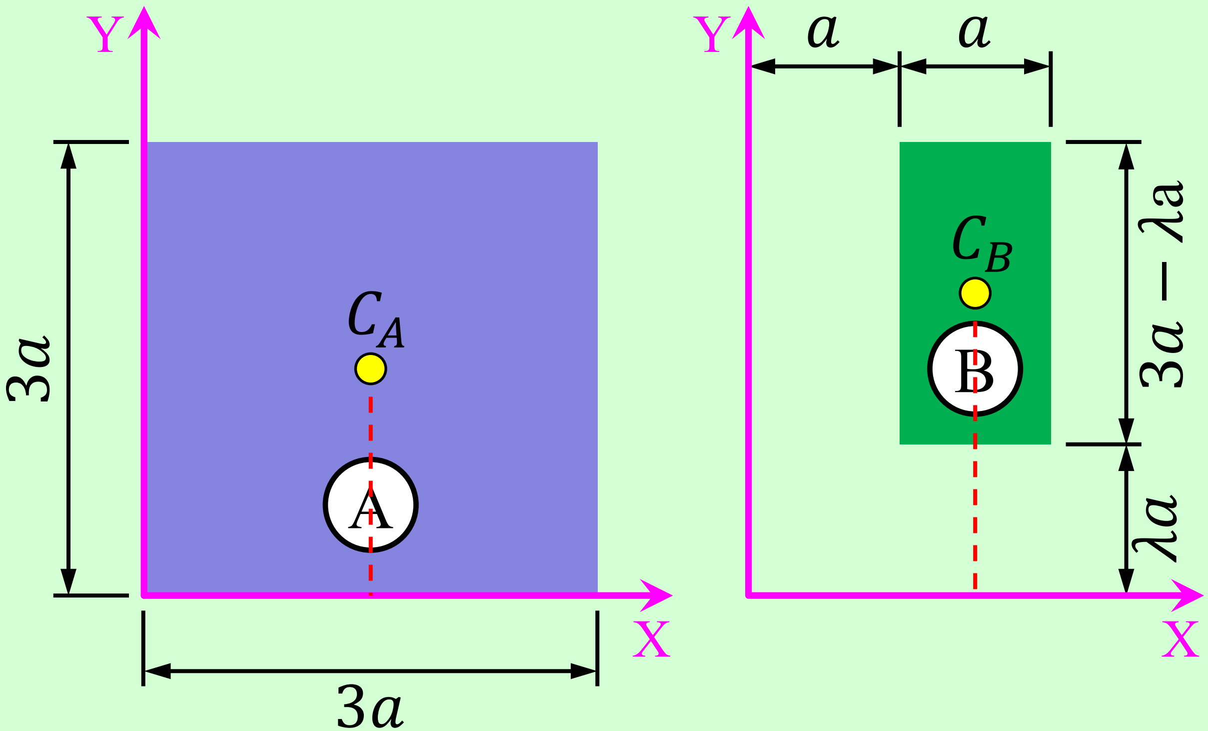
$$= \frac{45(0{,}15;\, 0{,}15;\, 0{,}1) - 3{,}75(0{,}25;\, 0{,}225;\, 0{,}15)}{45 - 3{,}75} =$$

$$= (0{,}1409;\, 0{,}1432;\, 0{,}0955)\ \mathrm{m}$$

Ejercicio 3

Sea la placa homogénea y plana de la figura. ¿Qué valor ha de tener el factor λ para que la coordenada Y del centro de masas sea $y_C = 1{,}35a$?





La forma más sencilla de descomponer la placa es considerando el cuadrado A y quitando el rectángulo B, como se muestra en la figura.

Por tratarse de una placa homogénea, la densidad superficial σ es la misma en todos los puntos.

La masa y coordenada Y del centro de masas de cada parte son:

$$m_A = \sigma S_A = \sigma(3a)(3a) = 9\sigma a^2 \qquad y_{C_A} = 1{,}5a$$

$$m_B = \sigma S_B = \sigma(a)(3a - \lambda a) = \sigma a^2(3 - \lambda) \qquad y_{C_B} = \lambda a + (3a - \lambda a)/2 = (0{,}5\lambda + 1{,}5)a$$

Por tanto,

$$y_C = \frac{m_A y_{C_A} - m_B y_{C_B}}{m} =$$

$$= \frac{[9\sigma a^2][1{,}5a] - [\sigma a^2(3-\lambda)][(0{,}5\lambda + 1{,}5)a]}{[9\sigma a^2] - [\sigma a^2(3-\lambda)]} =$$

$$= \frac{\sigma a^3[13{,}5 - (3-\lambda)(0{,}5\lambda + 1{,}5)]}{\sigma a^2[9 - (3-\lambda)]} =$$

$$= \frac{13{,}5 - (1{,}5\lambda + 4{,}5 - 0{,}5\lambda^2 - 1{,}5\lambda)}{6+\lambda} a = \frac{9 + 0{,}5\lambda^2}{6+\lambda} a$$

Nótese que, en una distribución homogénea, la posición del centro de masas no depende de la densidad ni de la masa total.

Se quiere que sea $y_C = 1{,}35a$. Para ello,

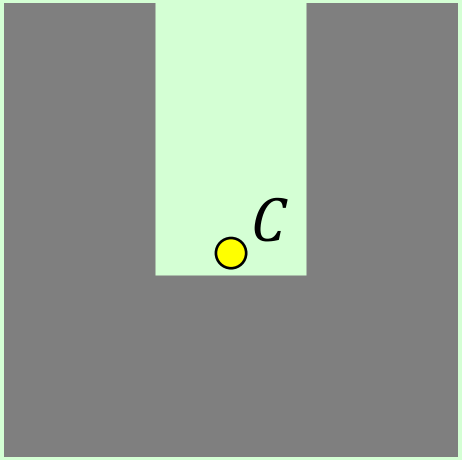
$$1{,}35a = \frac{9 + 0{,}5\lambda^2}{6 + \lambda}a \Rightarrow 1{,}35 = \frac{9 + 0{,}5\lambda^2}{6 + \lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 + 0{,}5\lambda^2 = 1{,}35(6 + \lambda) = 8{,}1 + 1{,}35\lambda \Rightarrow$$

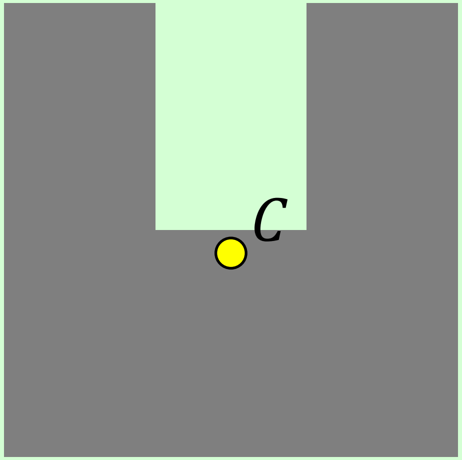
$$\Rightarrow 0{,}5\lambda^2 - 1{,}35\lambda + 0{,}9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1{,}2 \\ \lambda = 1{,}5 \end{cases}$$

Las representaciones gráficas que siguen muestran las soluciones.

$\lambda = 1{,}2$

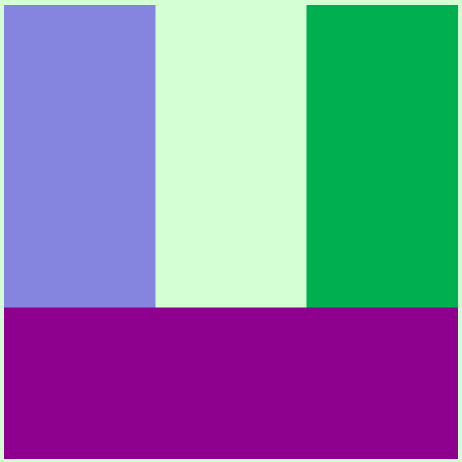


$\lambda = 1{,}5$

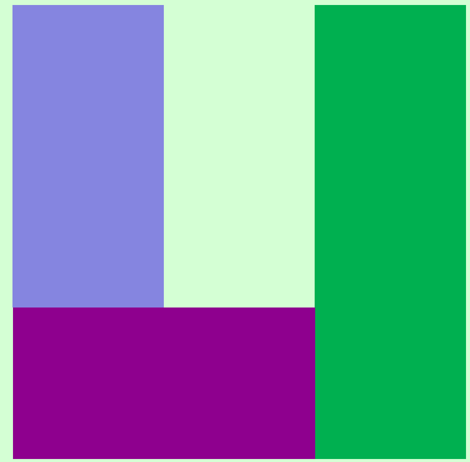


Tarea: Resuélvase el ejercicio utilizando las descomposiciones siguientes.

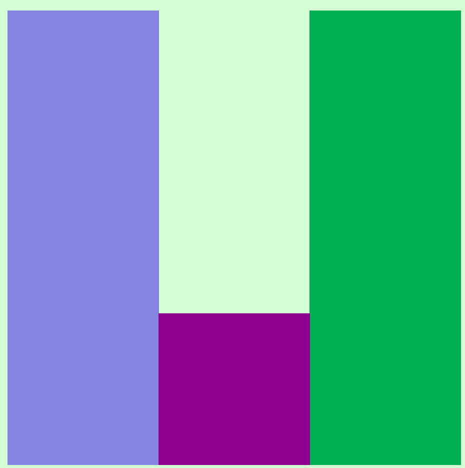
a)



b)



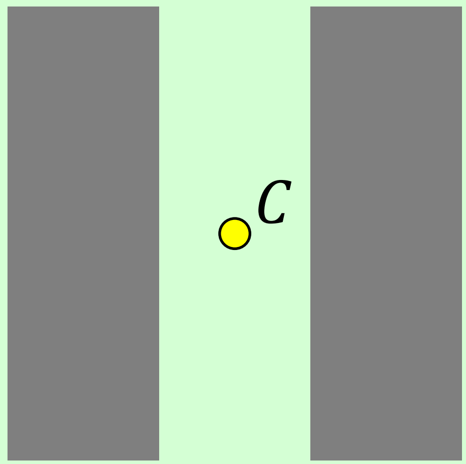
c)



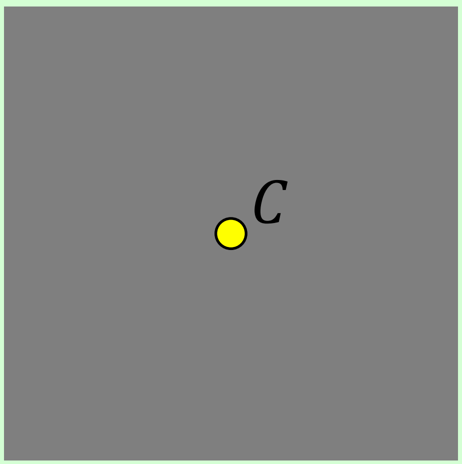
Tarea: Resuélvase el ejercicio para conseguir que sea $y_C = 1{,}5a$, y compruébese que en tal caso también hay dos soluciones, $\lambda = 0$ y $\lambda = 3$.

Las representaciones gráficas que siguen muestran las soluciones.

$\lambda = 0$

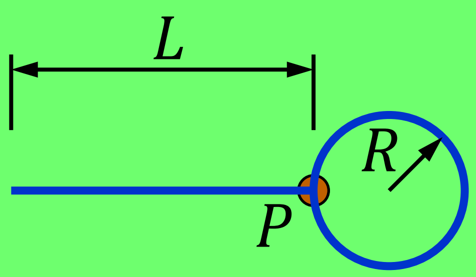


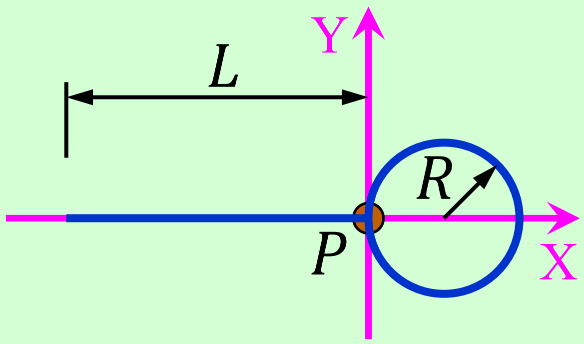
$\lambda = 3$



Ejercicio 4

¿Qué longitud L debe tener la parte recta de la varilla homogénea doblada de la figura, si se quiere que el centro de masas de dicha varilla se encuentre en el punto P?





Sea el sistema de referencia indicado en la figura de la izquierda.

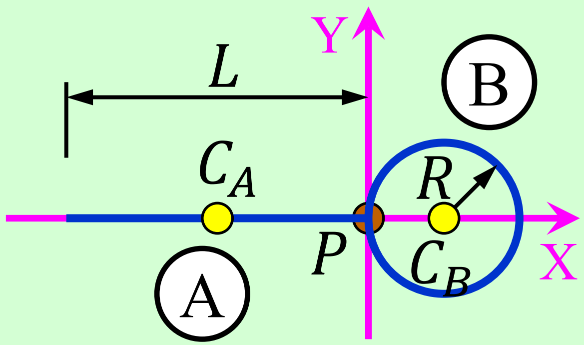
El objetivo es que el centro de masas de la varilla se encuentre en el punto $(0; 0)$.

Dado que el eje X es de simetría, es $y_C = 0$. Por tanto, el valor de L se debe obtener de la condición de que ha de ser $x_C = 0$.

Por tratarse de una varilla homogénea, la densidad lineal λ es la misma en todos los puntos.

Vamos a descomponer la varilla en el segmento recto A y la circunferencia B.

La masa y la coordenada X del centro de masas de cada parte son:



$$m_A = \lambda l_A = \lambda L \ ; \qquad x_{C_A} = -L/2$$

$$m_B = \lambda l_B = \lambda 2\pi R \ ; \ x_{C_B} = R$$

Por tanto:

$$x_C = \frac{m_A x_{C_A} + m_B x_{C_B}}{m} \Rightarrow 0 = \frac{[\lambda L](-L/2) + [\lambda 2\pi R](R)}{\lambda L + \lambda 2\pi R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\lambda L](-L/2) + [\lambda 2\pi R](R) = 0 \ \Rightarrow -L^2/2 + 2\pi R^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L^2/2 = 2\pi R^2 \Rightarrow L^2 = 4\pi R^2 \ \Rightarrow L = 2R\sqrt{\pi}$$

Obtención por integración

Hasta este punto, todos los ejemplos que hemos desarrollado corresponden a una de las tipologías que se indican a continuación.

- Cuerpos cuyo centro de masas queda determinado por las simetrías existentes (ortoedros, esferas, rectángulos, círculos, circunferencias, …).
- Cuerpos constituidos por un número finito de partes de masas y centros de masas conocidos.

Obtención por integración

Para el resto de casos, el procedimiento general es el de descomponer el cuerpo en un número infinito de elementos diferenciales de masa dm, y de centros de masas $\vec{r}$ conocidos. En tal caso, el término $m_i\vec{r}_i$ pasa a ser $dm\,\vec{r}$, y el sumatorio se transforma en una integral.

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m} \quad \text{pasa a ser} \quad \boxed{\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r}\,dm}{m}}$$

De la igualdad de componentes de esta expresión vectorial, se deduce que:

$$x_C = \frac{\int x\,dm}{m} \qquad y_C = \frac{\int y\,dm}{m} \qquad z_C = \frac{\int z\,dm}{m}$$

Obtención por integración

Dada la amplia casuística, lo más conveniente es explorar este procedimiento aplicándolo a ejemplos concretos.

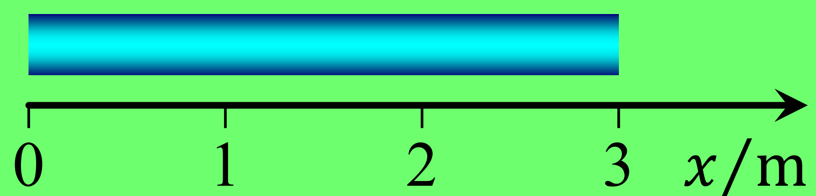
Es importante para ello, no solo saber realizar integrales definidas, sino entender el propio concepto. Para ello, puede ser recomendable el visionado del siguiente vídeo.

https://media.upv.es/player/?id=8f346970-f2c4-11ea-9fbd-f90680954ff3

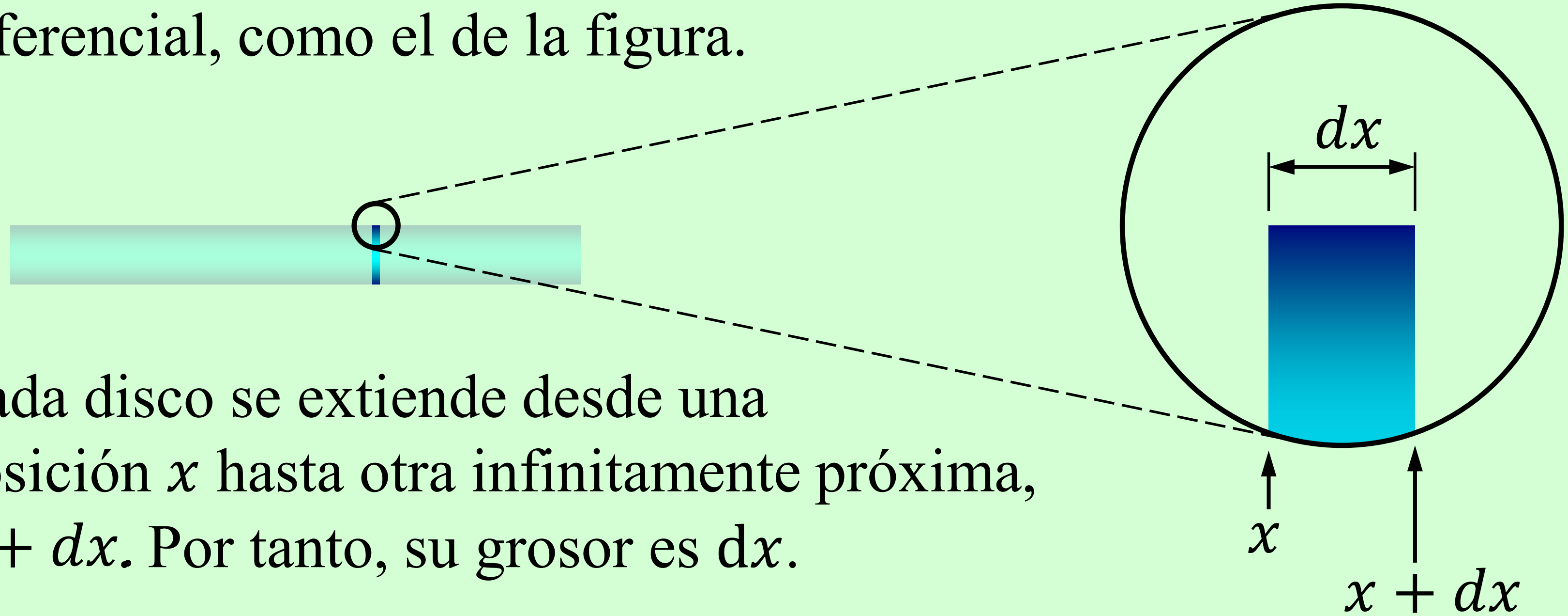
Duración: 57 minutos. Aconsejable verlo por partes.

Ejercicio 5

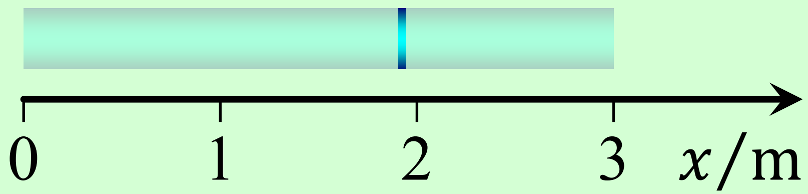
Una varilla de longitud $L = 3$ m tiene una densidad lineal de valor $\lambda = 2 + x^2/3$ (SI). ¿Cuáles son su masa y la coordenada X de su centro de masas?



En este caso la densidad lineal no es constante, sino función de x. Consideremos la varilla descompuesta en infinitos discos de grosor diferencial, como el de la figura.



Cada disco se extiende desde una posición x hasta otra infinitamente próxima, $x + dx$. Por tanto, su grosor es dx.



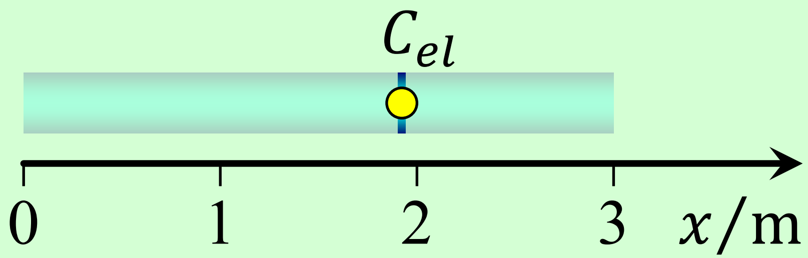
Puesto que el valor de x solo varía infinitesimalmente en uno de estos discos, su densidad lineal es constante en él. Por tanto, la masa de un disco es

$$dm = \lambda\, dx = (2 + x^2/3)\, dx$$

La masa de la varilla, suma de las masas de todos los discos (esto es, la integral), cuyas posiciones son $x \in [0; 3]$ m, es

$$m = \int_0^3 (2 + x^2/3) dx = \left[2x + \frac{x^3}{9}\right]_0^3 =$$

$$= \left(2 \times 3 + \frac{3^3}{9}\right) - \left(2 \times 0 + \frac{0^3}{9}\right) = 9 - 0 = 9 \text{ kg}$$



La coordenada X del centro de masas de cada elemento diferencial es precisamente x.

Esa coordenada ponderada con la masa del elemento es

$$x\,dm = x[(2 + x^2/3)\,dx] = (2x + x^3/3)\,dx$$

El resultado de la integración de estos valores para toda la varilla es

$$\int x\,dm = \int_0^3 (2x + x^3/3)dx = \left[x^2 + \frac{x^4}{12}\right]_0^3 =$$

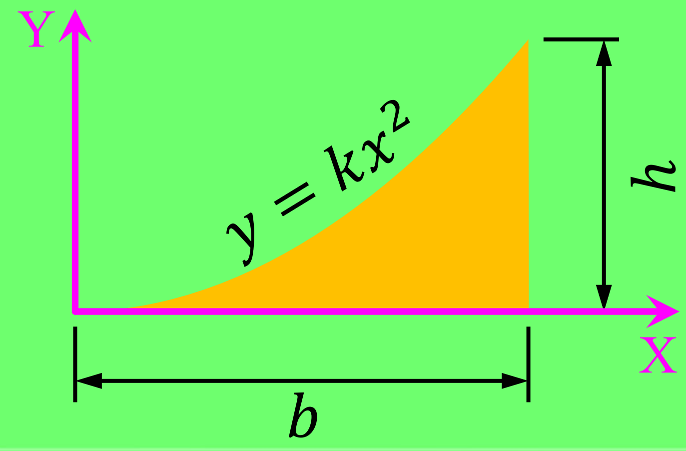
$$= \left(3^2 + \frac{3^4}{12}\right) - \left(0^2 + \frac{0^4}{12}\right) = 15{,}75 - 0 = 15{,}75\ \mathrm{kg\cdot m}$$

Por tanto,

$$x_C = \frac{\int x\,dm}{m} = \frac{15{,}75}{9} = 1{,}75\ \mathrm{m}$$

Ejercicio 6

Obténgase la posición del centro de masas de la figura homogénea y plana de la figura.



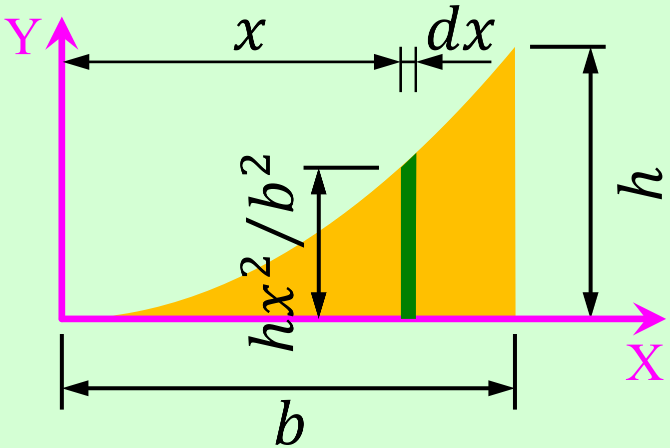
En primer lugar, vamos a relacionar la constante k del borde parabólico con las dimensiones b y h de los otros dos lados.

Puesto que la parábola ha de pasar por el punto de coordenadas $(b; h)$, es

$$h = kb^2 \Rightarrow k = h/b^2 \Rightarrow y = hx^2/b^2$$

No tenemos forma de descomponer la figura en un número finito de partes cuyas masas y centros de masas conozcamos.

Por este motivo, se va a descomponer la figura en infinitas partes de masa infinitesimal y centro de masas conocido. En este caso, se va a hacer en rectángulos, como se muestra a continuación.



Sea el elemento de color verde de la figura, cuya área es infinitesimal. El elemento se extiende desde una posición x hasta otra infinitamente próxima, $x + dx$. Por tanto, su anchura es dx.

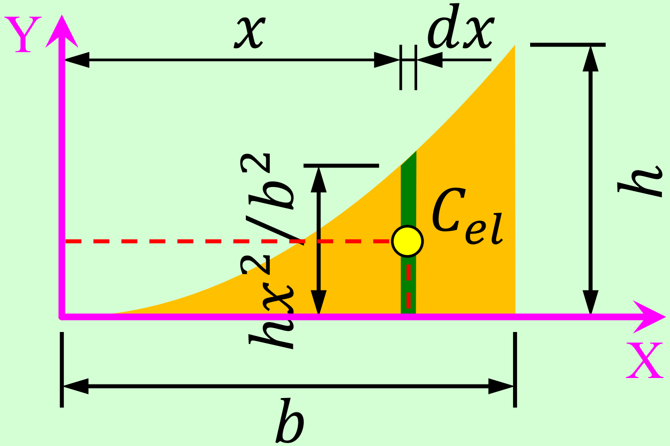
Puesto que el valor de x solo varía infinitesimalmente en uno de estos elementos, su altura se puede considerar constante, de valor hx^2/b^2.

Por tanto, se puede considerar que el elemento es un rectángulo, y su área dS es

$$dS = \frac{hx^2}{b^2}dx$$

Por tratarse de una figura homogénea, la densidad superficial σ es la misma en todos los puntos. Por tanto, la masa dm del elemento es

$$dm = \sigma dS = \frac{\sigma hx^2}{b^2}dx$$



La masa de la figura, suma de las masas de todos los rectángulos (esto es, la integral), cuyas posiciones son $x \in [0; b]$, es

$$m = \int_0^b \frac{\sigma h x^2}{b^2} dx = \frac{\sigma h}{b^2} \int_0^b x^2 dx = \frac{\sigma h}{b^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{\sigma h}{b^2} \left(\frac{b^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{\sigma h}{b^2} \frac{b^3}{3} = \frac{\sigma b h}{3}$$

Dado que se puede considerar que el elemento es un rectángulo homogéneo, las coordenadas de su centro de masas son

$$\vec{r}_{C_{el}} = \left(x; \frac{hx^2/b^2}{2}\right) = \left(x; \frac{hx^2}{2b^2}\right)$$

Esta posición, ponderada con la masa del elemento, nos da

$$\vec{r}_{C_{el}} dm = \left(x; \frac{hx^2}{2b^2} \right) \left[\frac{\sigma h x^2}{b^2} dx \right] = \left(\frac{\sigma h x^3}{b^2}; \frac{\sigma h^2 x^4}{2b^4} \right) dx$$

El resultado de la integración de estos valores para toda la figura (el equivalente de la suma $\sum m_i \vec{r}_i$ utilizada cuando la descomposición se realiza en un número finito de elementos) es

$$\int \vec{r}_{C_{el}} dm = \int_0^b \left(\frac{\sigma h x^3}{b^2}; \frac{\sigma h^2 x^4}{2b^4} \right) dx = \left[\left(\frac{\sigma h x^4}{4b^2}; \frac{\sigma h^2 x^5}{10b^4} \right) \right]_0^b =$$

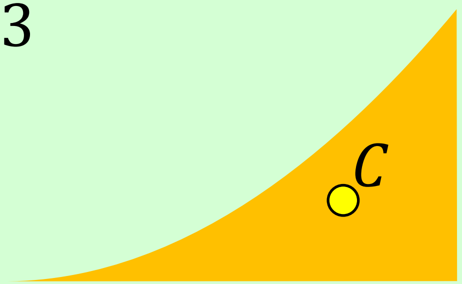
$$= \left(\frac{\sigma h b^4}{4b^2}; \frac{\sigma h^2 b^5}{10b^4} \right) - \left(\frac{\sigma h 0^4}{4b^2}; \frac{\sigma h^2 0^5}{10b^4} \right) =$$

$$= \left[\left(\frac{\sigma h b^2}{4}; \frac{\sigma h^2 b}{10} \right) - (0; 0) \right]_0^b = \left(\frac{\sigma h b^2}{4}; \frac{\sigma h^2 b}{10} \right)$$

Por tanto, la posición del centro de masas de la figura es

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r}_{C_{el}} dm}{m} = \frac{(\sigma h b^2/4\,;\sigma h^2 b/10)}{\sigma b h/3} = \frac{(b/4\,;h/10)}{1/3} =$$

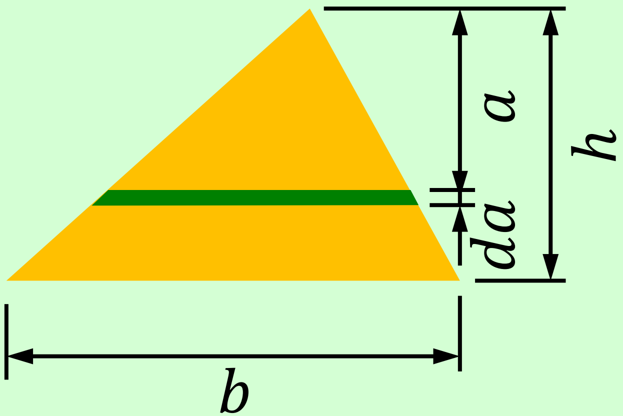
$$= (3b/4\,;3h/10)$$



Ejercicio 7

Obténgase la altura, respecto a la base, a la que se encuentra el centro de masas de un triángulo homogéneo.

Una vez más, no tenemos forma de descomponer la figura en un número finito de partes cuyas masas y centros de masas conozcamos. Por este motivo, se va a descomponer el triángulo en infinitas partes de masa infinitesimal y centro de masas conocido. En este caso, se va a hacer en rectángulos, como se muestra a continuación.



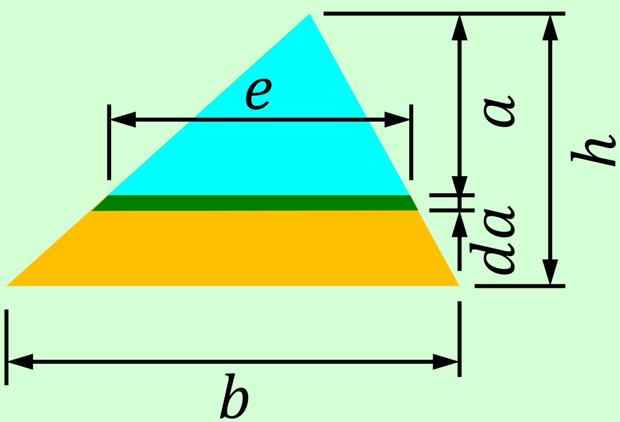
Sea el elemento de color verde de la figura, cuya área es infinitesimal. El elemento se extiende desde una distancia a al vértice superior, hasta otra infinitamente próxima, $a + da$. Por tanto, su altura es da.

Puesto que el valor de a solo varía infinitesimalmente en uno de estos elementos, su anchura se puede considerar constante, de valor e.

Por tanto, se puede considerar que el elemento es un rectángulo, y su área $dS = e\, da$.

Para un triángulo concreto de dimensiones a y b, el valor de e viene determinado por la distancia a. Esta relación puede obtenerse por semejanza de nuestro triángulo con el mostrado en azul. Así,

$$\frac{e}{b} = \frac{a}{h} \Rightarrow e = \frac{ba}{h} \Rightarrow dS = \frac{ba}{h} da$$



Por tratarse de una figura homogénea, la densidad superficial σ es la misma en todos los puntos. Por tanto, la masa dm del elemento es

$$dm = \sigma dS = \frac{\sigma ba}{h} da$$

La masa total del triángulo, de área $S = bh/2$, es $m = \sigma S = \sigma bh/2$.

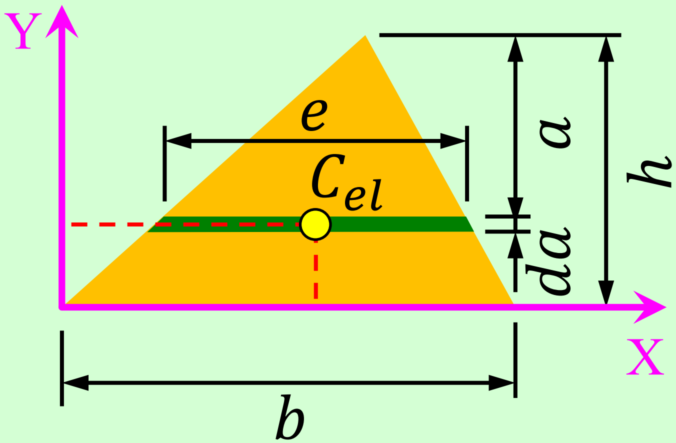
Tarea: La masa del triángulo, suma de las masas de todos los rectángulos (esto es, la integral), cuyas posiciones son $a \in [0; h]$, se puede obtener integrando $dm = (\sigma ba/h)da$ en ese intervalo. Compruébese que se obtiene el mismo resultado.

Sea el sistema de referencia de la figura.

Dado que se puede considerar que el elemento es un rectángulo homogéneo, la coordenada Y de su centro de masas es

$$y_{C_{el}} = h - a$$

Esta posición, ponderada con la masa del elemento, nos da



$$y_{C_{el}} dm = (h - a)\left[\frac{\sigma ba}{h} da\right] =$$

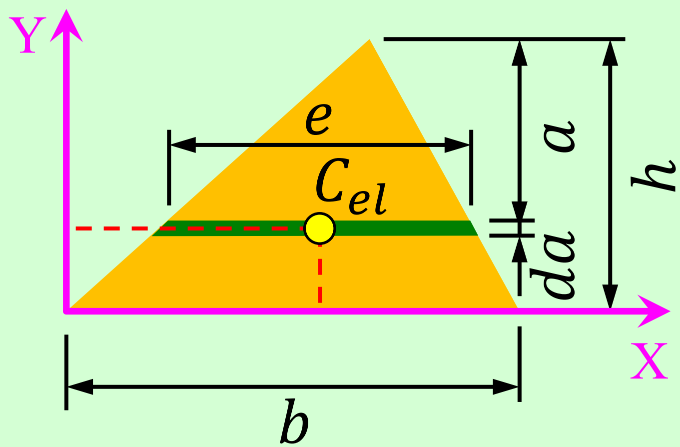
$$= \sigma b \left(a - \frac{a^2}{h}\right) da$$

El resultado de la integración de estos valores para todos los elementos que constituyen el triángulo, y cuyas posiciones son $a \in [0; h]$, es

$$\int y_{C_{el}} dm = \int_0^h \sigma b \left(a - \frac{a^2}{h}\right) da = \sigma b \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3h}\right]_0^h =$$

$$= \sigma b \left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3h}\right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3h}\right) = \sigma b \left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{3}\right) - 0 =$$

$$= \sigma b h^2 \left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right) = \frac{\sigma b h^2}{6}$$

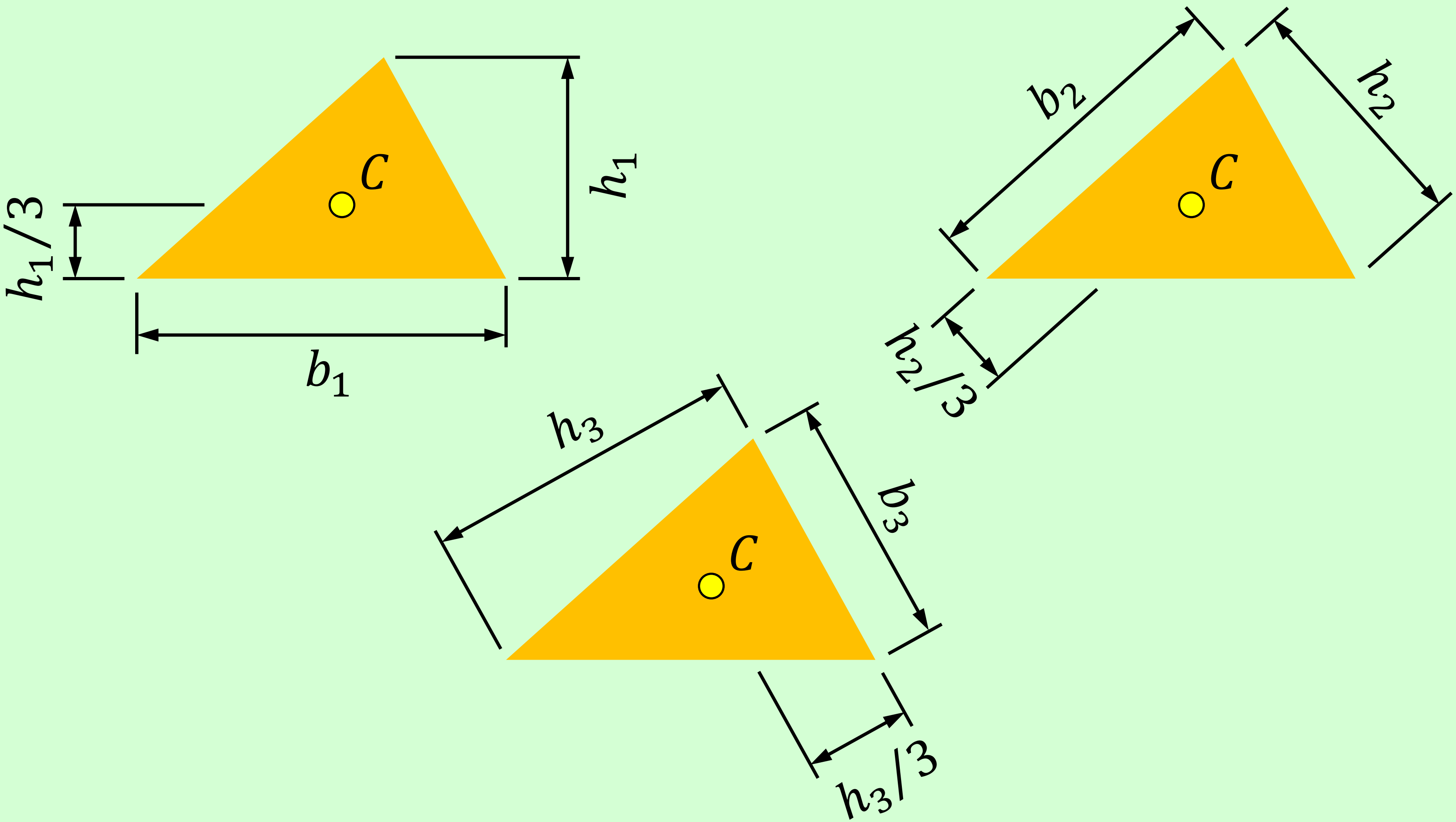


Por tanto,

$$y_C = \frac{\int y_{C_{el}} dm}{m} = \frac{\sigma b h^2/6}{\sigma b h/2} = h/3$$

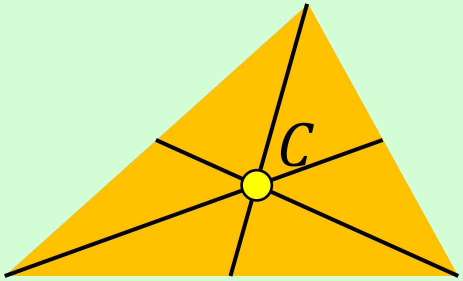
Conviene destacar algunos detalles.

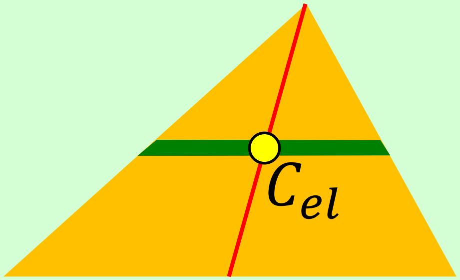
- Cualquiera de los lados de un triángulo puede ser tomado como base, y la distancia al otro vértice como altura.



Conviene destacar algunos detalles.

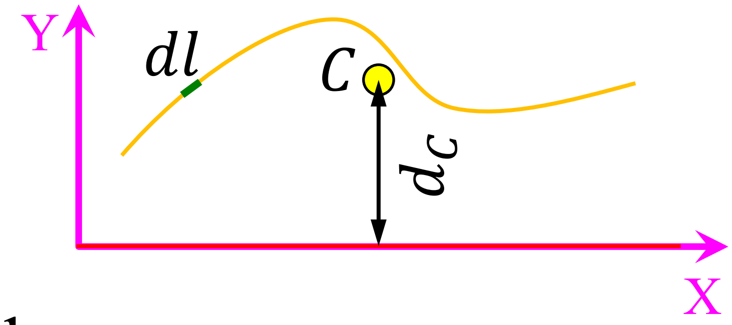
- El centro de masas está en el punto de intersección de las medianas (segmentos rectos que unen un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto).





Esto se debe a que todos los elementos considerados tienen su centro de masas sobre la mediana roja. Por tanto, su posición media ponderada, el centro de masas del triángulo, también ha de estar sobre ella. Y lo mismo se aplica a las otras dos medianas.

Primer teorema de Guldin



Sea una curva plana homogénea de longitud L.

Sea una línea recta externa (esto es, que no interseca con la curva) situada en el mismo plano.

Sea d_C la distancia a la recta del centro de masas de la curva.

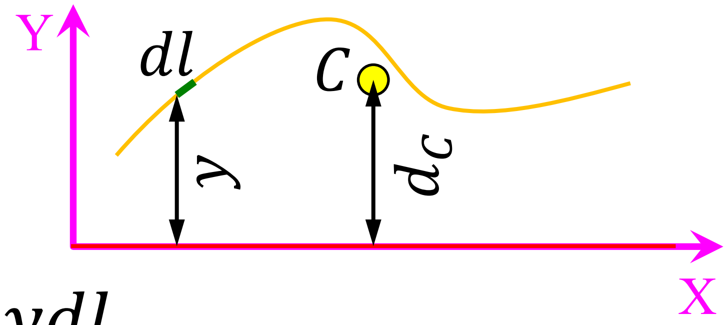
Sea el sistema de referencia de la figura, con el eje X situado sobre la recta.

Consideremos un segmento, de longitud dl, de la curva.

Por tratarse de una curva homogénea, la densidad lineal λ es la misma en todos los puntos. Por tanto, la masa de la curva es $m = \lambda L$, y la del elemento es $dm = \lambda dl$.

Primer teorema de Guldin

En consecuencia, la distancia del centro de masas a la recta es



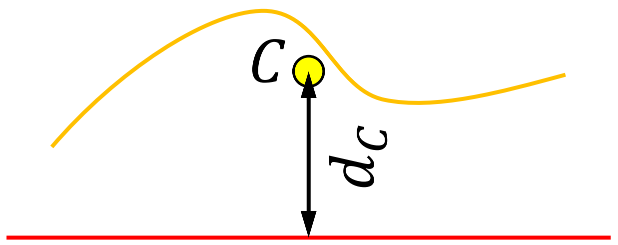
$$d_C = y_C = \frac{\int y dm}{m} = \frac{\int y \lambda dl}{\lambda L} = \frac{\int y dl}{L}$$

De aquí se obtiene la relación que sigue, y que se utilizará más adelante.

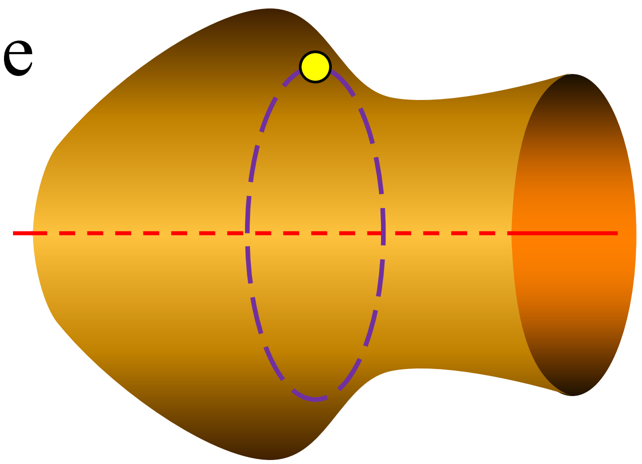
$$\int y dl = d_C L$$

Primer teorema de Guldin

Consideremos la recta como un eje, alrededor del cual gira la curva.



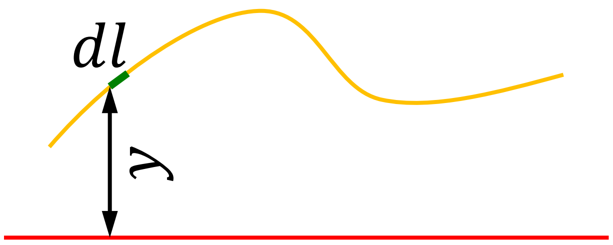
De este modo, se genera una superficie de revolución, de área S.



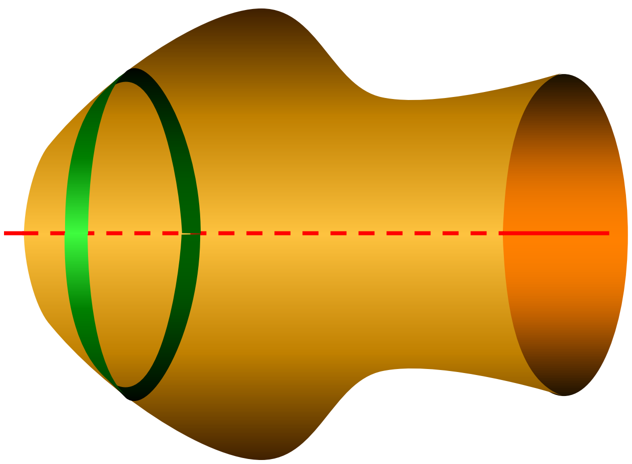
Simultáneamente, el centro de masas de la curva recorre una circunferencia de longitud $2\pi d_C$.

Primer teorema de Guldin

Consideremos de nuevo un segmento, de longitud dl, de la curva, situado a una distancia y del eje de giro.



El área de la superficie de revolución generada por dicho segmento es $dS = 2\pi y dl$.



El área de la superficie de revolución generada por la curva, es la suma de las generadas por los infinitos segmentos, esto es,

$$S = \int 2\pi y dl = 2\pi \int y dl = 2\pi d_C L = (2\pi d_C)L$$

Primer teorema de Guldin

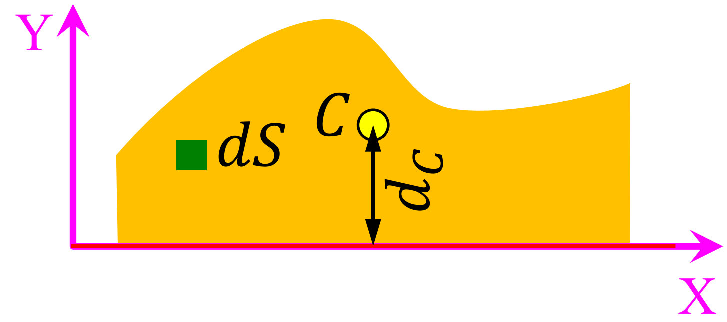
Primer teorema de Guldin:

El área S de una superficie de revolución generada mediante la rotación de una curva plana homogénea alrededor de un eje externo, situado en el mismo plano, es igual a la longitud L de la curva, multiplicada por la distancia $2\pi d_C$ recorrida por el centro de masas de dicha curva en una rotación completa.

$$S = 2\pi d_C L$$

Esta relación también es conocida como primer teorema de Pappus, y como primer teorema de Pappus-Guldin.

Segundo teorema de Guldin



Sea una superficie plana homogénea de área S.

Sea una línea recta externa (esto es, que no interseca con la superficie) situada en el mismo plano.

Sea d_C la distancia a la recta del centro de masas de la superficie.

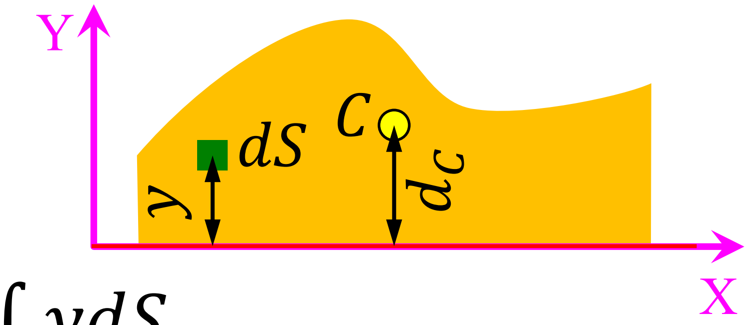
Sea el sistema de referencia de la figura, con el eje X situado sobre la recta.

Consideremos un trozo, de área dS, de la superficie.

Por tratarse de una superficie homogénea, la densidad superficial σ es la misma en todos los puntos. Por tanto, la masa de la superficie es $m = \sigma S$, y la del trozo es $dm = \sigma dS$.

Segundo teorema de Guldin

En consecuencia, la distancia del centro de masas a la recta es



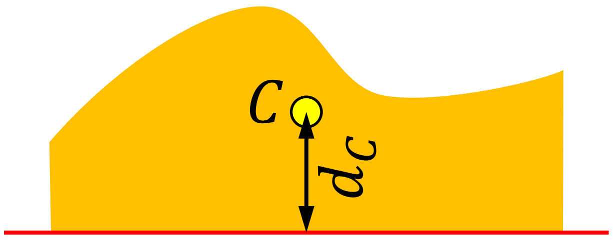
$$d_C = y_C = \frac{\int y dm}{m} = \frac{\int y \sigma dS}{\sigma S} = \frac{\int y dS}{S}$$

De aquí se obtiene la relación que sigue, y que se utilizará más adelante.

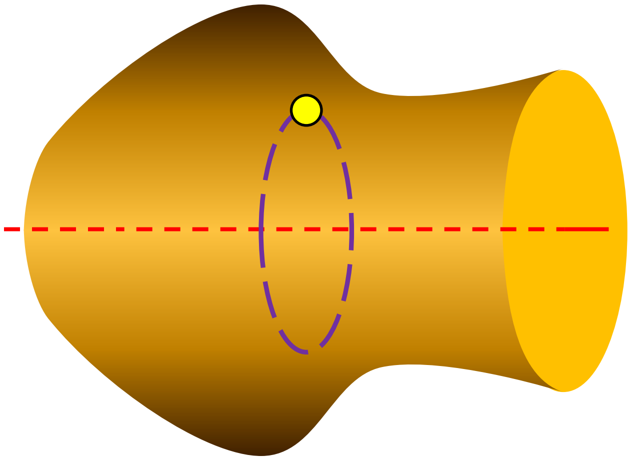
$$\int y dS = d_C S$$

Segundo teorema de Guldin

Consideremos la recta como un eje, alrededor del cual gira la superficie.



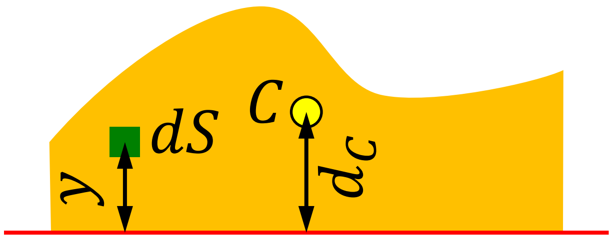
De este modo, se genera un sólido de revolución, de volumen V.



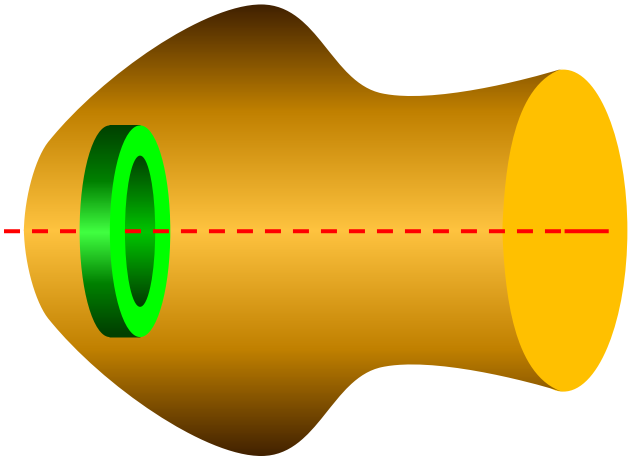
Simultáneamente, el centro de masas de la superficie recorre una circunferencia de longitud $2\pi d_C$.

Segundo teorema de Guldin

Consideremos de nuevo un trozo, de área dS, de la superficie, situado a una distancia y del eje de giro.



El volumen del sólido de revolución generado por dicho trozo es $dV = 2\pi y dS$.



El volumen del sólido de revolución generado por la superficie, es la suma de los generados por los infinitos trozos, esto es,

$$V = \int 2\pi y dS = 2\pi \int y dS = 2\pi d_C S = (2\pi d_C) S$$

Segundo teorema de Guldin

Segundo teorema de Guldin:

El volumen V de un sólido de revolución generado mediante la rotación de una superficie plana homogénea alrededor de un eje externo, situado en el mismo plano, es igual al área S de la superficie, multiplicada por la distancia $2\pi d_C$ recorrida por el centro de masas de dicha superficie en una rotación completa.

$$V = 2\pi d_C S$$

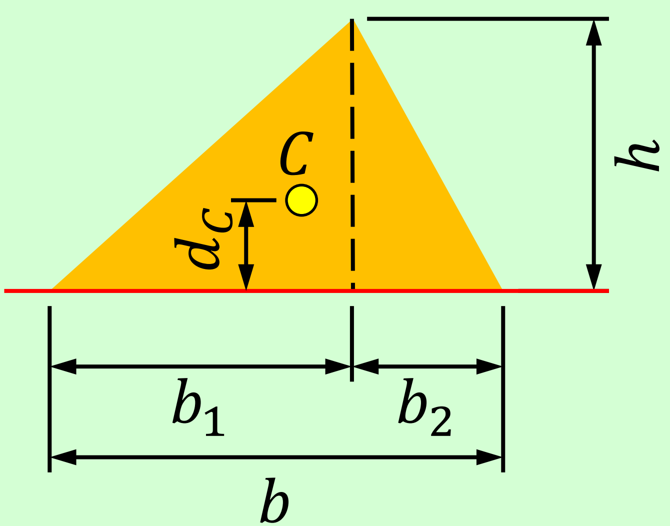
Esta relación también es conocida como segundo teorema de Pappus, y como segundo teorema de Pappus-Guldin.

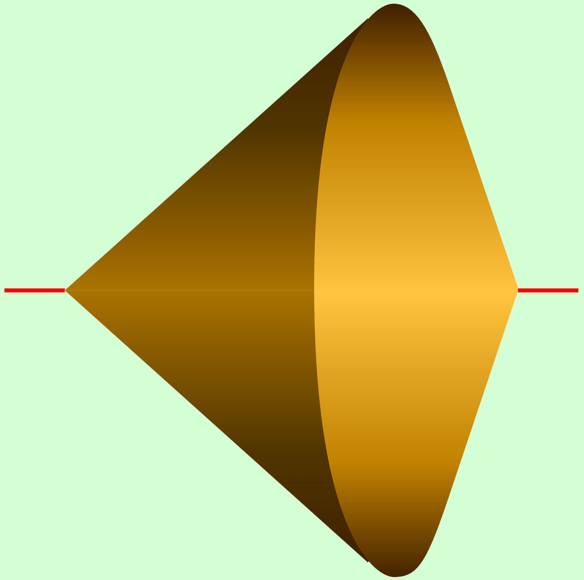
Ejercicio 8

Utilizando un teorema de Guldin, obténgase la altura, respecto a la base, a la que se encuentra el centro de masas de un triángulo homogéneo.

Sea el eje mostrado en rojo en la figura.

Si el triángulo gira alrededor de dicho eje, se genera un sólido de revolución: un doble cono cuyo radio común es h, y con alturas b_1 y b_2.



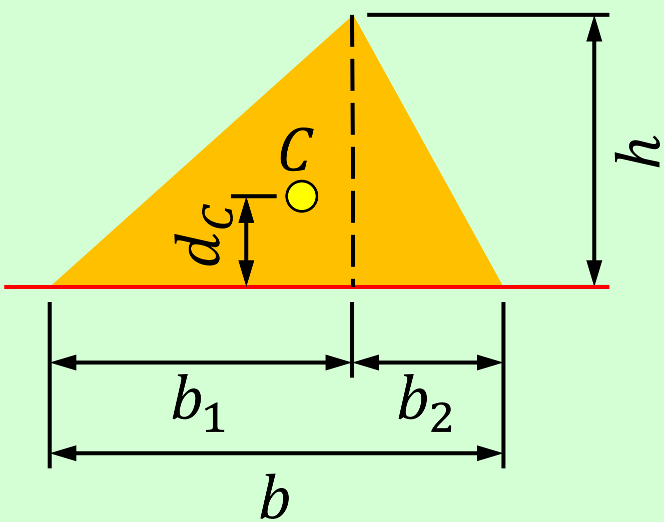


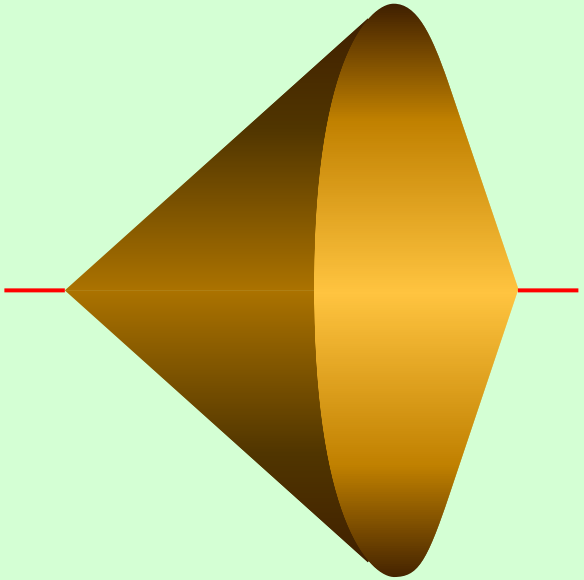
El área del triángulo es

$$S = \frac{bh}{2}$$

El volumen del sólido de revolución es la suma de los de los conos que lo constituyen.

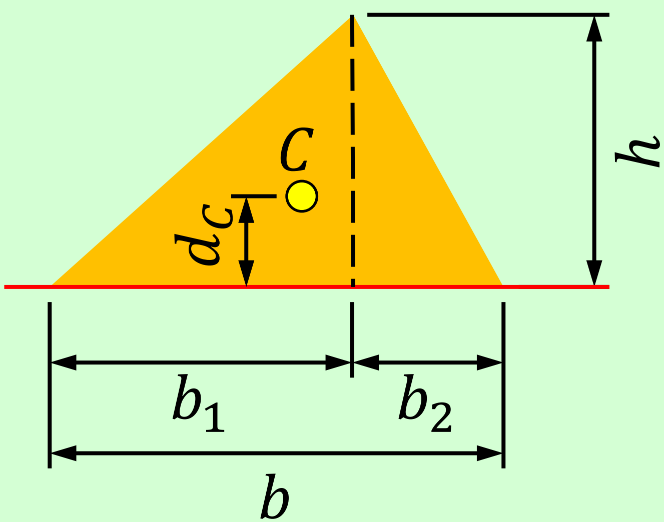
$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 b_1 + \frac{1}{3}\pi h^2 b_2 = \frac{1}{3}\pi h^2 (b_1 + b_2) = \frac{1}{3}\pi h^2 b$$

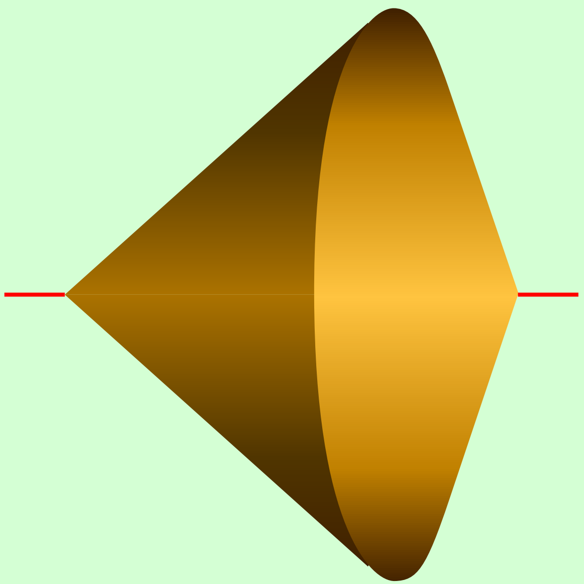




Aplicando el segundo teorema de Guldin, resulta

$$V = (2\pi d_C)S \Rightarrow d_C = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{1}{3}\pi h^2 b}{2\pi\frac{bh}{2}} = h/3$$





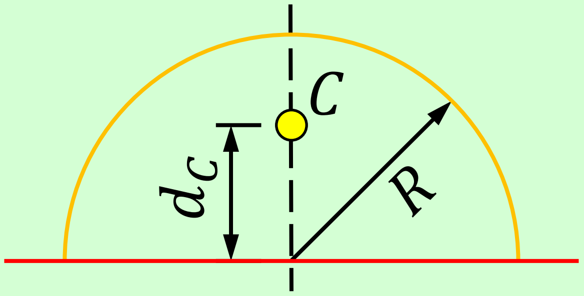
Ejercicio 9

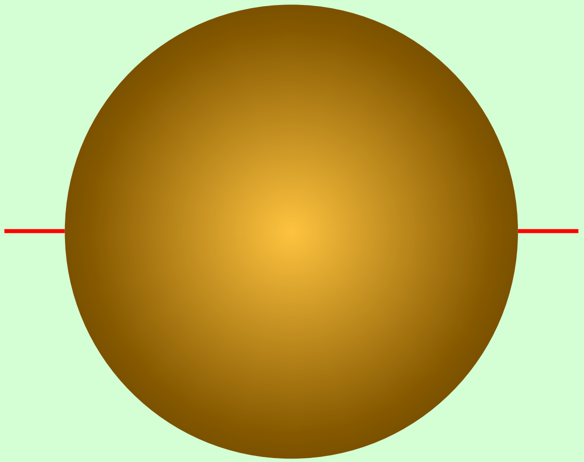
Utilizando un teorema de Guldin, obténgase la posición del centro de masas de una semicircunferencia homogénea.

La línea de trazos es un eje de simetría de la semicircunferencia. Por tanto, el centro de masas ha de estar situado sobre ella, faltando determinar el valor d_C que fija la posición exacta.

Sea el eje mostrado en rojo en la figura.

Si la semicircunferencia gira alrededor de dicho eje, se genera una superficie de revolución que es la de una esfera del mismo radio.





La longitud de la semicircunferencia es

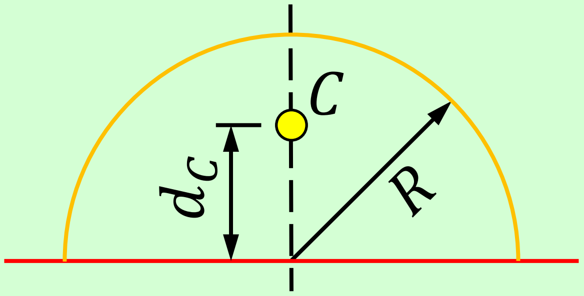
$$L = \pi R$$

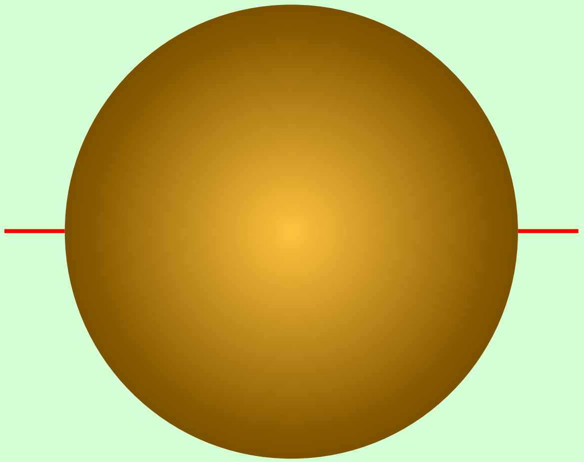
El área de la superficie de revolución es

$$S = 4\pi R^2$$

Aplicando el primer teorema de Guldin, resulta

$$S = (2\pi d_C)L \Rightarrow d_C = \frac{S}{2\pi L} = \frac{4\pi R^2}{2\pi\pi R} = \frac{2R}{\pi}$$





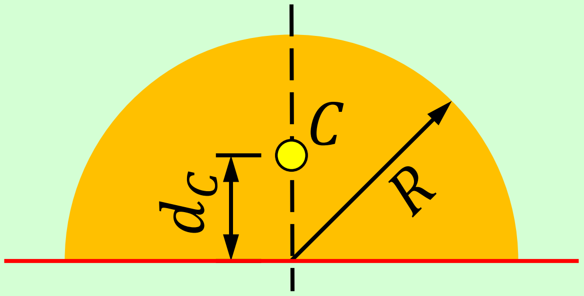
Ejercicio 10

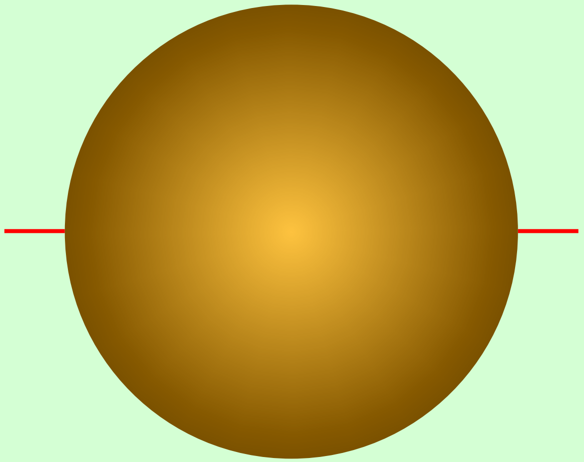
Utilizando un teorema de Guldin, obténgase la posición del centro de masas de un semicírculo homogéneo.

La línea de trazos es un eje de simetría del semicírculo. Por tanto, el centro de masas ha de estar situado sobre ella, faltando determinar el valor d_C que fija la posición exacta.

Sea el eje mostrado en rojo en la figura.

Si el semicírculo gira alrededor de dicho eje, se genera un sólido de revolución que es una esfera del mismo radio.





El área del semicírculo es

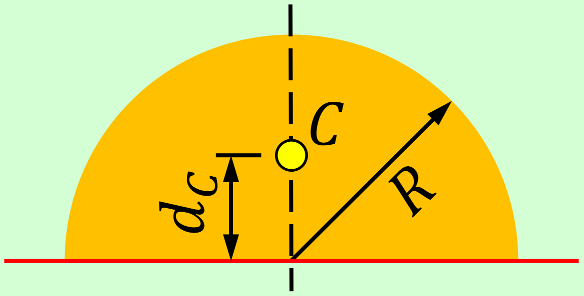
$$S = \frac{\pi R^2}{2}$$

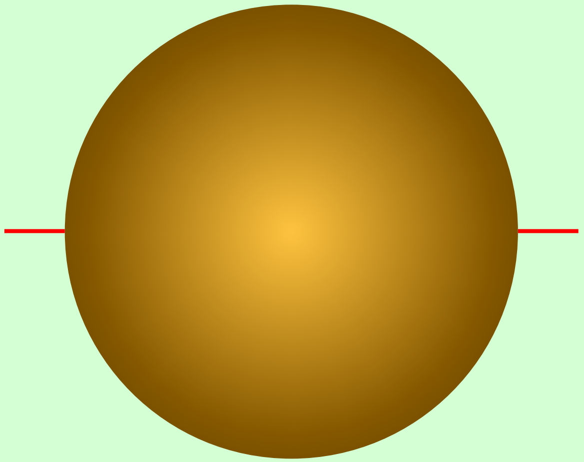
El volumen del sólido de revolución es

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Aplicando el segundo teorema de Guldin, resulta

$$V = (2\pi d_C)S \Rightarrow d_C = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi \frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$





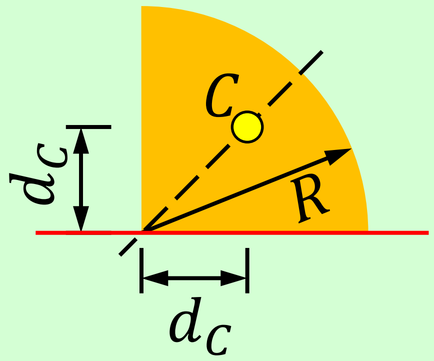
Ejercicio 11

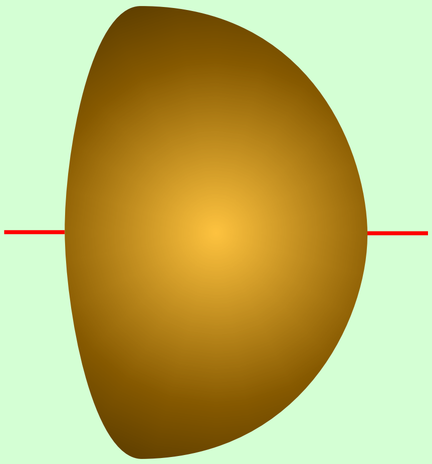
Utilizando un teorema de Guldin, obténgase la posición del centro de masas de un cuarto de círculo homogéneo.

La línea de trazos es un eje de simetría del cuarto de círculo. Por tanto, el centro de masas ha de estar situado sobre ella, faltando determinar el valor d_C que fija la posición exacta.

Sea el eje mostrado en rojo en la figura.

Si el cuarto de círculo gira alrededor de dicho eje, se genera un sólido de revolución que es una semiesfera del mismo radio.





El área del cuarto de círculo es

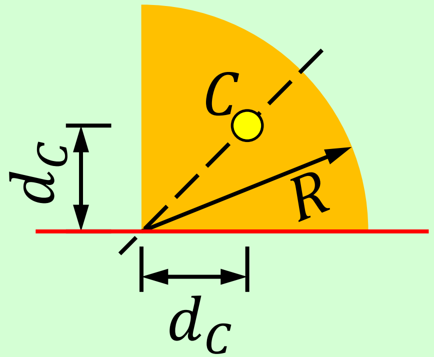
$$S = \frac{\pi R^2}{4}$$

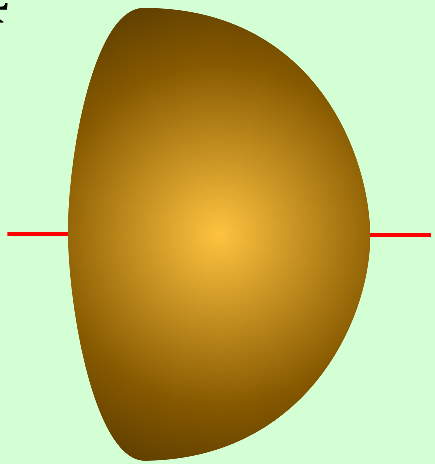
El volumen del sólido de revolución es

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3$$

Aplicando el segundo teorema de Guldin, resulta

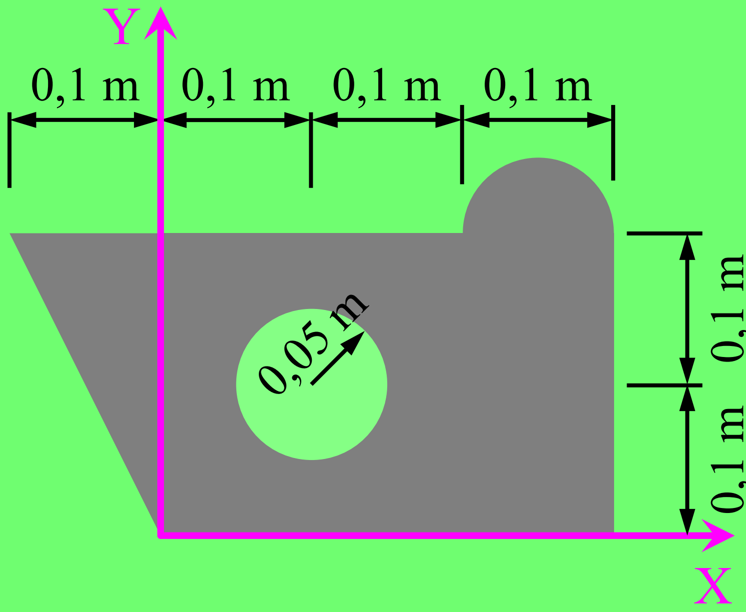
$$V = (2\pi d_C)S \Rightarrow d_C = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{2\pi \frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi}$$

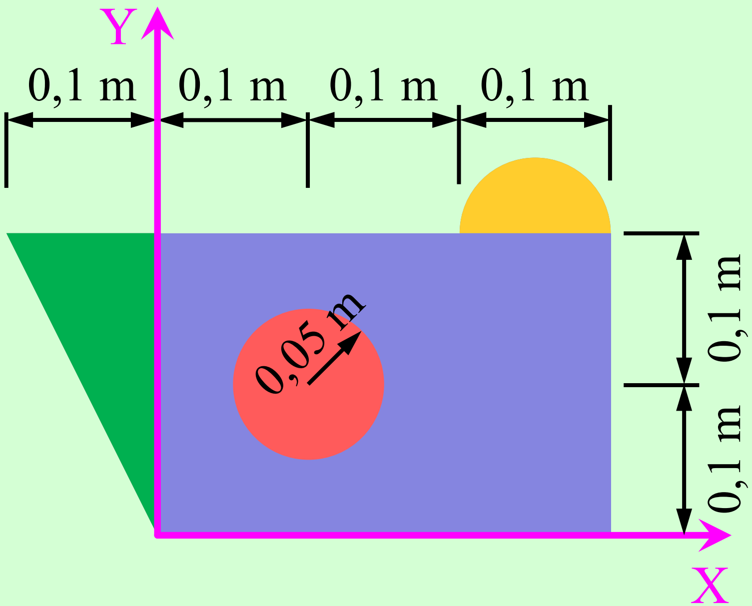


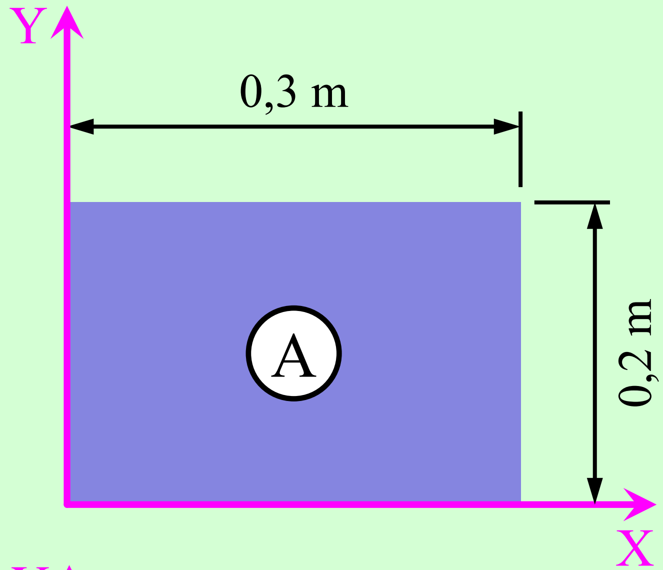


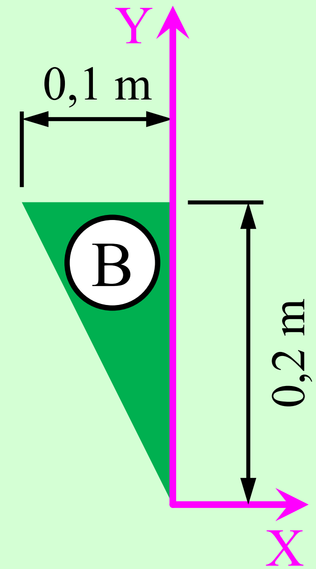
Ejercicio 12

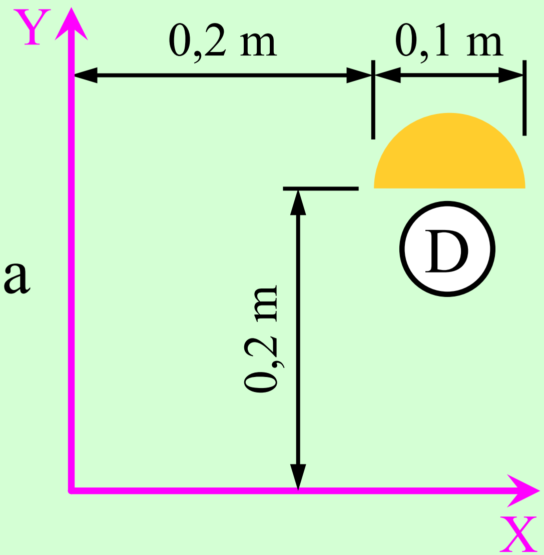
Una placa (densidad superficial $12\ \mathrm{kg/m^2}$) tiene la forma y dimensiones que se muestran en la figura. Determínese la posición de su centro de masas en el sistema de referencia indicado.

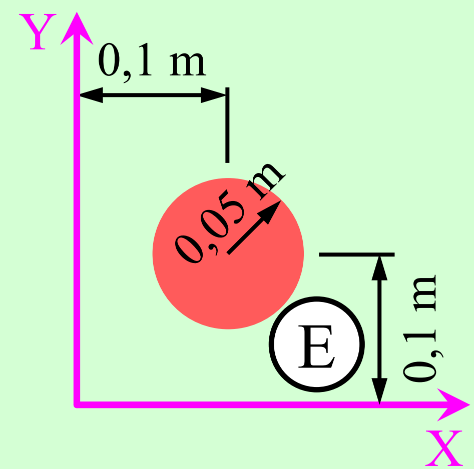








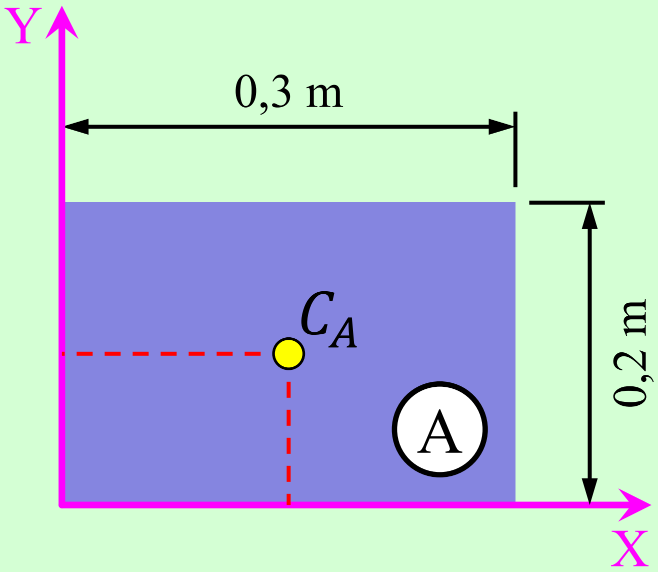




Vamos a descomponer la placa en:

- el rectángulo A;
- el triángulo B;
- el semicírculo D.

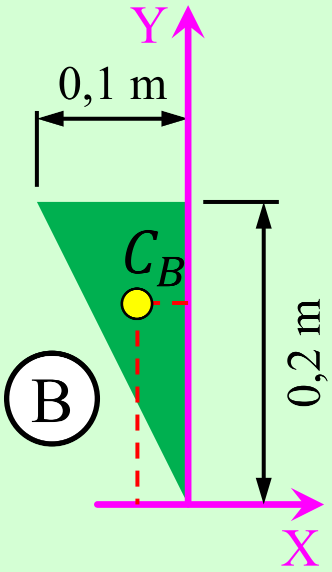
A ese conjunto le quitaremos el círculo E.



La masa y coordenadas del centro de masas de cada parte son:

$$m_A = \sigma S_A = 12 \times 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}72 \text{ kg}$$

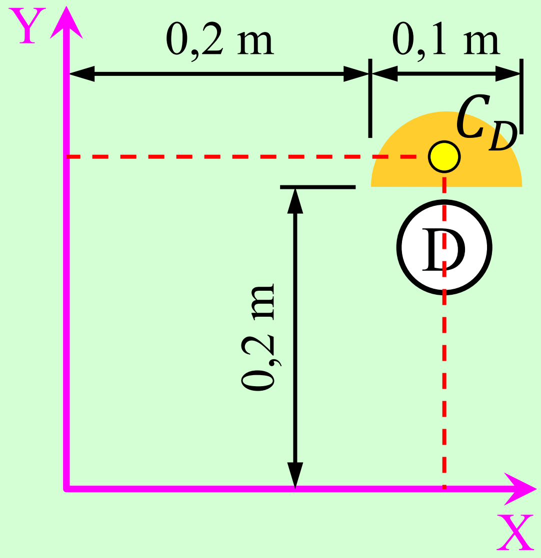
$$\vec{r}_{C_A} = (0{,}15; 0{,}1) \text{ m}$$



$$m_B = \sigma S_B = 12 \times \frac{0{,}1 \times 0{,}2}{2} = 0{,}12 \text{ kg}$$

$$\vec{r}_{C_B} = \left(-\frac{1}{3} 0{,}1; \frac{2}{3} 0{,}2\right) =$$

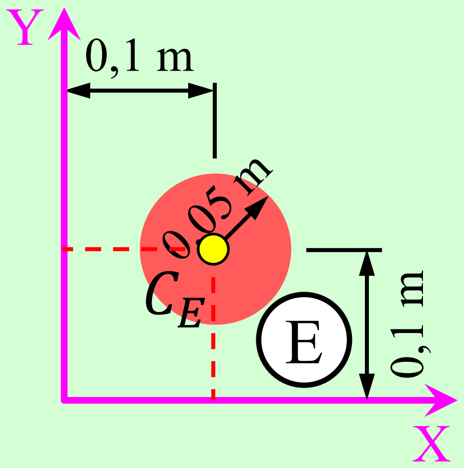
$$= (-0{,}03333; 0{,}1333) \text{ m}$$



$$m_D = \sigma S_D = 12\,\frac{\pi\, 0{,}05^2}{2} = 0{,}04712\ \text{kg}$$

$$\vec{r}_{C_D} = \left(0{,}25;\, 0{,}2 + \frac{4 \times 0{,}05}{3\pi}\right) =$$

$$= (0{,}25;\, 0{,}2212)\ \text{m}$$



$$m_E = \sigma S_E = 12\pi\, 0{,}05^2 = 0{,}09425\ \text{kg}$$

$$\vec{r}_{C_E} = (0{,}1;\, 0{,}1)\ \text{m}$$

Por tanto,

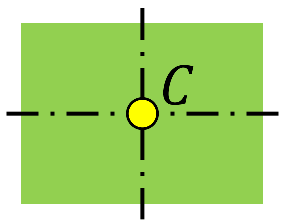
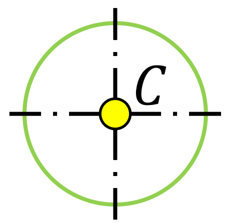
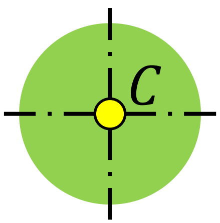
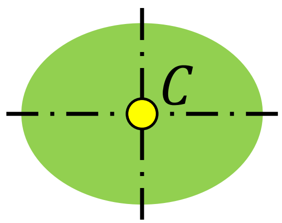
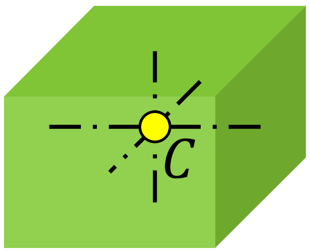
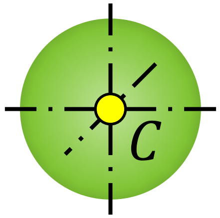
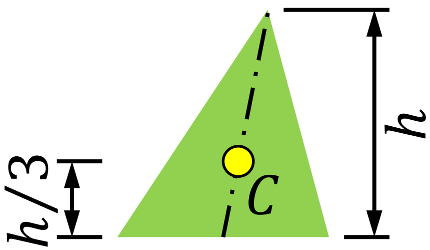
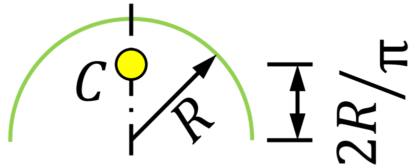
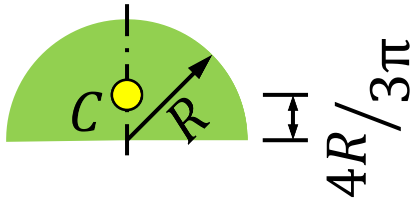
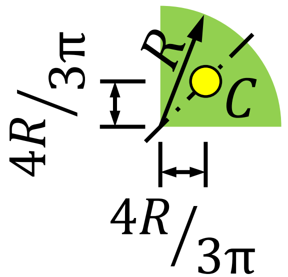
$$m = m_A + m_B + m_D - m_E = 0{,}72 + 0{,}12 + 0{,}04712 - 0{,}09425 =$$
$$= 0{,}7929\ \mathrm{kg}$$

$$m_A\vec{r}_{C_A} + m_B\vec{r}_{C_B} + m_D\vec{r}_{C_D} - m_E\vec{r}_{C_E} =$$
$$= 0{,}72(0{,}15; 0{,}1) + 0{,}12(-0{,}03333; 0{,}1333) +$$
$$+0{,}04712(0{,}25; 0{,}2212) - 0{,}09425(0{,}1; 0{,}1) =$$
$$= (0{,}108; 0{,}072) + (-0{,}004; 0{,}016) +$$
$$+(0{,}01178; 0{,}01042) - (0{,}009425; 0{,}009425) =$$
$$= (0{,}1064; 0{,}08900)\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}$$

$$\vec{r}_C = \frac{(0{,}1064; 0{,}08900)}{0{,}7929} = (0{,}1342; 0{,}1122)\ \mathrm{m}$$

Ejemplos de centros de masas

Centro de masas de cuerpos homogéneos típicos

<table>
<tr><th>Rectángulo</th><th>Circunferencia</th><th>Círculo</th><th>Elipse</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr><th>Ortoedro</th><th>Esfera</th><th>Triángulo</th><th>Semicircunferencia</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr><th>Semicírculo</th><th>Cuarto de círculo</th><th></th><th></th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

Importancia del centro de masas

¿Por qué este concepto es relevante para nosotros?

- El denominado teorema del centro de masas establece que la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema de puntos materiales, es igual a la masa de dicho sistema por la aceleración de su centro de masas.
- En sistemas no extensos (en los que el campo gravitatorio se puede considerar uniforme), el denominado centro de gravedad coincide con el centro de masas.
- En una viga sometida a flexión pura, la denominada fibra neutra pasa por los centros de áreas de las secciones de dicha viga. El centro de áreas de una sección coincide con el centro de masas de una figura plana homogénea con la forma de dicha sección.

III.- Momento de inercia

Definición de momento de inercia

Se denomina momento de inercia de un punto material respecto a un punto, al producto de la masa del punto material por el cuadrado de su distancia a ese punto.

Se denomina momento de inercia de un punto material respecto a un eje, al producto de la masa del punto material por el cuadrado de su distancia a ese eje.

Se denomina momento de inercia de un punto material respecto a un plano, al producto de la masa del punto material por el cuadrado de su distancia a ese plano.

Por tanto, para un punto material de masa m, situado a una distancia r del punto / eje / plano considerado, su momento de inercia es

$$\boxed{I = mr^2}$$

Definición de momento de inercia

Se denomina momento de inercia de un sistema de puntos materiales respecto a un punto / eje / plano, a la suma de los momentos de inercia, respecto a ese punto / eje / plano, de todos los puntos materiales que lo forman.

$$\boxed{I = \sum I_i = \sum m_i r_i^2}$$

De acuerdo con su definición, el momento de inercia es una magnitud escalar, y su producto dimensional es

$$\dim I = \mathsf{L}^2\mathsf{M}$$

La unidad SI coherente del momento de inercia es el $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$.

Ejercicio 13

Una partícula de masa 2 kg se encuentra en la posición $(3; -1; 5)$ m. Obténgase su momento de inercia respecto a: a) el punto $(1; 1; 2)$ m; b) el eje Z; c) el plano YZ.

a) El cuadrado de la distancia del punto $(3; -1; 5)$ m al $(1; 1; 2)$ m es

$$r^2 = (3-1)^2 + \big((-1)-1\big)^2 + (5-2)^2 = 17\ \mathrm{m}^2$$

Así, $I = mr^2 = 2 \times 17 = 34\ \mathrm{kg \cdot m^2}$

b) El punto del eje Z más próximo al $(3; -1; 5)$ m es el $(0; 0; 5)$ m.

Por tanto, el cuadrado de la distancia de la partícula al eje Z es

$$r^2 = (3-0)^2 + \big((-1)-0\big)^2 + (5-5)^2 = 10\ \mathrm{m}^2$$

Así, $I = mr^2 = 2 \times 10 = 20\ \mathrm{kg \cdot m^2}$

c) El punto del plano YZ más próximo al $(3; -1; 5)$ m es el $(0; -1; 5)$ m.

Por tanto, el cuadrado de la distancia de la partícula al plano YZ es

$$r^2 = (3-0)^2 + \big((-1)-(-1)\big)^2 + (5-5)^2 = 9\ \mathrm{m}^2$$

Así, $I = mr^2 = 2 \times 9 = 18\ \mathrm{kg \cdot m^2}$

Ejercicio 14

Tres partículas de masas 1 kg, 2 kg y 3 kg se encuentran en las posiciones $(0; 0)$ m, $(-2; 1)$ m y $(3; -1)$ m, respectivamente. ¿Cuál es el momento de inercia del sistema respecto al eje Y?

Al estar trabajando en dos dimensiones, la distancia de un punto al eje Y es el valor absoluto de su coordenada X.

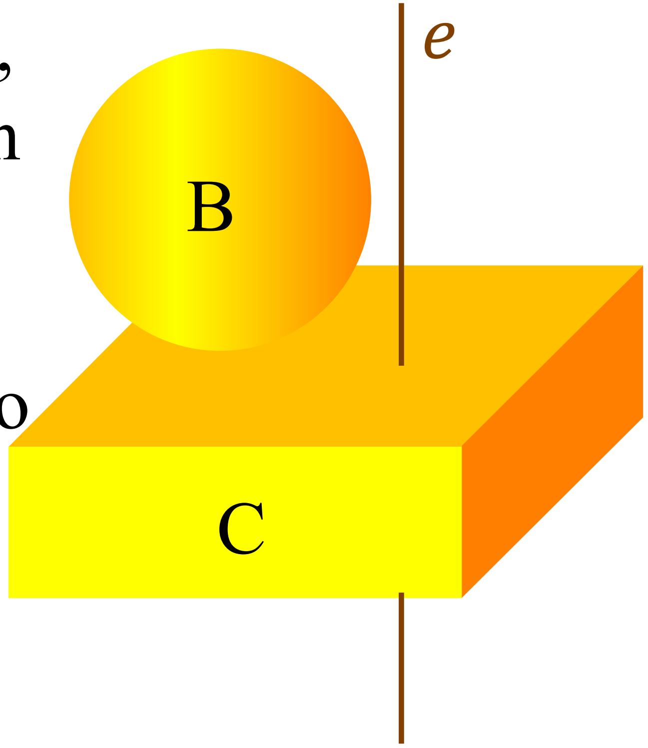
Por tanto, el cuadrado de esa distancia es el cuadrado de la coordenada X.

Así pues, el momento de inercia del sistema (suma de los de las tres partículas que lo forman) respecto al eje Y, es

$$I = 1 \times 0^2 + 2 \times (-2)^2 + 3 \times 3^2 = 0 + 8 + 27 = 35\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

Cuerpos compuestos

Sea un sistema de puntos materiales A, de momento de inercia I_A respecto a un eje e. Lo vamos a considerar constituido por dos sistemas B y C, cuyos momentos de inercia respecto al mismo eje son I_B e I_C respectivamente.



Es:

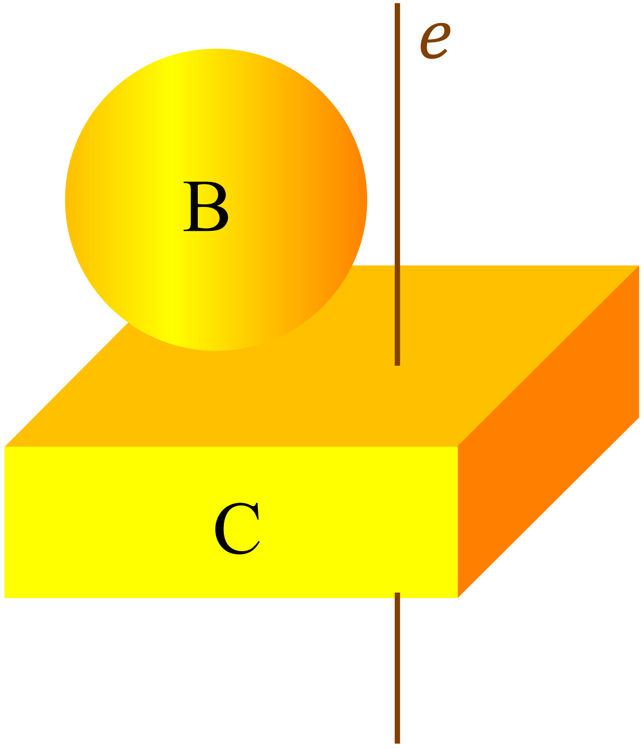
$$I_B = \sum_B m_i r_i^2 \qquad I_C = \sum_C m_i r_i^2$$

$$I_A = \sum_A m_i r_i^2 = \sum_B m_i r_i^2 + \sum_C m_i r_i^2 = I_B + I_C$$

Cuerpos compuestos

Generalización

El momento de inercia, respecto a un eje, de un sistema de puntos materiales compuesto por cualquier cantidad de otros más simples, es la suma de los momentos de inercia de estos respecto al mismo eje.



La misma propiedad se verifica con el momento de inercia, respecto a un punto / plano, de un sistema compuesto.

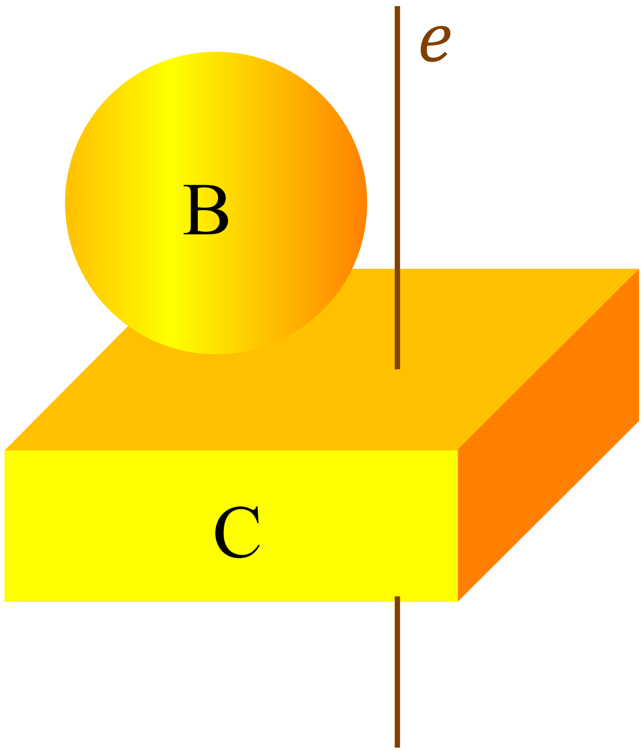
Cuerpos compuestos

A partir de la relación

$$I_A = I_B + I_C$$

obtenida en el desarrollo anterior, también se deduce que

$$I_C = I_A - I_B$$



Por tanto, se puede obtener el momento de inercia, respecto a un eje (o punto, o plano), de un sistema compuesto por adición y sustracción de otros más simples, a partir de las correspondientes sumas y restas de los momentos de inercia de estos respecto al mismo eje (o punto, o plano).

Obtención por integración

Ya sabemos que el momento de inercia de un sistema de puntos materiales respecto a un punto / eje / plano es

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Si se trata de una distribución continua de masas infinitesimales dm, el momento de inercia de una de ellas, situada a una distancia r del punto / eje / plano de que se trate, es

$$dI = r^2 dm$$

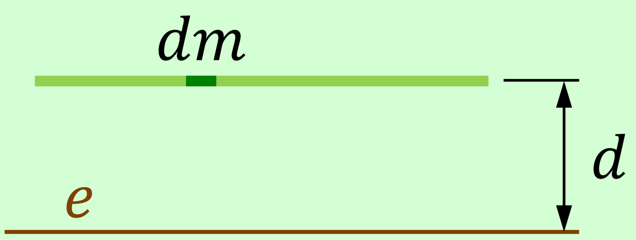
El momento de inercia del sistema es la suma de los de las masas infinitesimales.

$$I = \int r^2 dm$$

Ejercicio 15

Determínese el momento de inercia de un alambre homogéneo muy fino, de masa m, respecto a un eje paralelo situado a una distancia d.

Se puede dividir el alambre en infinitos trozos infinitesimales de masa dm.



Cada trozo se puede considerar un punto, por lo que su momento de inercia es

$$dI = dm\, d^2$$

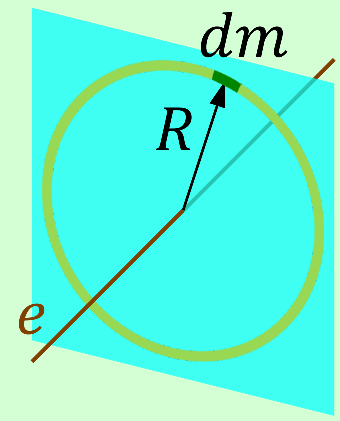
Como todos los trozos tienen el mismo valor de d, la suma de los momentos de inercia de todos ellos (esto es, la integral) es

$$I = \int (dm\, d^2) = \left[\int dm\right] d^2 = md^2$$

Ejercicio 16

Determínese el momento de inercia de un anillo homogéneo muy fino, de masa m y radio R, respecto al eje de simetría perpendicular a su plano.

Se puede dividir el anillo en infinitos trozos infinitesimales de masa dm.



Cada trozo se puede considerar un punto, por lo que su momento de inercia es

$$dI = dmR^2$$

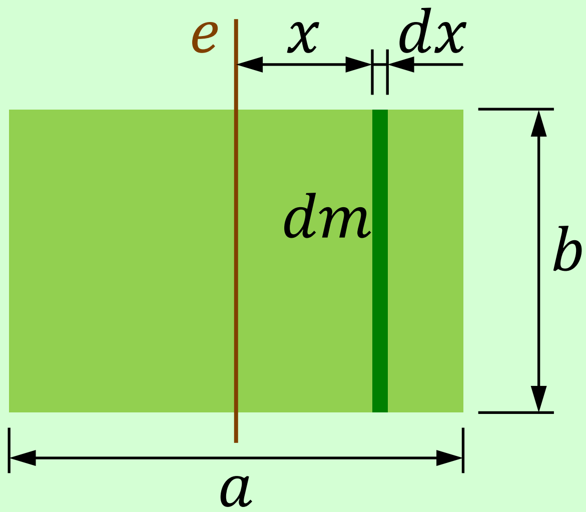
Como todos los trozos tienen el mismo valor de R, la suma de los momentos de inercia de todos ellos (esto es, la integral) es

$$I = \int (dmR^2) = \left[\int dm\right] R^2 = mR^2$$

Ejercicio 17

Determínese el momento de inercia de un rectángulo homogéneo, de masa m y lados de longitud a y b, respecto al eje de simetría paralelo al segundo de esos lados.

Sea la banda de la figura, de altura b, situada a una distancia x del eje. La anchura infinitesimal de la banda es dx, y su masa es dm.



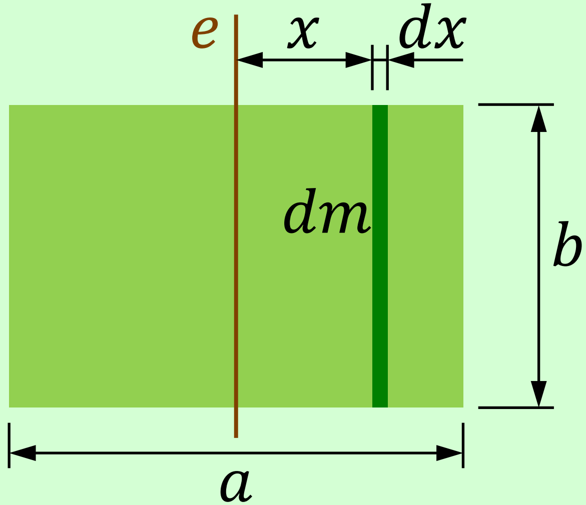
Como el rectángulo es homogéneo, la relación de la masa dm a la masa total m es la misma que existe entre las respectivas áreas, dS y S. Por tanto,

$$\frac{dm}{m} = \frac{dS}{S} = \frac{b\,dx}{ab} = \frac{dx}{a} \Rightarrow dm = \frac{m\,dx}{a}$$

La banda es un alambre recto homogéneo muy fino paralelo al eje. Por tanto es de aplicación la expresión del momento de inercia que corresponde a ese caso particular.

$$dI = dm\,x^2 = \frac{m\,dx}{a}x^2 = \frac{mx^2}{a}dx$$

La suma de los momentos de inercia de todas las bandas (esto es, la integral), cuyas posiciones son $x \in [-{}^a/_2\,;{}^a/_2]$, es



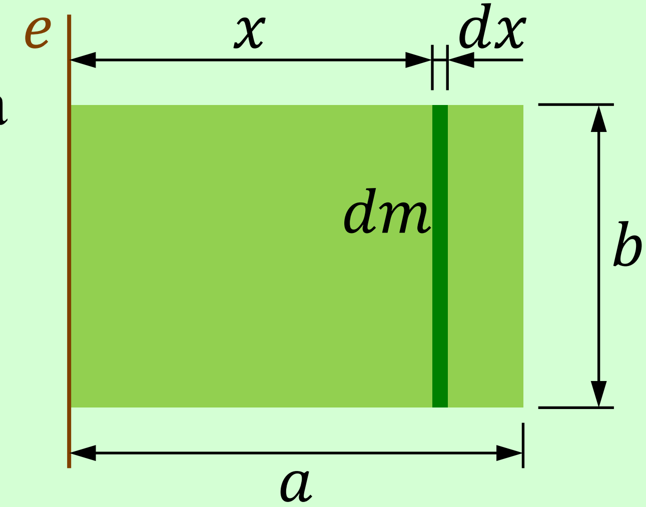
$$I = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{mx^2}{a}dx = \left[\frac{mx^3}{3a}\right]_{-a/2}^{a/2} =$$

$$= \frac{m({}^a/_2)^3}{3a} - \frac{m\left(-{}^a/_2\right)^3}{3a} = \frac{ma^3}{24a} - \left(-\frac{ma^3}{24a}\right) = \frac{1}{12}ma^2$$

Ejercicio 18

Determínese el momento de inercia de un rectángulo homogéneo, de masa m y dimensiones a y b, respecto a un eje que recorre uno de los lados de longitud b.

El proceso es idéntico al del ejercicio anterior, salvo que ahora x es la distancia de cada banda al nuevo eje. Por tanto, $x \in [0; a]$.



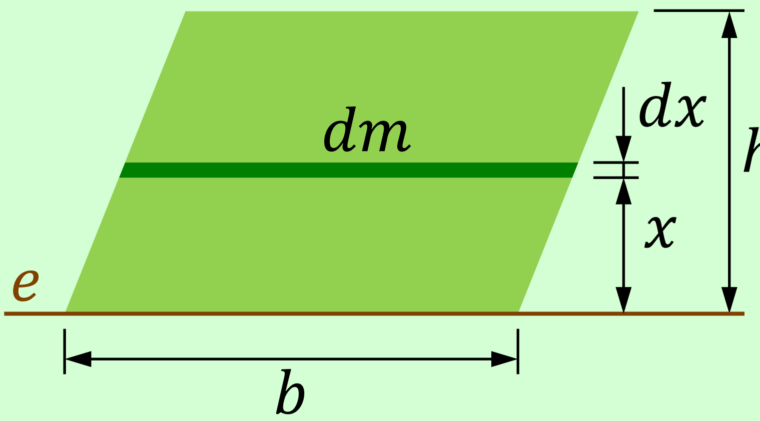
$$I = \int_0^a \frac{mx^2}{a} dx = \left[\frac{mx^3}{3a}\right]_0^a =$$

$$= \frac{ma^3}{3a} - \frac{m0^3}{3a} = \frac{1}{3}ma^2$$

Ejercicio 19

Determínese el momento de inercia de un paralelogramo homogéneo, de masa m, base b y altura h, respecto a un eje que recorre uno de los lados de longitud b.

Sea la banda de la figura, de longitud b, situada a una distancia x del eje. La anchura infinitesimal de la banda es dx, y su masa es dm.



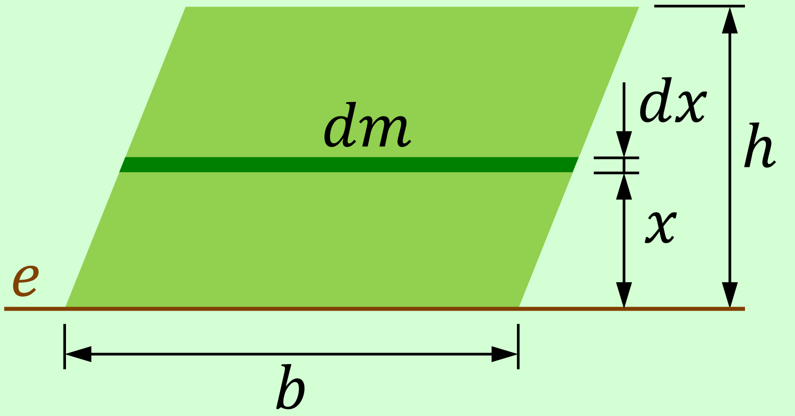
Como el paralelogramo es homogéneo, la relación de la masa dm a la masa total m es la misma que existe entre las respectivas áreas, dS y S. Por tanto,

$$\frac{dm}{m} = \frac{dS}{S} = \frac{b\,dx}{bh} = \frac{dx}{h} \Rightarrow dm = \frac{m\,dx}{h}$$

La banda es un alambre recto homogéneo muy fino paralelo al eje. Por tanto es de aplicación la expresión del momento de inercia que corresponde a ese caso particular.

$$dI = dm\, x^2 = \frac{m\, dx}{h} x^2 = \frac{mx^2}{h} dx$$

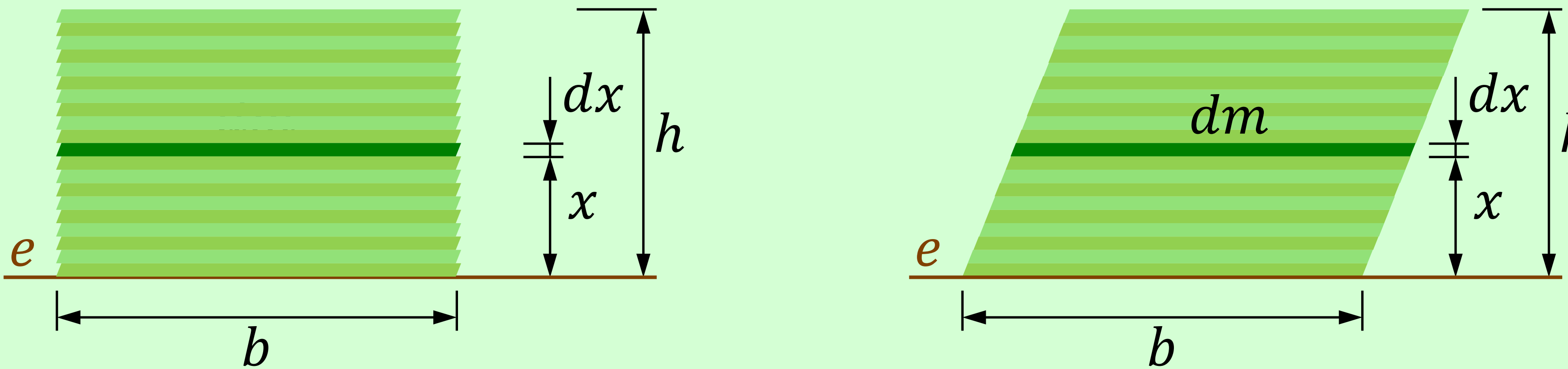
La suma de los momentos de inercia de todas las bandas (esto es, la integral), cuyas posiciones son $x \in [0; h]$, es



$$I = \int_0^h \frac{mx^2}{h} dx = \left[\frac{mx^3}{3h}\right]_0^h =$$

$$= \frac{mh^3}{3h} - \frac{m0^3}{3h} = \frac{1}{3} mh^2$$

Sin embargo, existe una forma mucho más sencilla de obtener el momento de inercia solicitado: caer en la cuenta de que las infinitas bandas que constituyen el paralelogramo, son las mismas que conforman un rectángulo de iguales base y altura.



Cada una de esas bandas tiene el mismo momento de inercia dI (mismas masa dm y distancia x al eje) en paralelogramo y rectángulo.

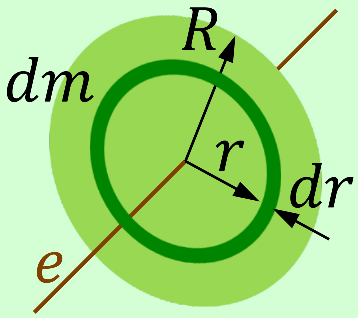
Por tanto, el momento de inercia del paralelogramo es el mismo que el del rectángulo:

$$I = \frac{1}{3}mh^2$$

Ejercicio 20

Determínese el momento de inercia de un disco homogéneo muy fino, de masa m y radio R, respecto al eje de simetría perpendicular a su plano.

Sea el anillo de la figura, de radio r. La anchura infinitesimal del anillo es dr, y su masa es dm.



Como el disco es homogéneo, la relación de la masa dm a la masa total m es la misma que existe entre las respectivas áreas, dS y S. Por tanto,

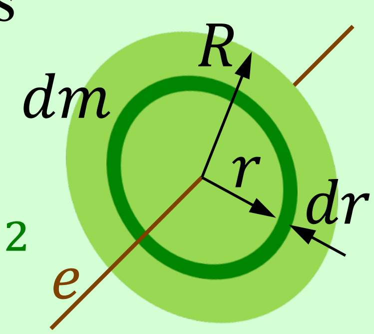
$$\frac{dm}{m} = \frac{dS}{S} = \frac{2\pi r\,dr}{\pi R^2} = \frac{2r\,dr}{R^2} \Rightarrow dm = \frac{2mr\,dr}{R^2}$$

El anillo es homogéneo y muy fino. Por tanto es de aplicación la expresión del momento de inercia que corresponde a ese caso particular.

$$dI = dm\, r^2 = \frac{2mr\, dr}{R^2} r^2 = \frac{2mr^3}{R^2} dr$$

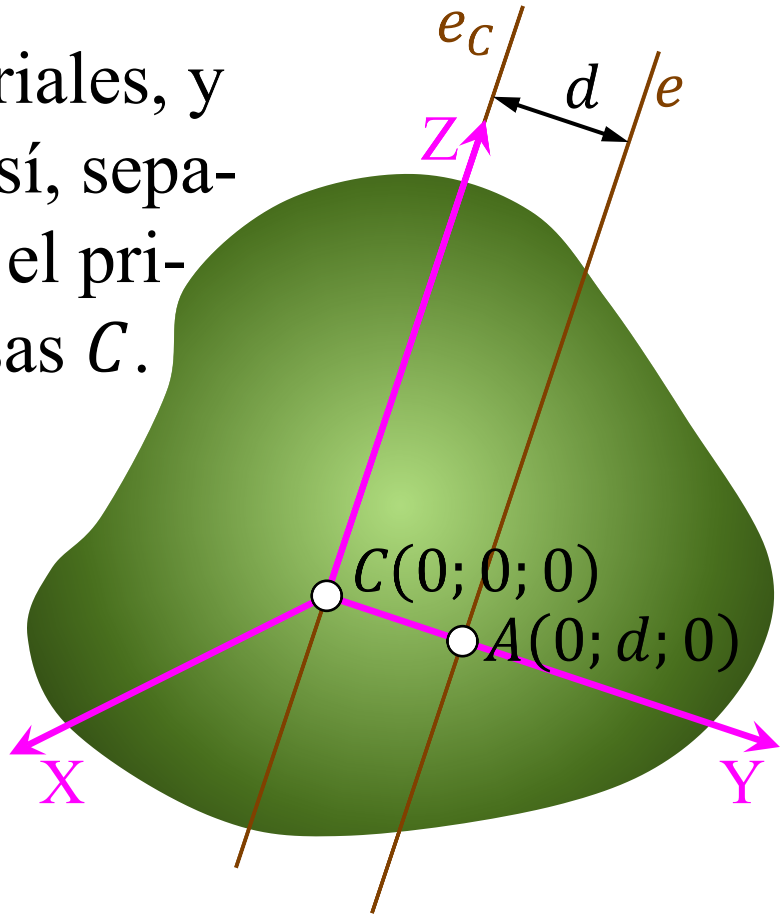
La suma de los momentos de inercia de todos los anillos (esto es, la integral), cuyos radios son $r \in [0; R]$, es

$$I = \int_0^R \frac{2mr^3}{R^2} dr = \left[\frac{mr^4}{2R^2}\right]_0^R = \frac{mR^4}{2R^2} - \frac{m0^4}{2R^2} = \frac{1}{2} mR^2$$



Teorema de Steiner

Sea un sistema de puntos materiales, y dos ejes e_C y e paralelos entre sí, separados una distancia d, y donde el primero pasa por el centro de masas C.



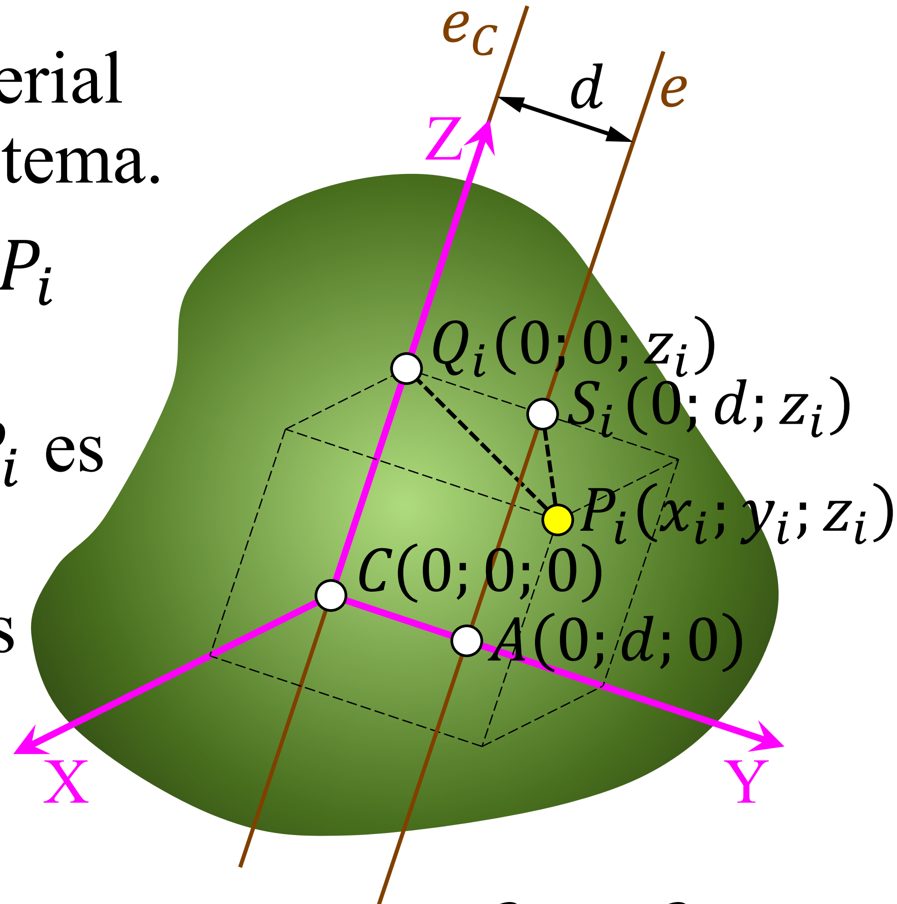
Por simplicidad, adoptamos un sistema de referencia tal que:

- el origen de coordenadas está en C;
- el eje Z coincide con e_C;
- e está en el plano YZ.

Por tanto es $C(0;0;0)$, y e pasa por $A(0;d;0)$.

Teorema de Steiner

Sea $P_i(x_i; y_i; z_i)$ un punto material cualquiera, de masa m_i, del sistema.



El punto de e_C más próximo a P_i es $Q_i(0; 0; z_i)$.

El punto de e más próximo a P_i es $S_i(0; d; z_i)$.

Los cuadrados de las distancias de P_i a los ejes e_C y e son:

$$r_{C_i}^2 = \left|\overrightarrow{Q_iP_i}\right|^2 =$$

$$= (x_i - 0)^2 + (y_i - 0)^2 + (z_i - z_i)^2 = x_i^2 + y_i^2$$

$$r_i^2 = \left|\overrightarrow{S_iP_i}\right|^2 = (x_i - 0)^2 + (y_i - d)^2 + (z_i - z_i)^2 =$$

$$= x_i^2 + y_i^2 + d^2 - 2y_i d$$

Teorema de Steiner

Los momentos de inercia del sistema respecto a los ejes e_C y e son, respectivamente,

$$I_C = \sum m_i r_{C_i}^2 = \sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

$$I = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + d^2 - 2y_i d\right) =$$

$$= \sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) + \sum (m_i d^2) - \sum (m_i 2y_i d) =$$

$$= I_C + \left(\sum m_i\right) d^2 - 2d \sum m_i y_i =$$

$$= I_C + md^2 - 2d \sum m_i y_i$$

Teorema de Steiner

Utilizando la expresión del centro de masas de un sistema, se tiene que

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \Rightarrow \sum m_i \vec{r}_i = m\vec{r}_C \Rightarrow \sum m_i y_i = m y_C = 0$$

ya que en nuestro sistema de referencia es $C(0;0;0)$.

Por tanto,

$$I = I_C + md^2$$

Teorema de Steiner

Teorema de Steiner.

El momento de inercia de un sistema de puntos materiales respecto a un eje, es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo al primero pasando por el centro de masas del sistema, más el producto de su masa por el cuadrado de la distancia entre ambos ejes.

$$I = I_C + md^2$$

Una consecuencia es que, de todos los ejes paralelos a una dirección, el momento de inercia mínimo corresponde al que pasa por el centro de masas.

Fuente: Public domain, via Wikimedia Commons

Teorema de Steiner

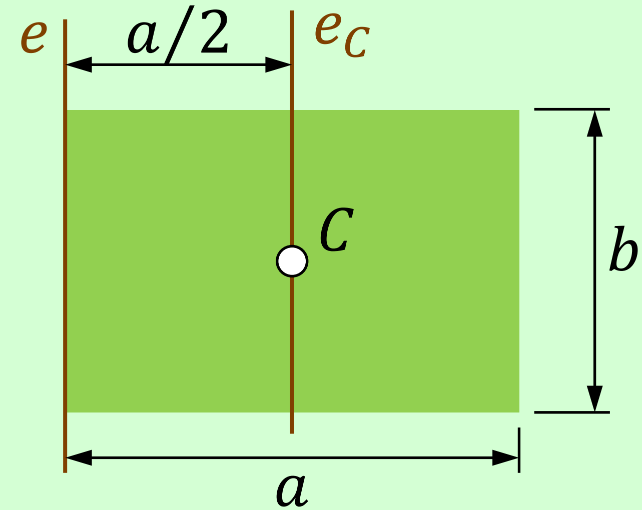
Mediante desarrollos análogos, se puede demostrar lo siguiente.

El momento de inercia de un sistema de puntos materiales respecto a un punto, es igual al momento de inercia respecto al centro de masas del sistema, más el producto de su masa por el cuadrado de la distancia entre ambos puntos.

El momento de inercia de un sistema de puntos materiales respecto a un plano, es igual al momento de inercia respecto a un plano paralelo al primero pasando por el centro de masas del sistema, más el producto de su masa por el cuadrado de la distancia entre ambos planos.

Ejercicio 21

Determínese el momento de inercia de un rectángulo homogéneo, de masa m y dimensiones a y b, respecto a un eje que recorre uno de los lados de longitud b. Para ello, utilícese el teorema de Steiner a partir del eje paralelo que pasa por el centro de masas del rectángulo.



La distancia entre los ejes paralelos e y e_C es $a/2$.

$$I_C = \frac{1}{12} ma^2$$

Aplicando el teorema de Steiner,

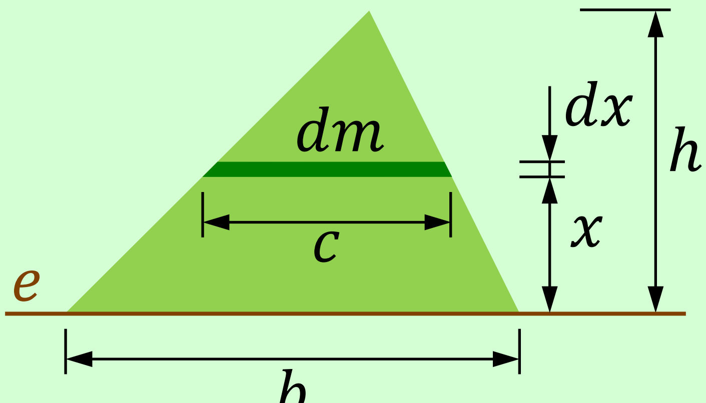
$$I = I_C + md^2 = \frac{1}{12} ma^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{12} ma^2 + \frac{1}{4} ma^2 = \frac{1}{12} ma^2 + \frac{3}{12} ma^2 = \frac{4}{12} ma^2 = \frac{1}{3} ma^2$$

Ejercicio 22

Determínese el momento de inercia de un triángulo homogéneo, de masa m, base b y altura h, respecto a un eje que recorre el lado de longitud b.

Sea la banda de la figura, de longitud c, situada a una distancia x del eje. La anchura infinitesimal de la banda es dx, y su masa es dm.



Como el triángulo es homogéneo, la relación de la masa dm a la masa total m es la misma que existe entre las respectivas áreas, dS y S. Por tanto,

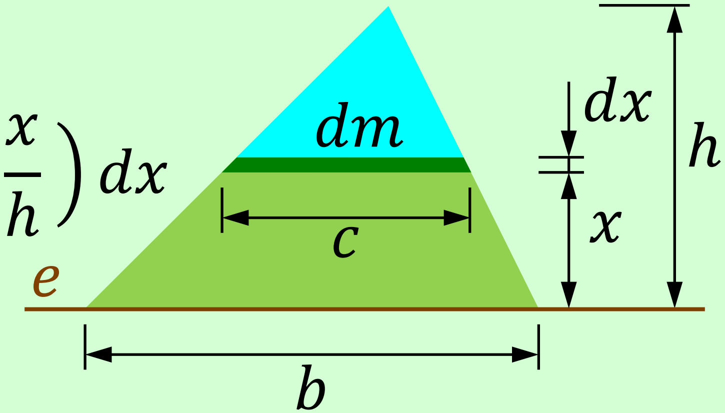
$$\frac{dm}{m} = \frac{dS}{S} = \frac{c\,dx}{\frac{1}{2}bh} = \frac{2cdx}{bh} \Rightarrow dm = \frac{2mc\,dx}{bh}$$

Para un triángulo concreto de dimensiones b y h, el valor de c viene determinado por la distancia x. Esta relación puede obtenerse por semejanza de nuestro triángulo con el mostrado en azul. Así,

$$\frac{c}{b} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow c = \frac{b(h-x)}{h} = b\left(1-\frac{x}{h}\right)$$

Por tanto,

$$dm = \frac{2m\left[b\left(1-\frac{x}{h}\right)\right]dx}{bh} = \frac{2m}{h}\left(1-\frac{x}{h}\right)dx$$



La banda es un alambre recto homogéneo muy fino paralelo al eje. Por tanto es de aplicación la expresión del momento de inercia que corresponde a ese caso particular.

$$dI = dm\, x^2 = \left[\frac{2m}{h}\left(1-\frac{x}{h}\right)dx\right]x^2 = \frac{2m}{h}\left(x^2-\frac{x^3}{h}\right)dx$$

La suma de los momentos de inercia de todas las bandas (esto es, la integral), cuyas posiciones son $x \in [0; h]$, es

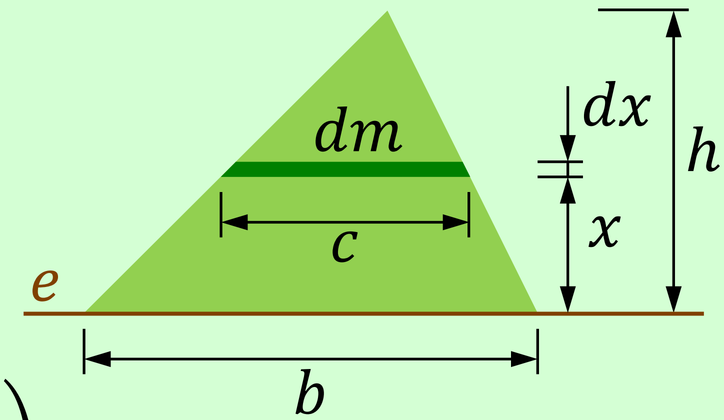
$$I = \int_0^h \frac{2m}{h}\left(x^2 - \frac{x^3}{h}\right)dx = \frac{2m}{h}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4h}\right]_0^h =$$

$$= \frac{2m}{h}\left[\left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4h}\right) - \left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4h}\right)\right] =$$

$$= \frac{2m}{h}\left[\left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{4}\right) - 0\right] =$$

$$= \frac{2mh^3}{h}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 2mh^2\left(\frac{4}{12} - \frac{3}{12}\right) =$$

$$= 2mh^2\frac{1}{12} = \frac{1}{6}mh^2$$



Un método alternativo de obtener este momento de inercia, y que no requiere integración, es el que se desarrolla a continuación.

Como muestra la figura, utilizando dos triángulos iguales A y B se puede constituir un paralelogramo de base b, altura h, y masa $2m$.

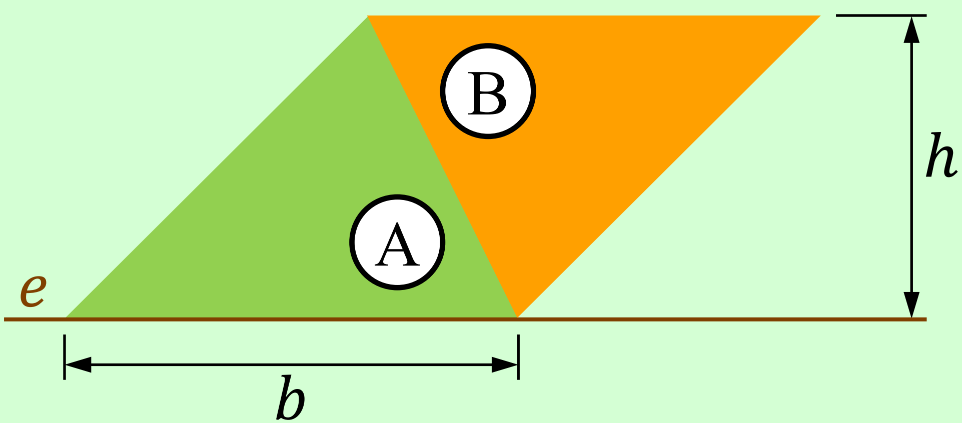
Como ya sabemos, el momento de inercia de tal paralelogramo respecto al eje e es

$$I_e = \frac{1}{3}(2m)h^2$$

Este valor ha de ser igual a la suma de los momentos de inercia de los triángulos A y B respecto al mismo eje. Por tanto,

$$I_{A_e} + I_{B_e} = I_e = \frac{2}{3}mh^2$$

donde I_{A_e} es el momento de inercia que queremos conocer.



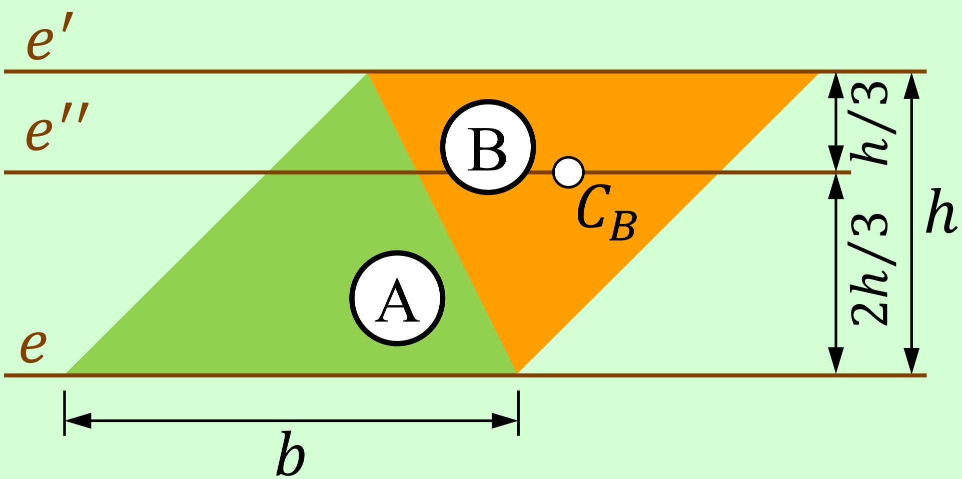
Sean los ejes e' y e'', que pasan respectivamente por la base del triángulo B y por su centro de masas C_B.

De acuerdo con el teorema de Steiner, los momentos de inercia del triángulo B respecto a los ejes e, e' y e''satisfacen las relaciones:

$$I_{B_e} = I_{B_{e''}} + m(2h/3)^2 = I_{B_{e''}} + 4mh^2/9$$
$$I_{B_{e'}} = I_{B_{e''}} + m(h/3)^2 = I_{B_{e''}} + mh^2/9$$

Restando la segunda relación a la primera, se tiene que

$$I_{B_e} - I_{B_{e'}} = 4mh^2/9 - mh^2/9 = 3mh^2/9 = mh^2/3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I_{B_e} = I_{B_{e'}} + mh^2/3$$



Como ya se justificó, a partir de que el conjunto A+B constituye un paralelogramo se deduce que

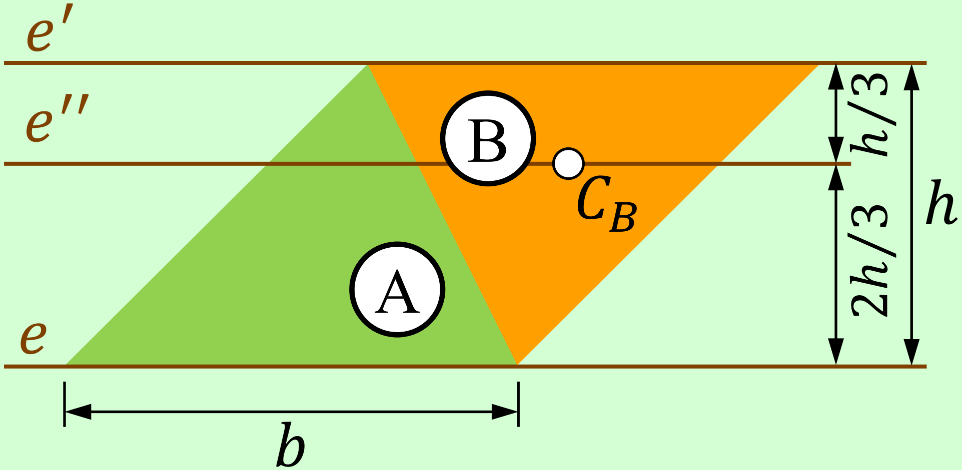
$$I_{A_e} + I_{B_e} = \frac{2}{3} mh^2$$

Por tanto,

$$I_{A_e} + \left(I_{B_{e'}} + mh^2/3\right) = \frac{2}{3} mh^2$$

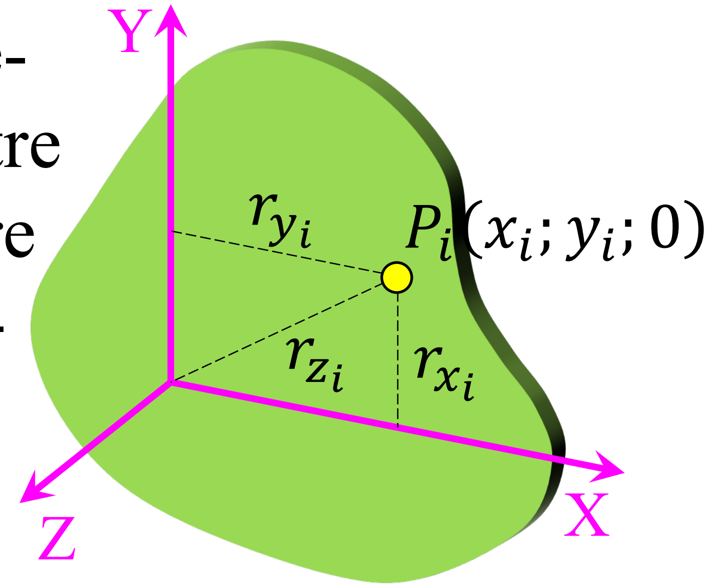
El momento de inercia de B respecto a e' es el mismo que el de A respecto a e. Por tanto,

$$I_{A_e} + \left(I_{A_e} + mh^2/3\right) = \frac{2}{3} mh^2 \Rightarrow 2I_{A_e} = \frac{1}{3} mh^2 \Rightarrow I_{A_e} = \frac{1}{6} mh^2$$



Teorema de las tres perpendiculares

Sea un sistema plano de puntos materiales, y tres ejes perpendiculares entre sí, dos de ellos (X e Y) situados sobre dicho sólido, y el tercero (Z) perpendicular a él.



Sea $P_i(x_i; y_i; 0)$ un punto material cualquiera, de masa m_i, del sistema.

Los cuadrados de las distancias de P_i a los ejes X, Y y Z son, respectivamente,

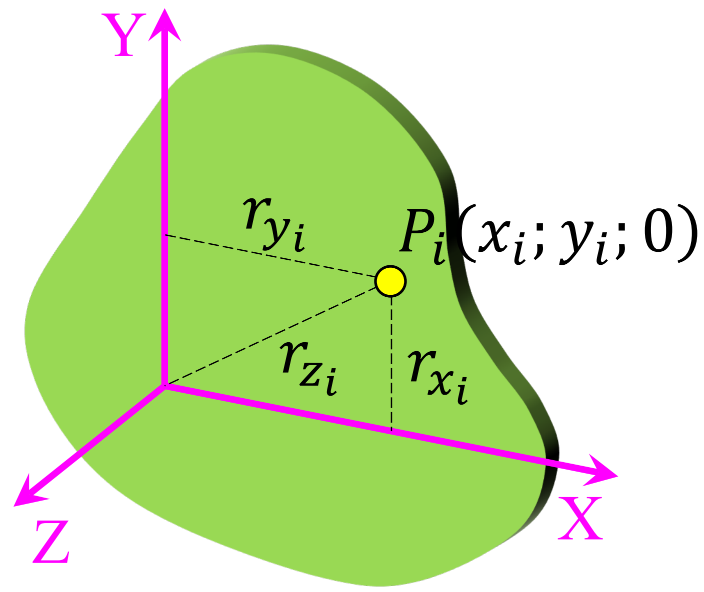
$$r_{x_i}^2 = y_i^2$$

$$r_{y_i}^2 = x_i^2$$

$$r_{z_i}^2 = x_i^2 + y_i^2$$

Teorema de las tres perpendiculares

Los momentos de inercia del sistema plano respecto a los ejes X, Y y Z son, respectivamente,



$$I_x = \sum m_i r_{x_i}^2 = \sum m_i y_i^2$$

$$I_y = \sum m_i r_{y_i}^2 = \sum m_i x_i^2$$

$$I_z = \sum m_i r_{z_i}^2 = \sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2$$

Por tanto,

$$I_z = I_x + I_y$$

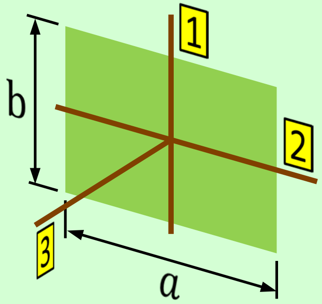
Teorema de las tres perpendiculares

Teorema de las tres perpendiculares.

El momento de inercia de un sistema plano de puntos materiales respecto a un eje perpendicular a él en un punto, es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes situados en el plano del sistema, perpendiculares entre sí, y que pasan por el mismo punto.

Ejercicio 23

Determínese el momento de inercia de un rectángulo homogéneo, de masa m y dimensiones a y b, respecto al eje perpendicular que pasa por su centro de masas.



Ya obtuvimos que el momento de inercia respecto al eje 1 es

$$I_1 = \frac{1}{12} m a^2$$

Por analogía, el momento de inercia respecto al eje 2 es

$$I_2 = \frac{1}{12} m b^2$$

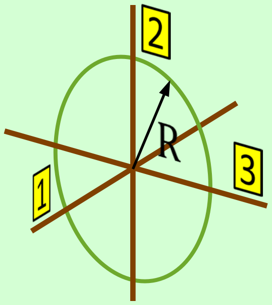
Aplicando el teorema de las tres perpendiculares (el rectángulo es un sistema plano), el momento de inercia respecto al eje 3 es

$$I_3 = I_1 + I_2 = \frac{1}{12} m a^2 + \frac{1}{12} m b^2 = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

Ejercicio 24

Determínese el momento de inercia de un anillo homogéneo muy fino, de masa m y radio R, respecto a un eje diametral.

Ya obtuvimos que el momento de inercia respecto al eje 1 es



$$I_1 = mR^2$$

Por simetría, los momentos de inercia respecto a los ejes diametrales 2 y 3 son iguales entre sí.

$$I_2 = I_3$$

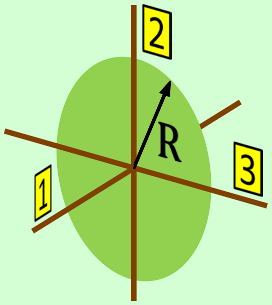
Aplicando el teorema de las tres perpendiculares (el anillo es un sistema plano), se obtiene el momento de inercia respecto al eje 2.

$$I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow mR^2 = I_2 + I_2 = 2I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}mR^2$$

Ejercicio 25

Determínese el momento de inercia de un disco homogéneo muy fino, de masa m y radio R, respecto un eje diametral.

Ya obtuvimos que el momento de inercia respecto al eje 1 es



$$I_1 = \frac{1}{2}mR^2$$

Por simetría, los momentos de inercia respecto a los ejes diametrales 2 y 3 son iguales entre sí.

$$I_2 = I_3$$

Aplicando el teorema de las tres perpendiculares (el disco es un sólido plano), se obtiene el momento de inercia respecto al eje 2.

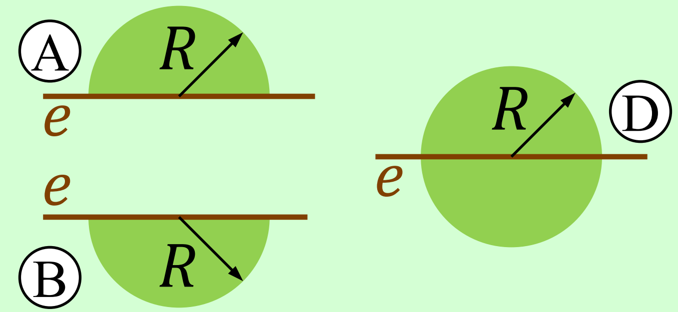
$$I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow \frac{1}{2}mR^2 = I_2 + I_2 = 2I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4}mR^2$$

Ejercicio 26

Determínese el momento de inercia de un semidisco homogéneo muy fino, de masa m y radio R, respecto a un eje que recorre su borde recto.

Sea I_A el momento de inercia del semidisco A respecto al eje indicado.

Sea I_B el momento de inercia, respecto al mismo eje, de un segundo semidisco B idéntico situado simétricamente.



La distribución de masas de ambos semidiscos respecto al eje es idéntica, por lo que $I_A = I_B$.

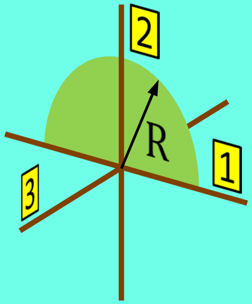
El conjunto de los dos semidiscos constituye un disco D de radio R y masa $2m$. Por tanto, su momento de inercia es

$$I_D = \frac{1}{4}(2m)R^2$$

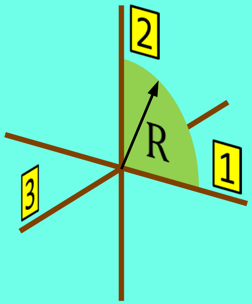
A partir de aquí se obtiene que

$$I_D = I_A + I_B \Rightarrow \frac{1}{4}(2m)R^2 = I_A + I_A = 2I_A \Rightarrow I_A = \frac{1}{4}mR^2$$

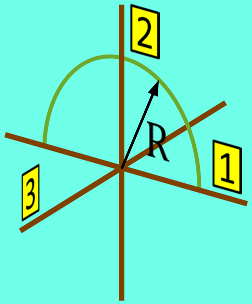
Tarea: Se ha demostrado que el momento de inercia de un semidisco homogéneo muy fino, de masa m y radio R, respecto al eje 1 de la figura, es $I_1 = \frac{1}{4}mR^2$. Demuéstrese ahora que respecto a los ejes 2 y 3 resulta $I_2 = \frac{1}{4}mR^2$ e $I_3 = \frac{1}{2}mR^2$.



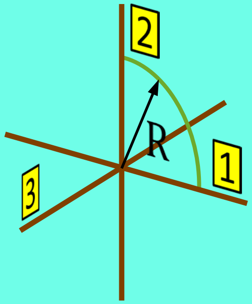
Tarea: Demuéstrese que los momentos de inercia de un cuarto de disco homogéneo muy fino, de masa m y radio R, respecto a los ejes 1, 2 y 3 de la figura, son $I_1 = I_2 = \frac{1}{4}mR^2$ e $I_3 = \frac{1}{2}mR^2$.



Tarea: Demuéstrese que los momentos de inercia de un semianillo homogéneo muy fino, de masa m y radio R, respecto a los ejes 1, 2 y 3 de la figura, son $I_1 = I_2 = \frac{1}{2}mR^2$ e $I_3 = mR^2$.



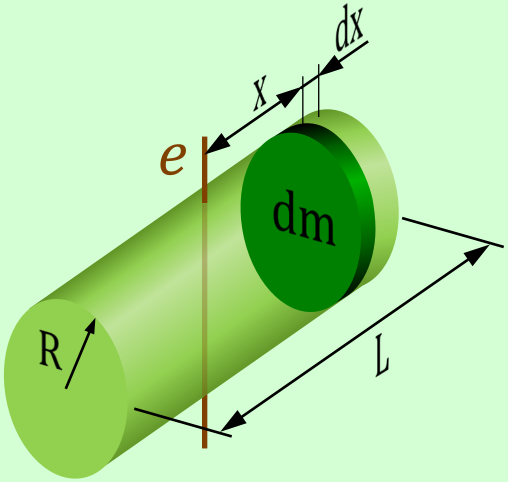
Tarea: Demuéstrese que los momentos de inercia de un cuarto de anillo homogéneo muy fino, de masa m y radio R, respecto a los ejes 1, 2 y 3 de la figura, son $I_1 = I_2 = \frac{1}{2}mR^2$ e $I_3 = mR^2$.



Ejercicio 27

Determínese el momento de inercia de un cilindro macizo homogéneo, de masa m, radio R y longitud L, respecto a un eje diametral de su sección circular central.

Sea la rebanada de la figura, de radio R, situada a una distancia x del eje. La anchura infinitesimal de la banda es dx, y su masa es dm.



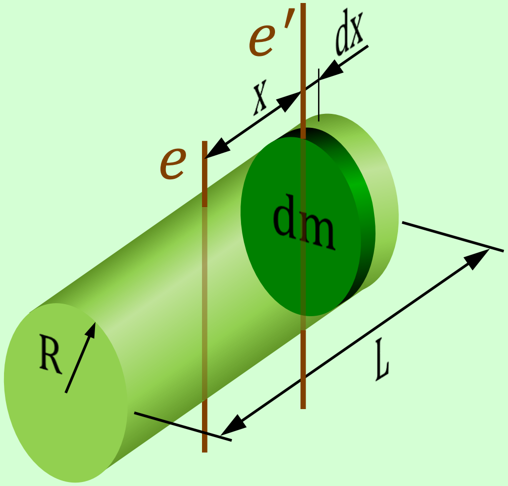
Como la rebanada es homogénea, la relación de la masa dm a la masa total m es la misma que existe entre los respectivos volúmenes, dV y V. Por tanto,

$$\frac{dm}{m} = \frac{dV}{V} = \frac{\pi R^2\, dx}{\pi R^2 L} = \frac{dx}{L} \Rightarrow dm = \frac{m\, dx}{L}$$

Sea un eje e' que pasa por el centro de masas de la rebanada, y es paralelo al eje e.

La rebanada es un disco homogéneo muy fino. Por tanto, su momento de inercia respecto al eje e' es

$$dI' = \frac{1}{4} dm\, R^2$$



Aplicando el teorema de Steiner, el momento de inercia de la rebanada respecto al eje e es

$$dI = dI' + dm\, x^2 = \frac{1}{4} dm\, R^2 + dm\, x^2 =$$

$$= \left(\frac{R^2}{4} + x^2\right) dm = \left(\frac{R^2}{4} + x^2\right) \frac{m\, dx}{L} = \frac{m}{L} \left(\frac{R^2}{4} + x^2\right) dx$$

La suma de los momentos de inercia de todas las rebanadas (esto es, la integral), cuyas posiciones son $x \in [-{}^{L}/_{2}\,; {}^{L}/_{2}]$, es

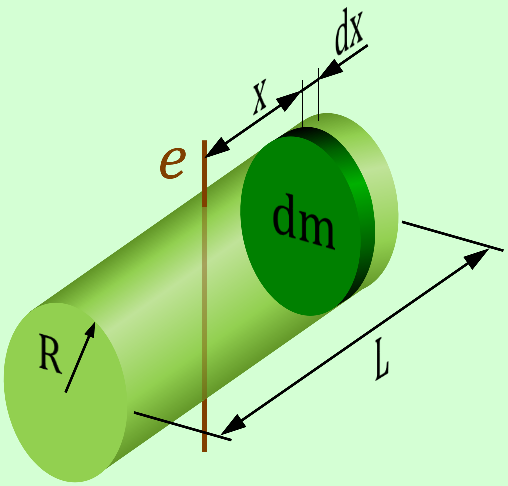
$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{m}{L}\left(\frac{R^2}{4} + x^2\right) dx = \frac{m}{L}\left[\frac{R^2 x}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} =$$

$$= \frac{m}{L}\left[\left(\frac{R^2 (L/2)}{4} + \frac{(L/2)^3}{3}\right) - \right.$$

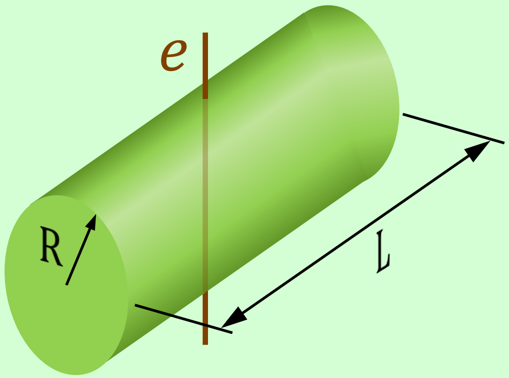
$$\left. - \left(\frac{R^2(-L/2)}{4} + \frac{(-L/2)^3}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{m}{L}\left[\left(\frac{R^2 L}{8} + \frac{L^3}{24}\right) - \left(-\frac{R^2 L}{8} - \frac{L^3}{24}\right) =\right]$$

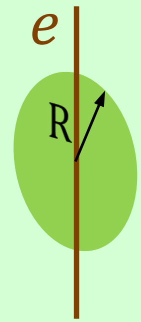
$$= \frac{m}{L}\left(\frac{R^2 L}{4} + \frac{L^3}{12}\right) = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m L^2$$



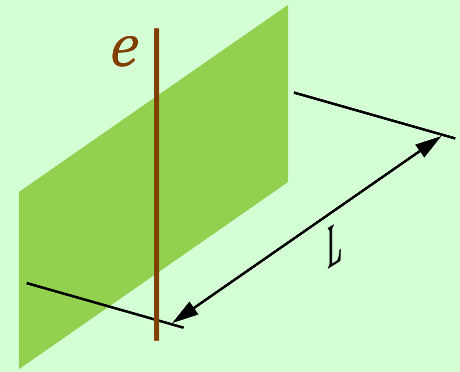
Como regla mnemotécnica, puede verse que este resultado es la suma del de un disco (como si se contrajera la longitud del cilindro) y el de un rectángulo (como si se contrajera la anchura).



$$I = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m L^2$$



$$I = \frac{1}{4} m R^2$$



$$I = \frac{1}{12} m L^2$$

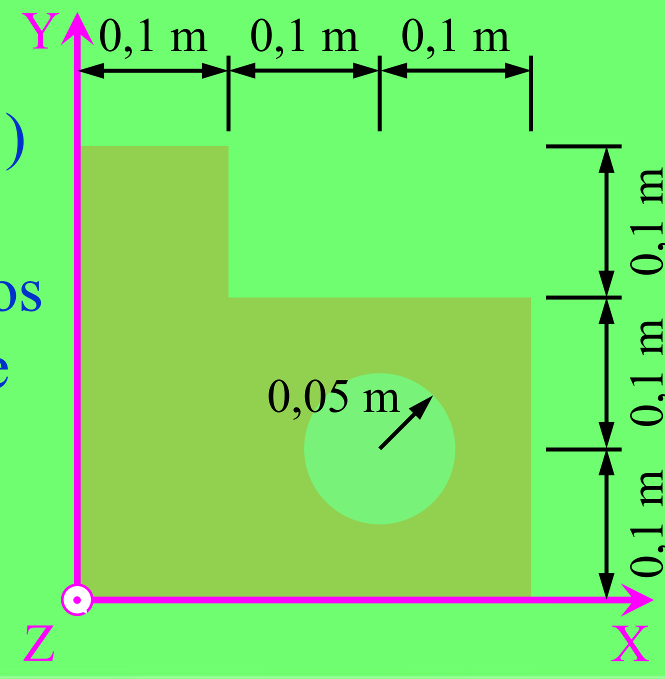
En la literatura aparece en ocasiones la expresión equivalente

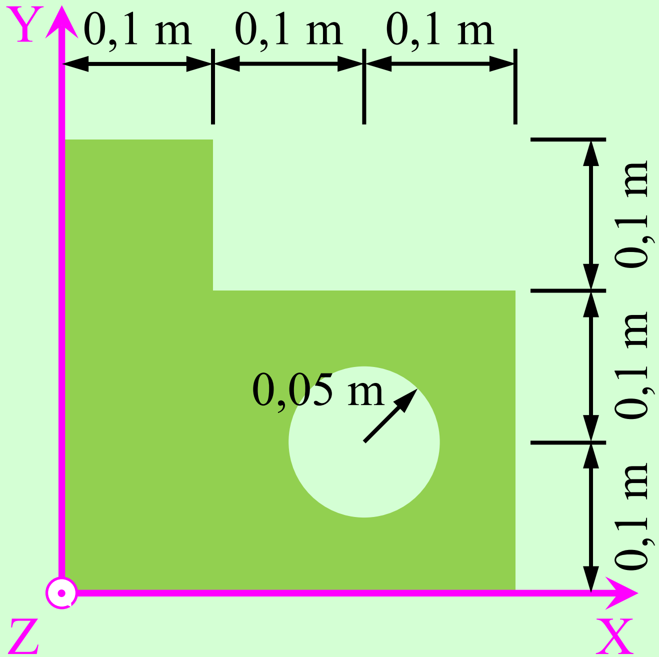
$$I = \frac{1}{12} m (L^2 + 3R^2)$$

Tarea: Demuéstrese que si el cilindro es hueco de pared muy fina, el momento de inercia respecto al mismo eje utilizado para el macizo es $\frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{12} m L^2$.

Ejercicio 28

Una placa (densidad superficial 15 kg/m^2) tiene la forma y dimensiones que se muestran en la figura. Determínese sus momentos de inercia respecto a los ejes del sistema de referencia indicado.





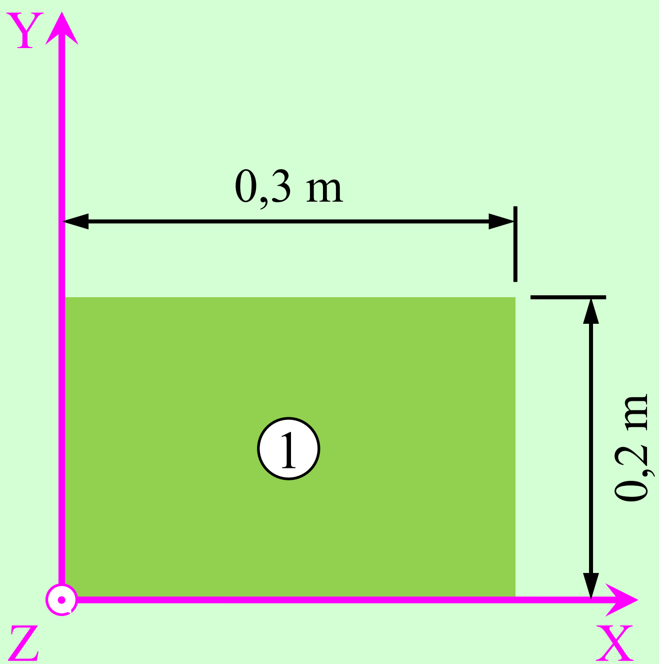
Consideremos la placa constituida por los rectángulos 1 y 2, extrayendo del primero el círculo 3.

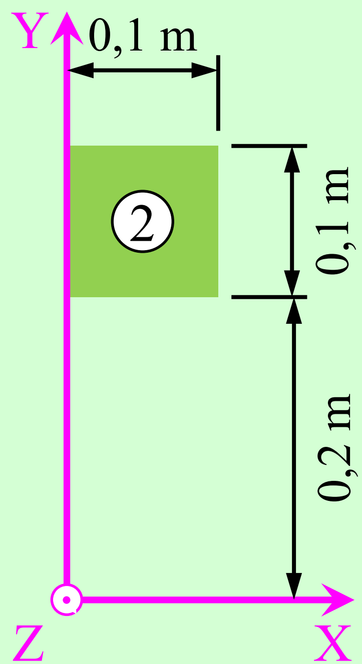
Las masas de estas partes son:

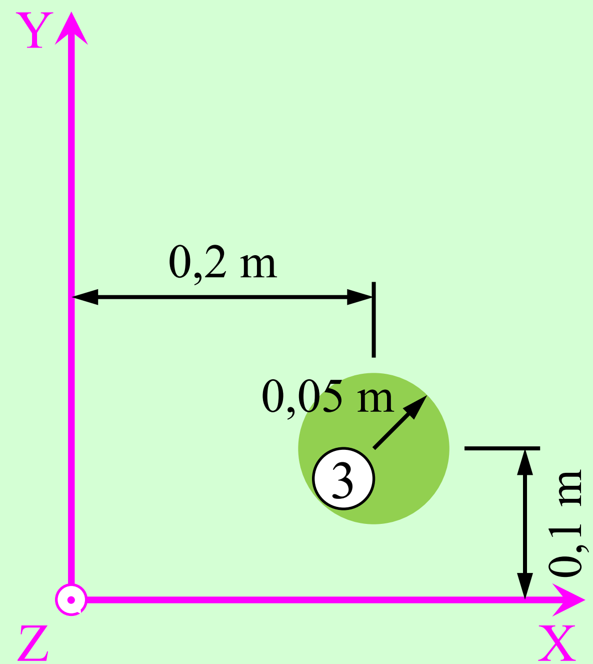
$$m_1 = 15 \times 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}9 \text{ kg}$$

$$m_2 = 15 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}15 \text{ kg}$$

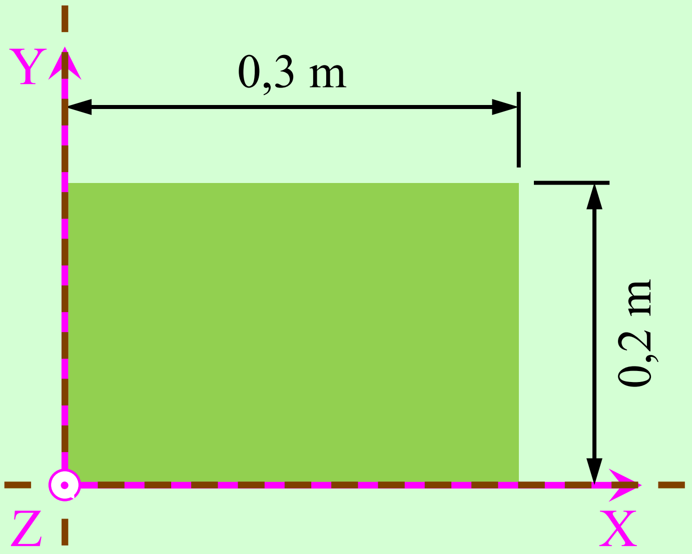
$$m_3 = 15 \times \pi \times 0{,}05^2 = 0{,}1178 \text{ kg}$$







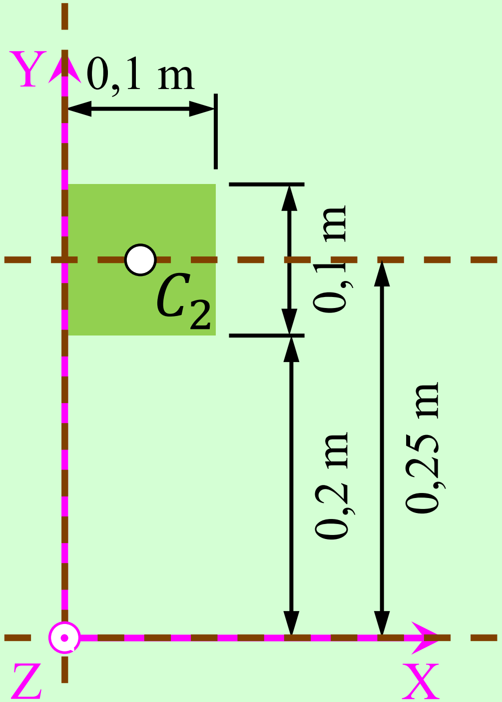
Los momentos de inercia de la parte 1 respecto a los ejes X e Y son:



$$I_{1_x} = \frac{1}{3} 0{,}9 \times 0{,}2^2 = 0{,}012\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

$$I_{1_y} = \frac{1}{3} 0{,}9 \times 0{,}3^2 = 0{,}027\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

Los de la parte 2 son:

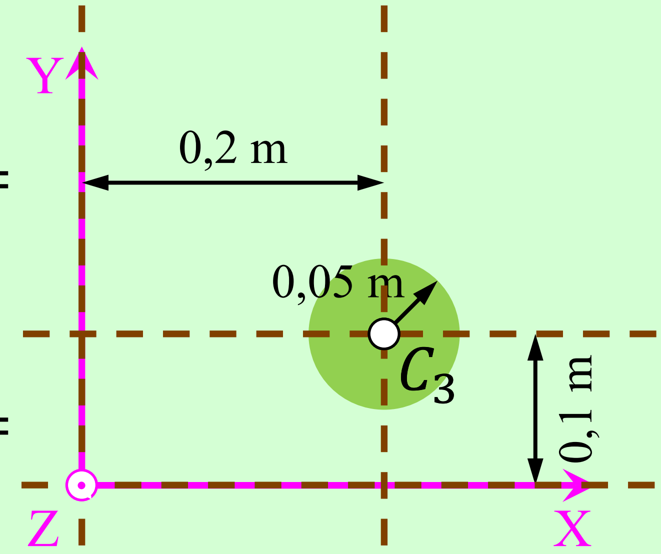


$$I_{2_x} = \frac{1}{12} 0{,}15 \times 0{,}1^2 + 0{,}15 \times 0{,}25^2 =$$
$$= 0{,}0095\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

$$I_{2_y} = \frac{1}{3} 0{,}15 \times 0{,}1^2 = 0{,}0005\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

Los de la parte 3 son:

$$I_{3_x} = \frac{1}{4}0{,}1178 \times 0{,}05^2 + 0{,}1178 \times 0{,}1^2 =$$
$$= 0{,}001252\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$
$$I_{3_y} = \frac{1}{4}0{,}1178 \times 0{,}05^2 + 0{,}1178 \times 0{,}2^2 =$$
$$= 0{,}004786\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$



Por tanto,

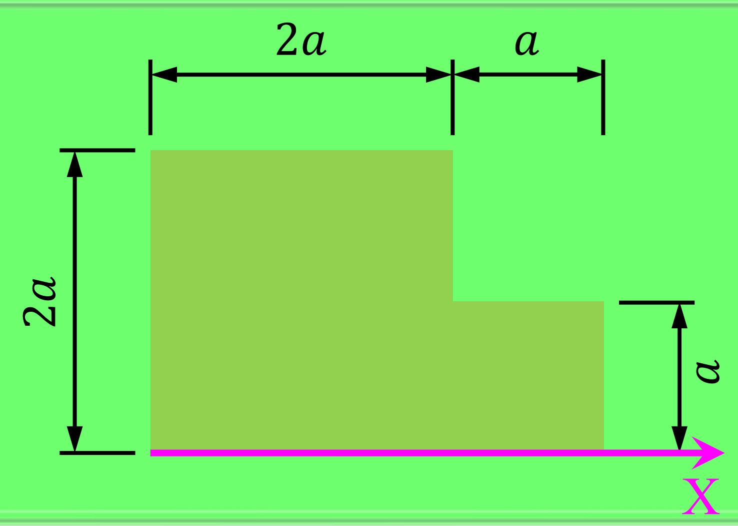
$$I_x = I_{1_x} + I_{2_x} - I_{3_x} = 0{,}012 + 0{,}0095 - 0{,}001252 =$$
$$= 0{,}02025\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$
$$I_y = I_{1_y} + I_{2_y} - I_{3_y} = 0{,}027 + 0{,}0005 - 0{,}004786 =$$
$$= 0{,}02271\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

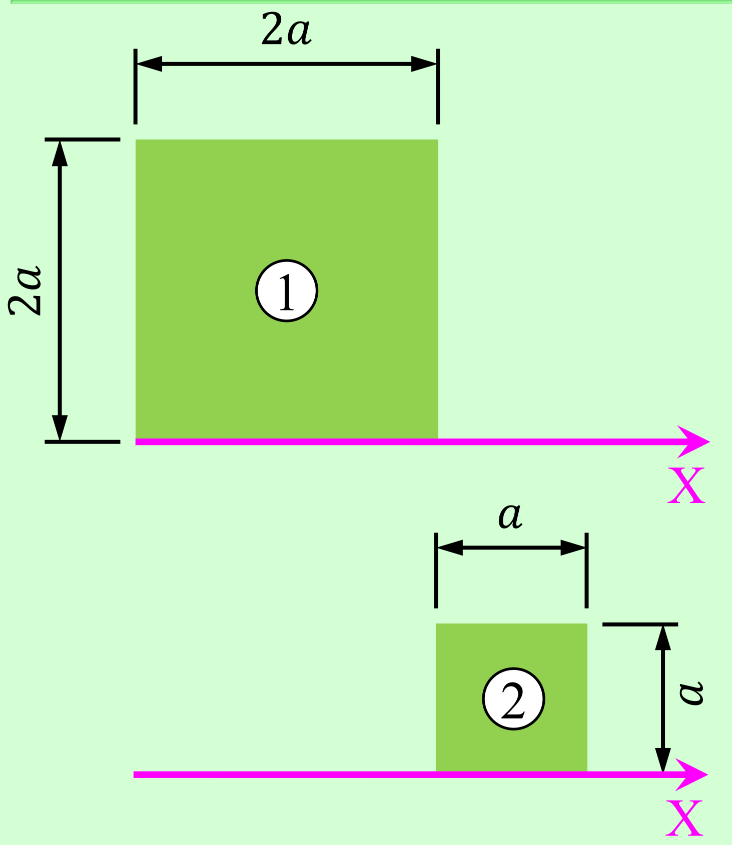
Se trata de un sólido rígido plano. Aplicando el teorema de las tres perpendiculares,

$$I_z = I_x + I_y = 0{,}02025 + 0{,}02271 = 0{,}04296\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

Ejercicio 29

Obténgase la expresión del momento de inercia, respecto al eje X, de la placa homogénea de la figura, en función de su masa M y de la longitud a.





Consideremos la placa constituida por las partes 1 y 2.

Dado que se pide que el resultado se exprese en función de M y a, hay que obtener las masas de las partes como función de estos mismos parámetros.

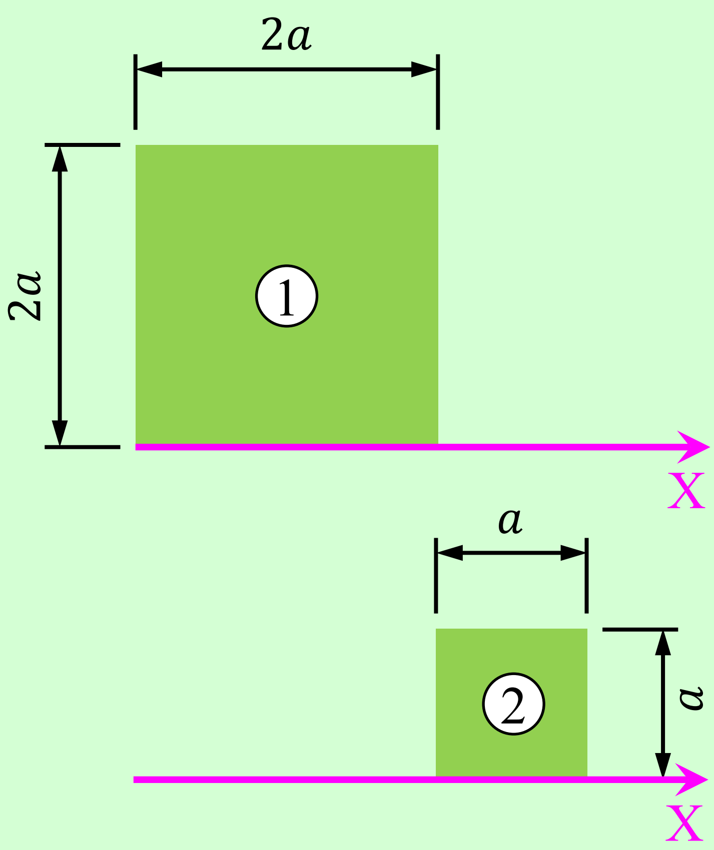
Las áreas de las partes 1 y 2, y la de la placa completa, son:

$$S_1 = (2a)(2a) = 4a^2$$

$$S_2 = aa = a^2$$

$$S = S_1 + S_2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2$$

Como la placa es homogénea, la relación de la masa de la parte 1, m_1, a la masa total M, es la misma que existe entre las áreas. Por tanto,



$$\frac{m_1}{M} = \frac{S_1}{S} = \frac{4a^2}{5a^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow m_1 = \frac{4}{5}M$$

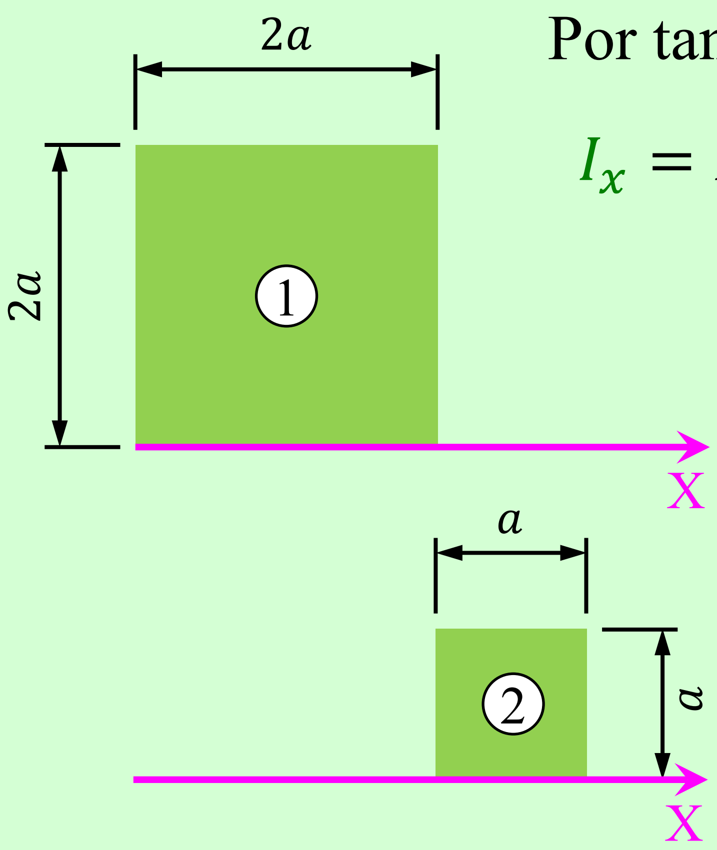
Análogamente, la masa m_2 de la parte 2 se obtiene como sigue.

$$\frac{m_2}{M} = \frac{S_2}{S} = \frac{a^2}{5a^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{5}M$$

Los momentos de inercia de las partes respecto al eje X son:

$$I_{1_x} = \frac{1}{3} m_1 (2a)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}M\right) 4a^2 = \frac{16}{15} Ma^2$$

$$I_{2_x} = \frac{1}{3} m_2 a^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}M\right) a^2 = \frac{1}{15} Ma^2$$

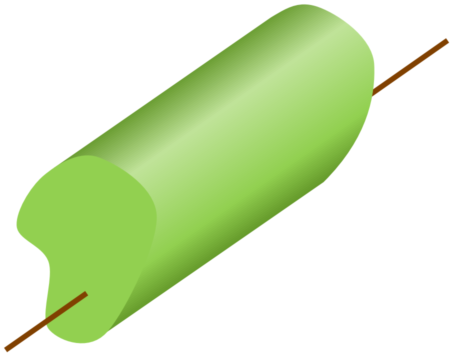


Por tanto,

$$I_x = I_{1_x} + I_{2_x} = \frac{16}{15} Ma^2 + \frac{1}{15} Ma^2 = \frac{17}{15} Ma^2$$

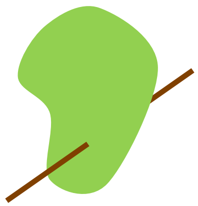
Prisma y eje perpendicular a su base

Sea un prisma recto homogéneo, de masa m, y cuya base tiene forma cualquiera.



Sea un eje perpendicular a esa base.

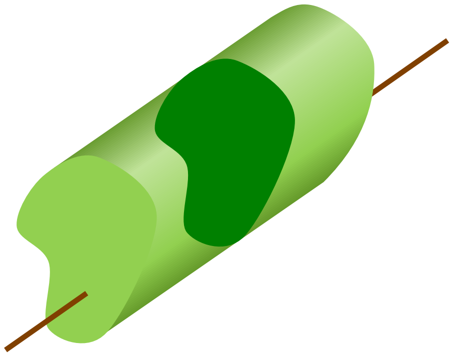
Sea una figura plana homogénea, de masa m' y la misma forma que la base del prisma.



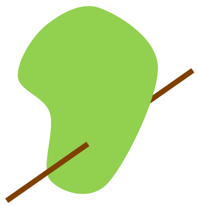
Sea $I' = Fm'$ la expresión del momento de inercia de esa figura plana respecto al mismo eje utilizado con el prisma, donde F es un factor que depende de la forma y del eje.

Como ejemplo, si se trata de un círculo y el eje pasa por su centro, es $I' = \frac{1}{2}m'R^2$, y por tanto $F = \frac{1}{2}R^2$.

Prisma y eje perpendicular a su base



Se puede dividir el prisma en infinitas "rebanadas" de grosor infinitesimal y masa dm.



Cada rebanada se puede considerar una forma plana, por lo que su momento de inercia es $dI = Fdm$.

Como el valor de F es el mismo para todas las rebanadas, la suma de los momentos de inercia de todas ellas (esto es, la integral) es

$$I = \int Fdm = F\int dm = Fm$$

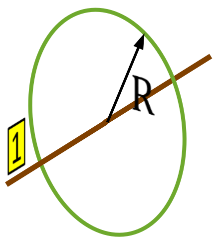
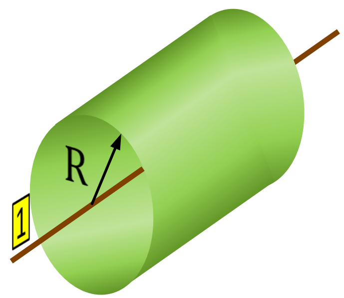
Prisma y eje perpendicular a su base

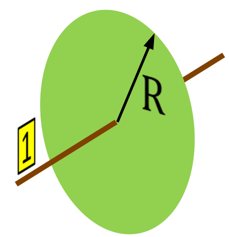
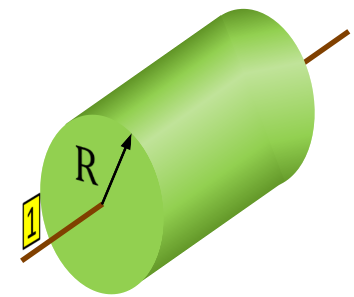
Por tanto, la expresión del momento de inercia del prisma recto homogéneo es la misma que la de su base, sin más que utilizar la masa del primero en lugar de la de la segunda.

Recuérdese que esto solo es válido para ejes perpendiculares a la base del prisma.

Prisma y eje perpendicular a su base

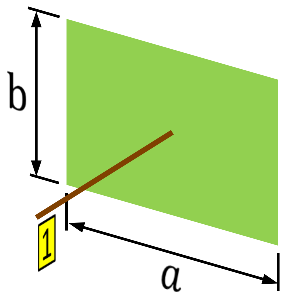
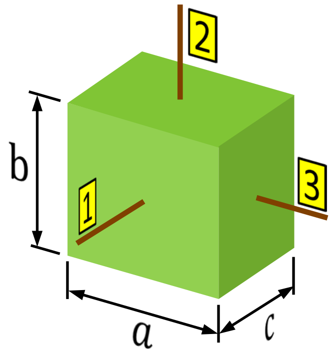
Ejemplos:

Anillo delgado	Cilindro delgado
 	
$I_1 = mR^2$	$I_1 = mR^2$

Disco delgado	Cilindro macizo
 	
$I_1 = \frac{1}{2} mR^2$	$I_1 = \frac{1}{2} mR^2$

Prisma y eje perpendicular a su base

Ejemplos:

Placa rectang. delgada	Ortoedro
	
$I_1 = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$	$I_1 = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$ $I_2 = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2)$ $I_3 = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$

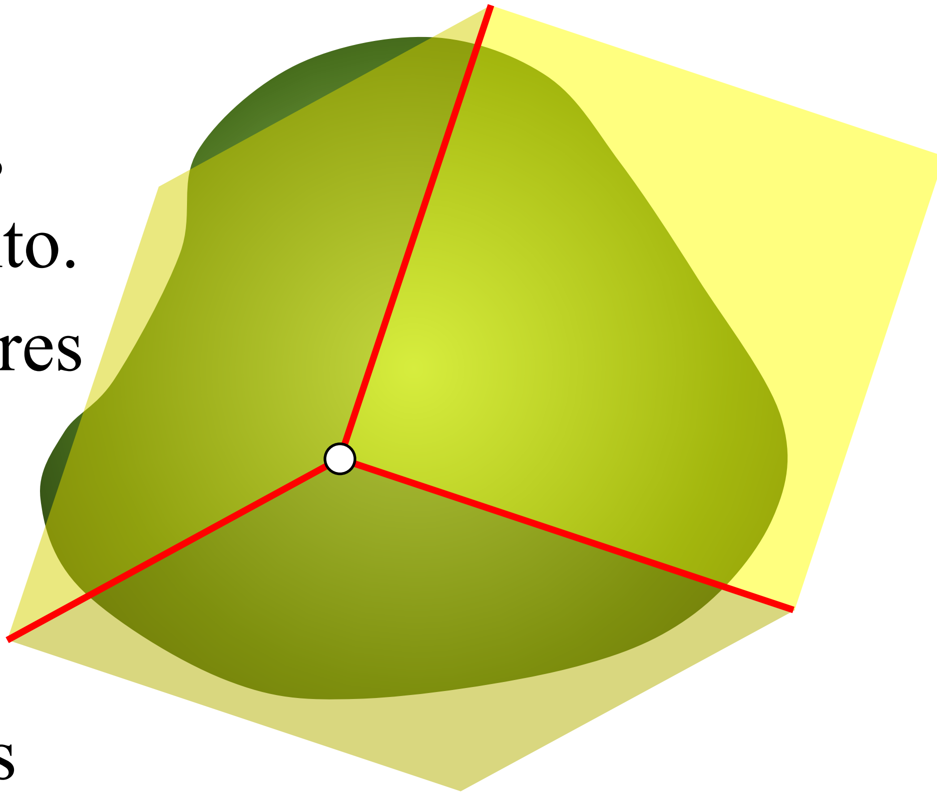
Relaciones entre momentos de inercia

Sea un sistema cualquiera de puntos materiales.

Sea un punto cualquiera.

Sean tres ejes, perpendiculares entre sí, que pasan por ese punto.

Sean tres planos, perpendiculares entre sí, cada uno conteniendo una pareja de esos ejes.

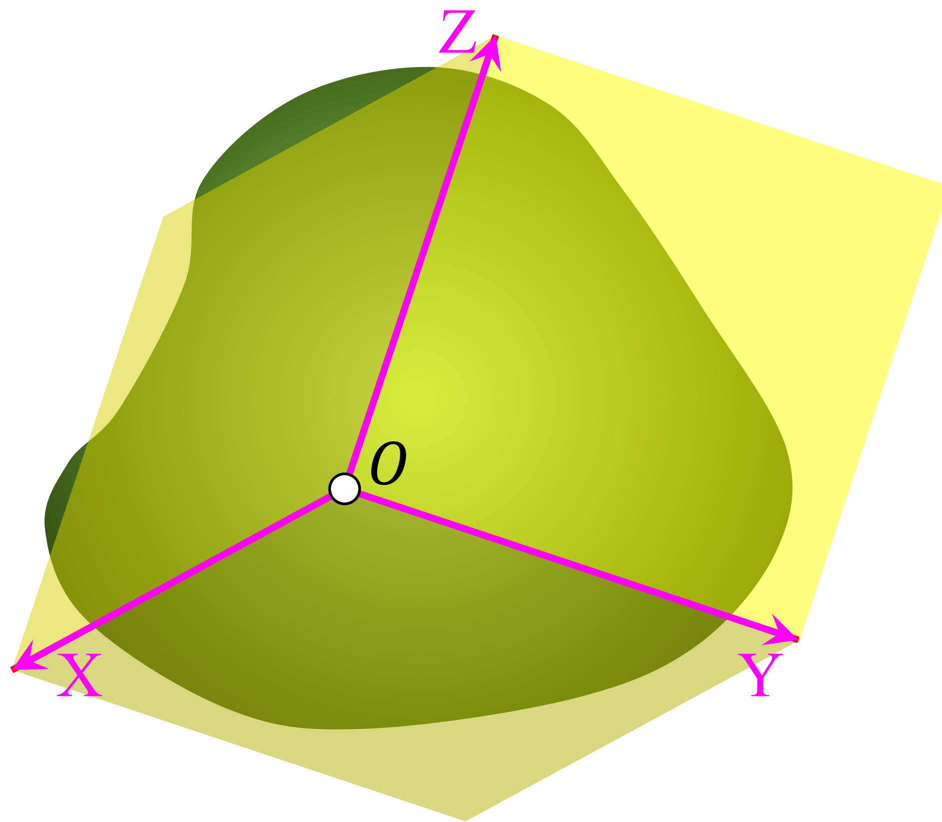


Vamos a obtener las relaciones existentes entre los momentos de inercia del sistema respecto a esos planos, ejes y punto.

Relaciones entre momentos de inercia

Por simplicidad, adoptamos un sistema de referencia tal que:

- el origen de coordenadas está en el punto;
- los ejes X, Y y Z coinciden con los ejes considerados;
- los planos XY, XZ e YZ coinciden, por tanto, con los planos considerados.



Pretendemos encontrar las relaciones entre los momentos de inercia I_O (respecto al punto O), I_x, I_y, I_z (respecto a los ejes), I_{xy}, I_{xz} e I_{yz}, (respecto a los planos).

Relaciones entre momentos de inercia

Estos momentos de inercia son:

$$I_O = \sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right)$$

$$I_x = \sum m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right)$$

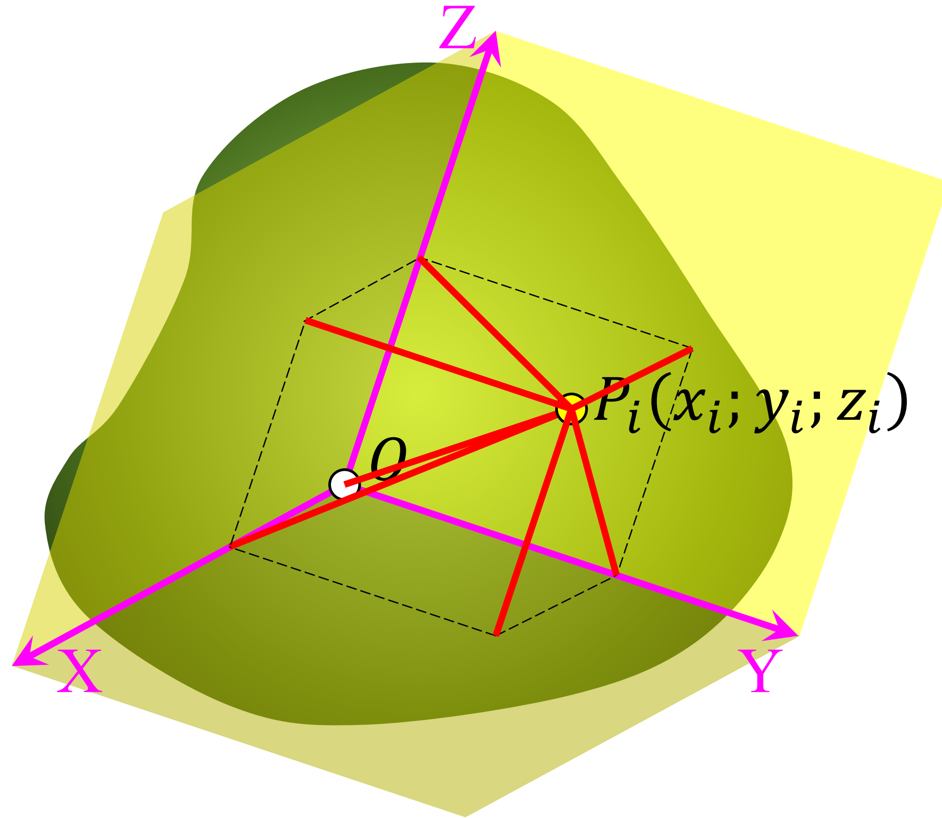
$$I_y = \sum m_i\left(x_i^2 + z_i^2\right)$$

$$I_z = \sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

$$I_{xy} = \sum m_i z_i^2$$

$$I_{xz} = \sum m_i y_i^2$$

$$I_{yz} = \sum m_i x_i^2$$



Relaciones entre momentos de inercia

Estos momentos de inercia son:

$$I_O = \sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right)$$

$$I_x = \sum m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right)$$

$$I_y = \sum m_i\left(x_i^2 + z_i^2\right)$$

$$I_z = \sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

$$I_{xy} = \sum m_i z_i^2$$

$$I_{xz} = \sum m_i y_i^2$$

$$I_{yz} = \sum m_i x_i^2$$

Por tanto:

$$\boxed{I_O = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}}$$

$$I_O = I_x + I_{yz}$$
$$I_O = I_y + I_{xz}$$
$$I_O = I_z + I_{xy}$$

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}$$
$$I_y = I_{xy} + I_{yz}$$
$$I_z = I_{xz} + I_{yz}$$

$$\boxed{I_O = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y + I_z\right)}$$

Relaciones entre momentos de inercia

El momento de inercia respecto a un punto, es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a tres planos, perpendiculares entre sí, que pasan por dicho punto.

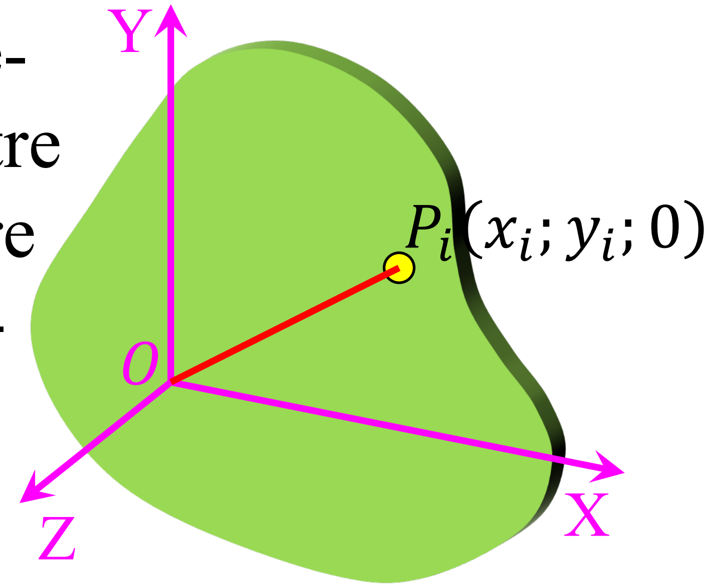
El momento de inercia respecto a un punto, es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a un eje y un plano, perpendiculares entre sí, que pasan por dicho punto.

El momento de inercia respecto a un eje, es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos planos, perpendiculares entre sí, que contienen dicho eje.

El momento de inercia respecto a un punto, es igual a la <u>semisuma</u> de los momentos de inercia respecto a tres ejes, perpendiculares entre sí, que pasan por dicho punto.

Relaciones entre momentos de inercia

Sea un sistema plano de puntos materiales, y tres ejes perpendiculares entre sí, dos de ellos (X e Y) situados sobre dicho sólido, y el tercero (Z) perpendicular a él.



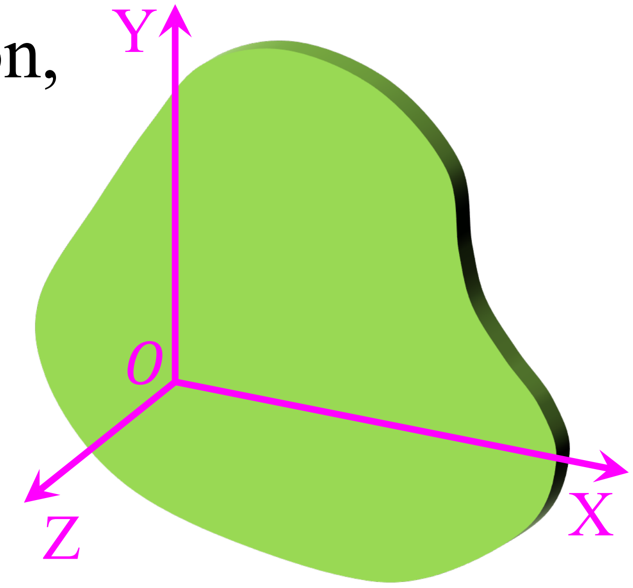
Sea $P_i(x_i; y_i; 0)$ un punto material cualquiera del sólido.

Nótese que la distancia de ese punto al eje Z, es la misma que al origen de coordenadas O. Lo mismo sucede con cualquier otro punto. Por tanto, $I_O = I_z$.

Como se mostrará a continuación, de aquí se deduce que el teorema de las tres perpendiculares es un caso particular de la cuarta relación de la página anterior.

Relaciones entre momentos de inercia

En efecto, partiendo de dicha relación, y sabiendo que en nuestro caso es $I_O = I_z$, se tiene que:



$$I_O = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y + I_z\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2I_O = I_x + I_y + I_z \Rightarrow$$

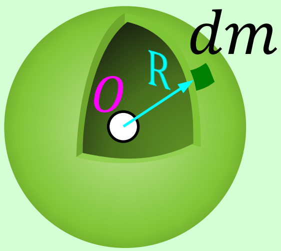
$$\Rightarrow 2I_z = I_x + I_y + I_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_z = I_x + I_y$$

Ejercicio 30

Determínese el momento de inercia de una esfera hueca homogénea muy fina, de masa m y radio R, respecto a: a) su centro; b) un eje de simetría.

a) Se puede dividir la esfera hueca en infinitos trozos infinitesimales de masa dm.



Cada trozo se puede considerar un punto, por lo que su momento de inercia respecto al centro es

$$dI_O = dmR^2$$

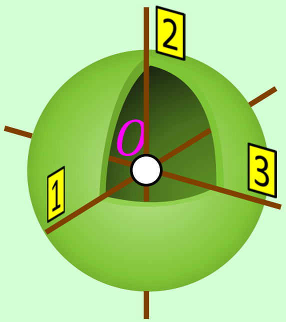
Como todos los trozos tienen el mismo valor de R, la suma de los momentos de inercia de todos ellos (esto es, la integral) es

$$I_O = \int (dmR^2) = \left[\int dm\right] R^2 = mR^2$$

b) Por simetría, los momentos de inercia respecto a los ejes 1, 2 y 3 son iguales entre sí.

$$I_1 = I_2 = I_3$$

Sabemos que "el momento de inercia respecto a un punto, es igual a la semisuma de los momentos de inercia respecto a tres ejes, perpendiculares entre sí, que pasan por dicho punto".



Por tanto:

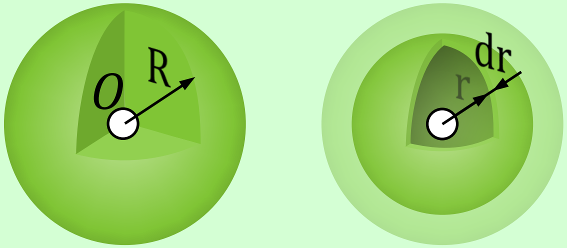
$$I_O = \frac{1}{2}(I_1 + I_2 + I_3)$$

Así:

$$mR^2 = \frac{1}{2}(I_1 + I_1 + I_1) = \frac{3}{2}I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{2}{3}mR^2$$

Ejercicio 31

Determínese el momento de inercia de una esfera maciza homogénea muy fina, de masa m y radio R, respecto a: a) su centro; b) un eje de simetría.



a) Sea la esfera hueca de la figura de la derecha, de radio r. Su grosor infinitesimal es dr, y su masa es dm.

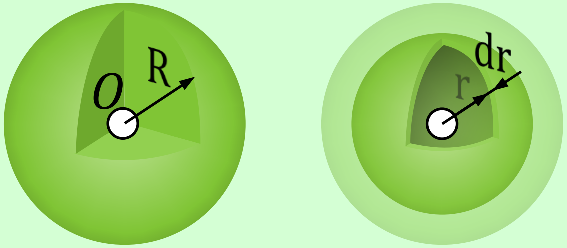
Como la esfera maciza es homogénea, la relación de la masa dm a la masa total m es la misma que existe entre los respectivos volúmenes, dV y V. Por tanto,

$$\frac{dm}{m} = \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3r^2 dr}{R^3} \Rightarrow dm = \frac{3mr^2 dr}{R^3}$$

La esfera hueca es homogénea y muy fina. Por tanto, es de aplicación la expresión del momento de inercia respecto al centro que corresponde a ese caso particular.

$$dI_O = dm\, r^2 = \frac{3mr^2dr}{R^3}r^2 = \frac{3mr^4}{R^3}dr$$

La suma de los momentos de inercia de todas las esferas huecas (esto es, la integral), cuyos radios son $r \in [0; R]$, es

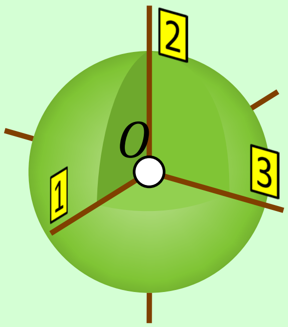


$$I_O = \int_0^R \frac{3mr^4}{R^3}dr = \left[\frac{3mr^5}{5R^3}\right]_0^R = \frac{3mR^5}{5R^3} - \frac{3m0^5}{5R^3} = \frac{3}{5}mR^2$$

b) Por simetría, los momentos de inercia respecto a los ejes 1, 2 y 3 son iguales entre sí.

$$I_1 = I_2 = I_3$$

Sabemos que “el momento de inercia respecto a un punto, es igual a la semisuma de los momentos de inercia respecto a tres ejes, perpendiculares entre sí, que pasan por dicho punto”.



Por tanto,

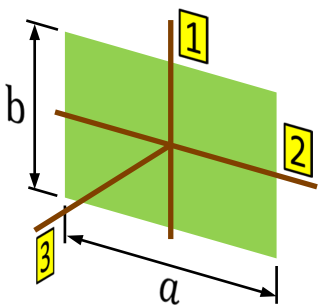
$$I_O = \frac{1}{2}(I_1 + I_2 + I_3)$$

Así,

$$\frac{3}{5}mR^2 = \frac{1}{2}(I_1 + I_1 + I_1) = \frac{3}{2}I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{2}{5}mR^2$$

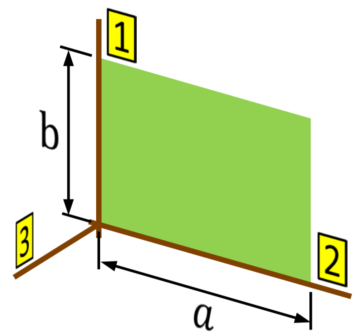
Ejemplos de momentos de inercia

Momentos de inercia de cuerpos homogéneos típicos

<table>
<tr><th colspan="2">Placa rectangular delgada</th><th>Ortoedro</th></tr>
<tr>
<td>


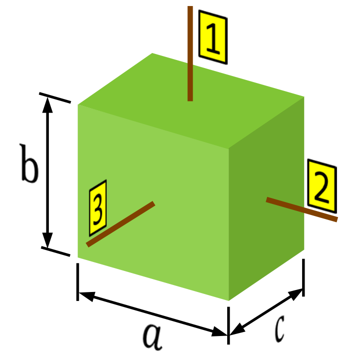
$$I_1 = \frac{1}{12} m a^2$$

$$I_2 = \frac{1}{12} m b^2$$

$$I_3 = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$
</td>
<td>


$$I_1 = \frac{1}{3} m a^2$$

$$I_2 = \frac{1}{3} m b^2$$

$$I_3 = \frac{1}{3} m (a^2 + b^2)$$
</td>
<td>


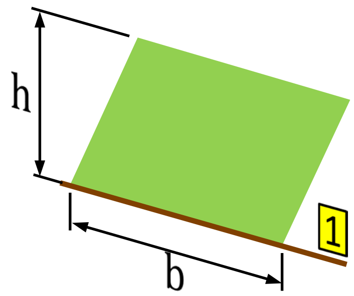
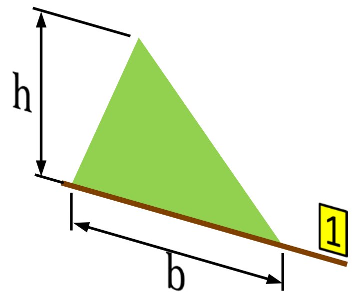
$$I_1 = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2)$$

$$I_2 = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2)$$

$$I_3 = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$
</td>
</tr>
</table>

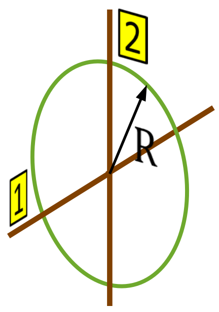
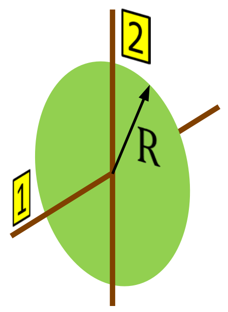
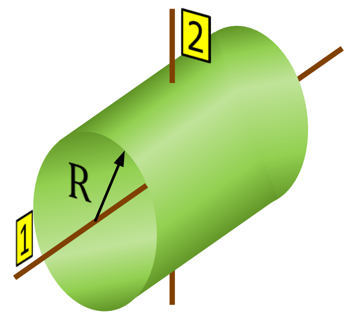
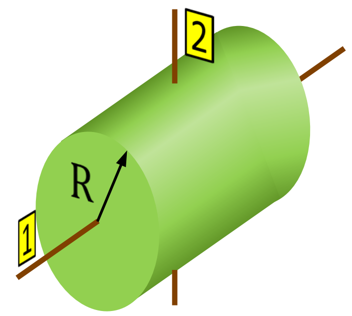
Ejemplos de momentos de inercia

Momentos de inercia de cuerpos homogéneos típicos

Paralelogramo delgado	Triángulo delgado
 $$I_1 = \frac{1}{3}mh^2$$	 $$I_1 = \frac{1}{6}mh^2$$

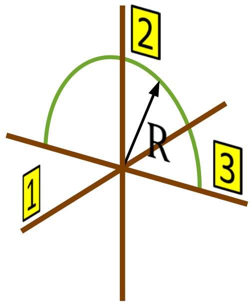
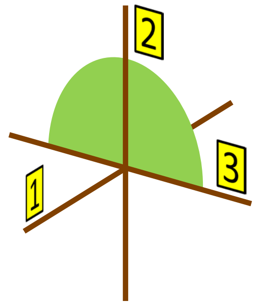
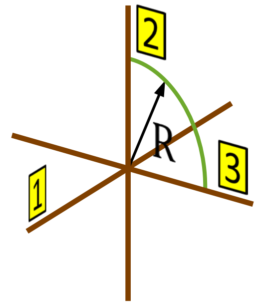
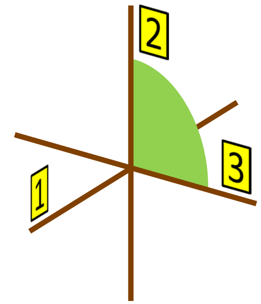
Ejemplos de momentos de inercia

Momentos de inercia de cuerpos homogéneos típicos

Anillo delgado	Disco delgado	Cilindro delgado	Cilindro macizo
			
$I_1 = mR^2$	$I_1 = \frac{1}{2}mR^2$	$I_1 = \frac{1}{2}mR^2$	$I_1 = \frac{1}{4}mR^2$
$I_2 = \frac{1}{2}mR^2$	$I_2 = \frac{1}{4}mR^2$	$I_2 = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$	$I_2 = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$

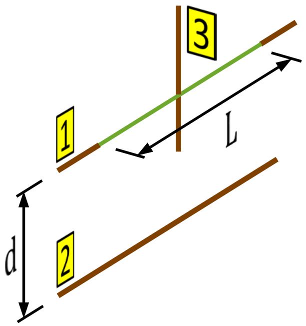
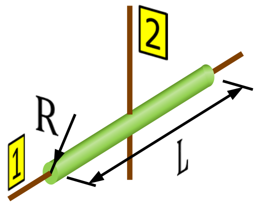
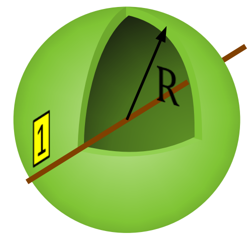
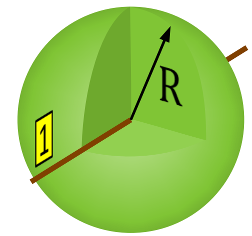
Ejemplos de momentos de inercia

Momentos de inercia de cuerpos homogéneos típicos

<table>
<tr><td>Semianillo delgado</td><td>Semidisco delgado</td><td>Cuarto de anillo delgado</td><td>Cuarto de disco delgado</td></tr>
<tr>
<td>
$$I_1 = mR^2$$
$$I_2 = I_3 = \frac{1}{2}mR^2$$</td>
<td>
$$I_1 = \frac{1}{2}mR^2$$
$$I_2 = I_3 = \frac{1}{4}mR^2$$</td>
<td>
$$I_1 = mR^2$$
$$I_2 = I_3 = \frac{1}{2}mR^2$$</td>
<td>
$$I_1 = \frac{1}{2}mR^2$$
$$I_2 = I_3 = \frac{1}{4}mR^2$$</td>
</tr>
</table>

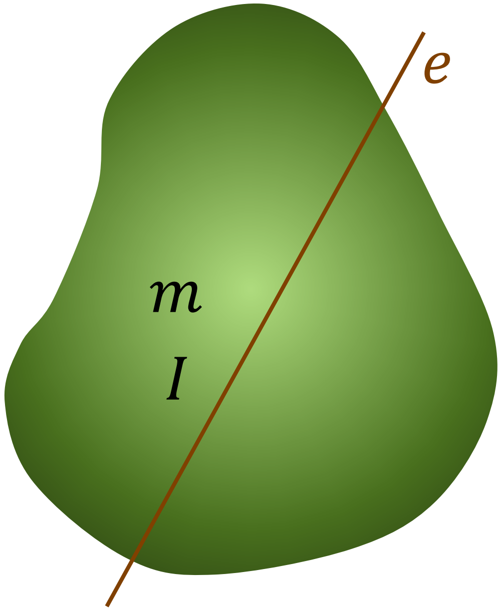
Ejemplos de momentos de inercia

Momentos de inercia de cuerpos homogéneos típicos

Alambre	Barra delgada	Esfera hueca	Esfera maciza
			
$I_1 = 0$ $I_2 = md^2$ $I_3 = \frac{1}{12}mL^2$	$I_1 = \frac{1}{2}mR^2$ $I_2 = \frac{1}{12}mL^2$	$I_1 = \frac{2}{3}mR^2$	$I_1 = \frac{2}{5}mR^2$

Radio de giro

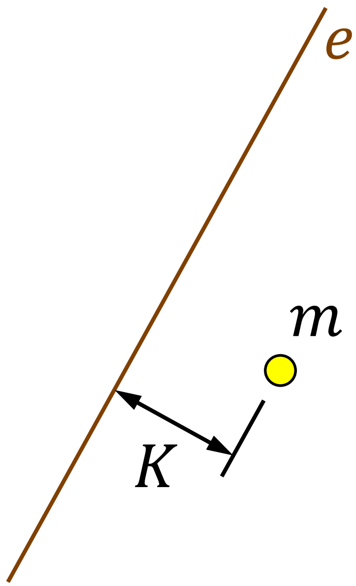
Se denomina radio de giro de un sólido rígido respecto a un eje, a la distancia del eje a la que tendría que colocarse un único punto material, con toda la masa del sólido, para que tuviera su mismo momento de inercia.



Sea m la masa del sólido, e I su momento de inercia respecto al eje considerado.

El momento de inercia de un punto material de la misma masa m, situado a una distancia K del mismo eje, es

$$I_p = mK^2$$



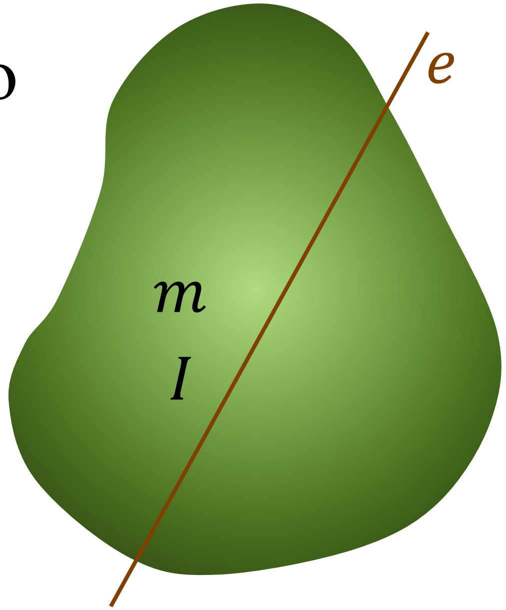
Radio de giro

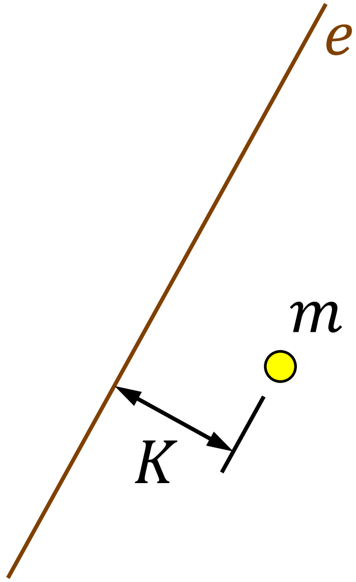
Para que el punto tenga el mismo momento de inercia que el sólido, ha de ser

$$I = I_p = mK^2$$

Por tanto, la distancia del eje a la que ha de hallarse (el radio de giro) es

$$\boxed{K = \sqrt{I/m}}$$





Importancia del momento de inercia

¿Por qué este concepto es relevante para nosotros?

- La denominada ecuación fundamental de la Dinámica de rotación establece que el momento de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sólido rígido en rotación, es igual a su momento de inercia respecto al eje de giro por la aceleración angular.
- El momento de inercia simplifica el análisis del movimiento de un sólido rígido, y el cálculo de su momento angular y su energía cinética.
- La resistencia de una viga a deformarse por flexión viene dada por el momento de inercia de su sección. Dicho momento de inercia es análogo al aquí tratado, salvo que se trabaja con áreas en lugar de con masas ($\sum S_i r_i^2$ en lugar de $\sum m_i r_i^2$).