FÍSICA TÉCNICA

Cinemática

V. 1.00.00

Marcos H. Giménez
Isabel Salinas
Vanesa P. Cuenca
Juan A. Monsoriu

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
ETSI Aeroespacial y Diseño Industrial

Créditos

Título:
Física Técnica

Subtítulo:
Cinemática

Autores:
Marcos H. Giménez, Isabel Salinas, Vanesa P. Cuenca y Juan A. Monsoriu

Editorial:
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial y Diseño Industrial

Valencia 2024

ISBN: 978-84-09-58856-5
Versión digital

Índice

Pulsando sobre el número de una página, se regresa a este índice.

Índice (2)

II.- Casos particulares

III.- Composición de movimientos

Índice (3)

IV.- Movimiento relativo

Índice (ejercicios)

Ejercicio 1

El vector de posición de un punto es $\vec{r} = (6t; t^3 - 20t; 3)$ (SI). Obténgase para $t = 2$ s: la posición; la velocidad y su módulo; la aceleración y su módulo; los módulos de las componentes intrínsecas de la aceleración, con signos en su caso; y el radio de curvatura.
Obténgase también para dicho instante: las componentes intrínsecas de la aceleración; los vectores unitarios tangente y normal; y las coordenadas del centro de curvatura.

Ejercicio 2

Un móvil recorre la trayectoria $y^3 = 2x^2$ (SI) a partir del punto $(2; 2)$ m, de tal modo que la proyección de la velocidad sobre el eje OY es constante e igual a $2\ \mathrm{m/s}$. Hállese las expresiones, en función del tiempo, de: a) el vector de posición; b) la velocidad; c) la aceleración.

Ejercicio 3

Un punto describe una trayectoria circular de radio $R = 3$ m. La posición angular de dicho punto respecto a una cierta referencia es $\theta = 0{,}1t^3$ (SI). Obténgase para $t = 2$ s su posición angular y los módulos de: velocidad angular; aceleración angular; velocidad; aceleración; y componentes intrínsecas de esta.

Ejercicio 4

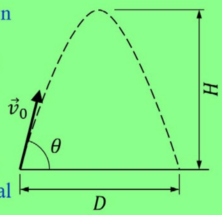
Un sólido rígido tiene una velocidad angular $\vec{\omega} = (2; -1; 3)\ \mathrm{rad/s}$, y su eje de giro pasa por el punto $Q(3; 1; 3)$ m. Obténgase las velocidades de los puntos $C(-1; 2; -3)$ m y $D(1; 1; 2)$ m del sólido.

Ejercicio 5

La boca de un cañón está situada 10 m por encima del suelo horizontal. Una bala sale disparada con una velocidad de módulo $50\ \mathrm{m/s}$ y con un ángulo de 30° sobre la horizontal. Obténgase:
a) el vector de posición de la bala y su velocidad, ambos en función del tiempo;
b) la distancia a la que llegará la bala;
c) el ángulo que forma la trayectoria con la horizontal en el momento del impacto;
d) la altura máxima que alcanzará la bala;
e) la altura a la que la bala golpearía un muro vertical si este se situara a una distancia horizontal de 200 m de la boca del cañón.

Ejercicio 6

Un cañón dispara, desde el suelo, balas con una velocidad de módulo indeterminado v_0, actuando a partir de ese instante sobre ellas la aceleración constante de la gravedad, de módulo indeterminado g. ¿Con qué ángulo θ hay que orientar el cañón respecto a la horizontal, para que la altura máxima H alcanzada por las balas sea igual a su alcance D?

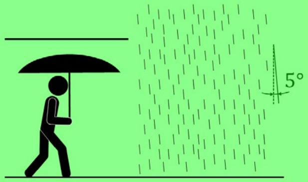


Ejercicio 7

Desde el suelo, un cañón dispara balas con una velocidad de módulo indeterminado v_0, actuando a partir de ese instante sobre ellas la aceleración constante de la gravedad, de módulo indeterminado g. El suelo es un plano inclinado que forma un ángulo indeterminado α con la vertical ($\alpha \in (0°; 180°)$). ¿Con qué ángulo θ hay que orientar el cañón respecto a la vertical, para que sea máxima la distancia D alcanzada por las balas?

Ejercicio 8

Una persona que camina a $1{,}1\ \mathrm{m/s}$ va a salir de debajo de una marquesina y se prepara para encontrarse bajo una lluvia que cae a $4{,}5\ \mathrm{m/s}$ con la inclinación de 5° que se muestra en la figura. ¿Qué ángulo ha de inclinar el paraguas respecto a la vertical? ¿Cuál es el módulo de la velocidad con la que sentirá que las gotas impactan con el paraguas?



Cinemática

La cinemática es la rama de la Física que describe el movimiento de los cuerpos, sin considerar las causas que lo originan (las fuerzas), ni las propiedades que caracterizan la respuesta a dichas causas (la masa).

La cinemática recibe también el nombre de *geometría del movimiento*.

En resumen, en lo que respecta al movimiento, la cinemática se ocupa del *cómo*, no del *por qué*.

I.- Movimiento de un punto

Vector de posición

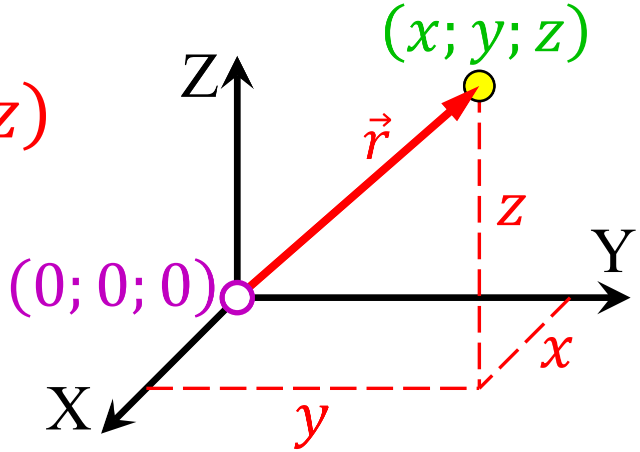
La posición de un *punto* (*partícula* desde un punto de vista más físico) queda determinada por sus coordenadas $(x; y; z)$ respecto a un sistema de referencia.

Si el punto se mueve, sus coordenadas son función del tiempo: $\big(x(t); y(t); z(t)\big)$.

El vector que une el origen de coordenadas con la posición del punto recibe el nombre de vector de posición. Se denota habitualmente por $\vec{r}$ (o por $\vec{r}(t)$ para hacer explícito que varía con el tiempo).

Vector de posición

Es $\vec{r} = (x; y; z) - (0; 0; 0) = (x; y; z)$



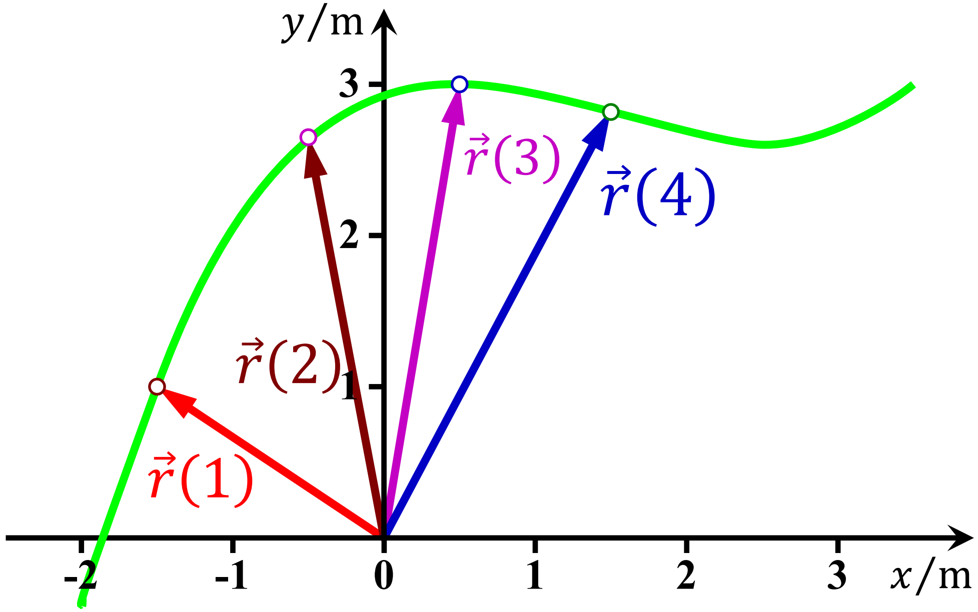
Por tanto, las componentes del vector de posición de un punto coinciden con las coordenadas de dicho punto.

La unidad SI coherente del tiempo es el segundo (s).

La unidad SI coherente del vector de posición (y por tanto también de sus componentes) es el metro (m).

Trayectoria

Se denomina trayectoria de un punto al lugar geométrico de las posiciones que ocupa en su movimiento.



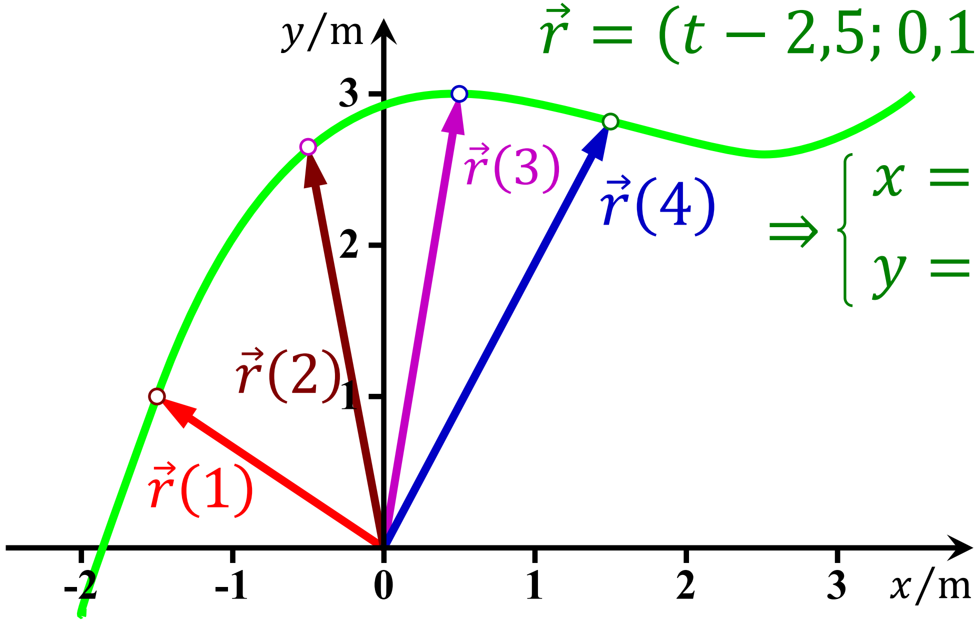
Trayectoria

Las propias componentes del vector de posición son ecuaciones paramétricas de la trayectoria.

Ejemplo

$$\vec{r} = (t - 2{,}5; 0{,}1t^3 - 1{,}2t^2 + 4{,}5t - 2{,}4)\ (\mathrm{SI}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t - 2{,}5\ (\mathrm{SI}) \\ y = 0{,}1t^3 - 1{,}2t^2 + 4{,}5t - 2{,}4\ (\mathrm{SI}) \end{cases}$$



Las expresiones de las componentes en función del tiempo reciben el nombre de ecuaciones horarias.

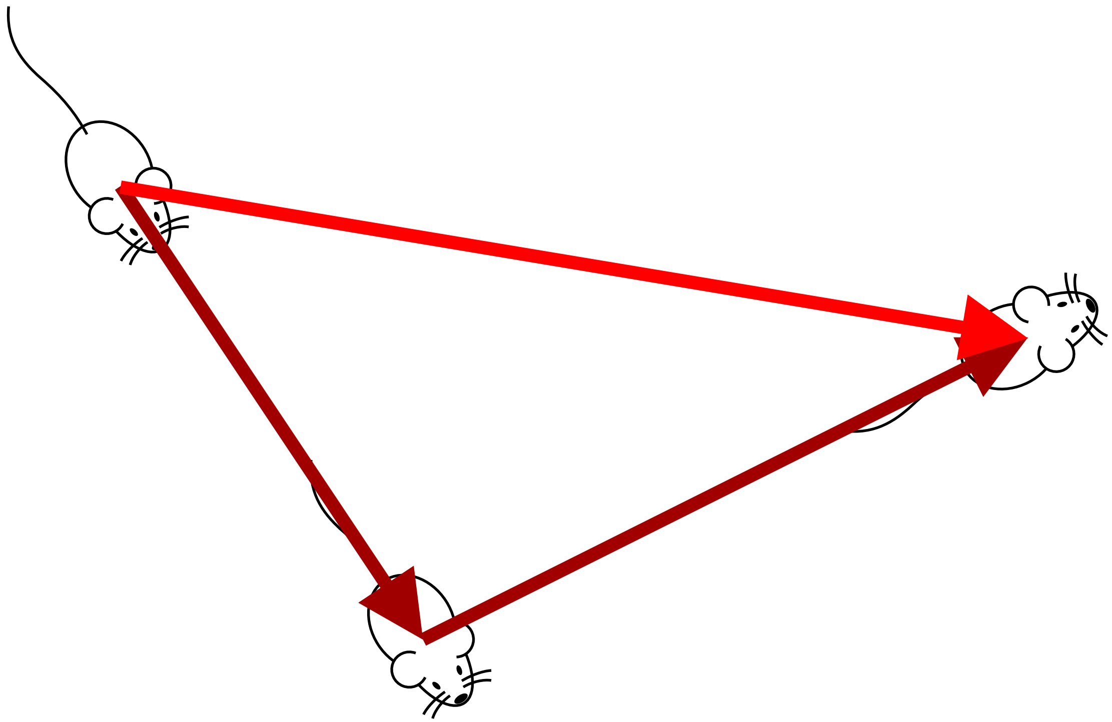
Desplazamiento

Se denomina desplazamiento de un punto entre dos posiciones al vector con origen en la primera y extremo en la segunda.

El desplazamiento es, por tanto, una magnitud vectorial.

La unidad SI coherente del desplazamiento es el metro (m).

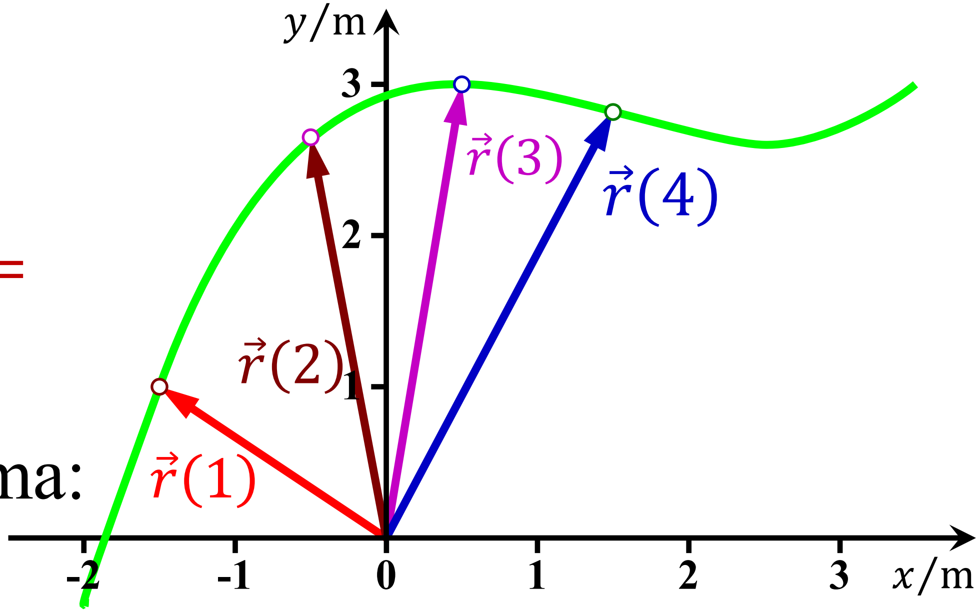
Desplazamiento



El desplazamiento entre dos posiciones es la suma de los desplazamientos parciales.

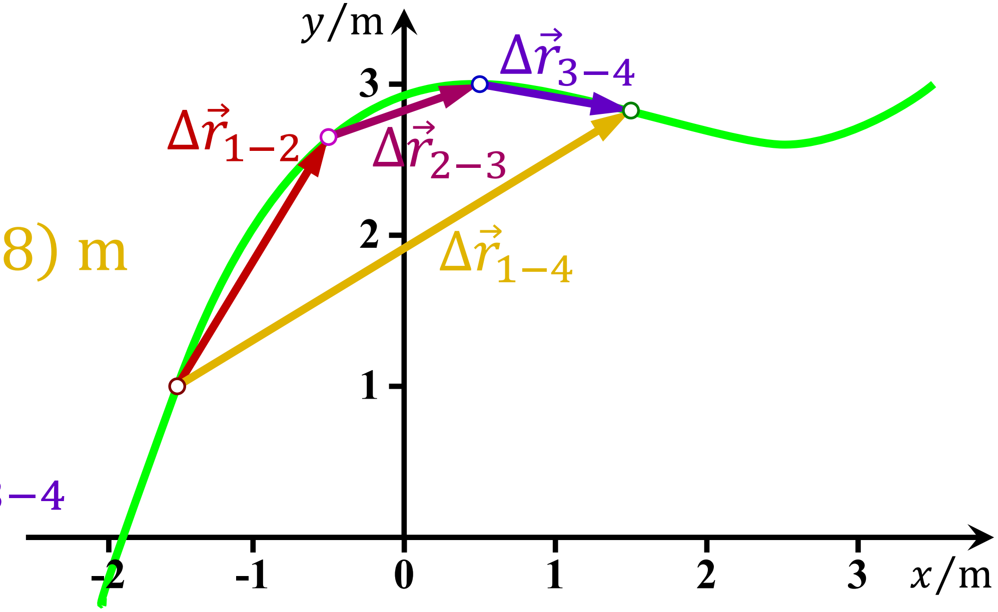
Desplazamiento

$$\Delta\vec{r}_{1-2} = \vec{r}(2) - \vec{r}(1) =$$
$$= (-0{,}5; 2{,}6) - (-1{,}5; 1) =$$
$$= (1; 1{,}6)\ \text{m}$$



Operando de la misma forma:

$$\Delta\vec{r}_{2-3} = (1; 0{,}4)\ \text{m}$$
$$\Delta\vec{r}_{3-4} = (1; -0{,}2)\ \text{m}$$



Así,

$$\Delta\vec{r}_{1-4} = \vec{r}(4) - \vec{r}(1) = (3; 1{,}8)\ \text{m}$$

Véase que

$$\Delta\vec{r}_{1-4} = \Delta\vec{r}_{1-2} + \Delta\vec{r}_{2-3} + \Delta\vec{r}_{3-4}$$

Desplazamiento y espacio recorrido

El desplazamiento es una magnitud vectorial.

El espacio recorrido es una magnitud escalar.

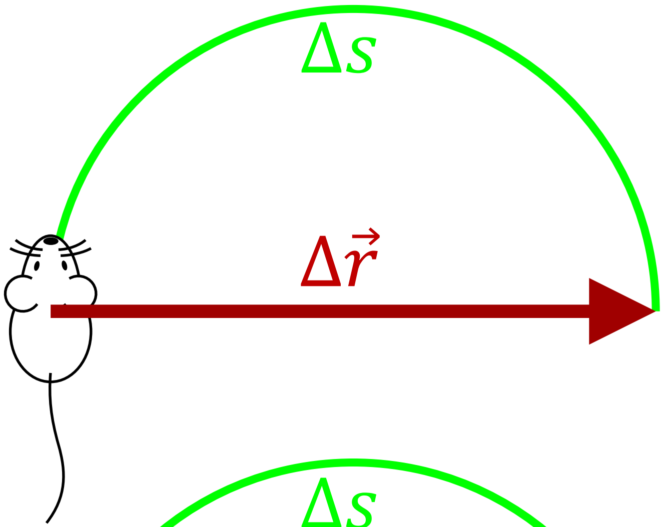
Por tanto, espacio recorrido no es lo mismo que desplazamiento.

¿Y espacio recorrido es el módulo del desplazamiento?

En general, no.

Solo en tramos rectilíneos.

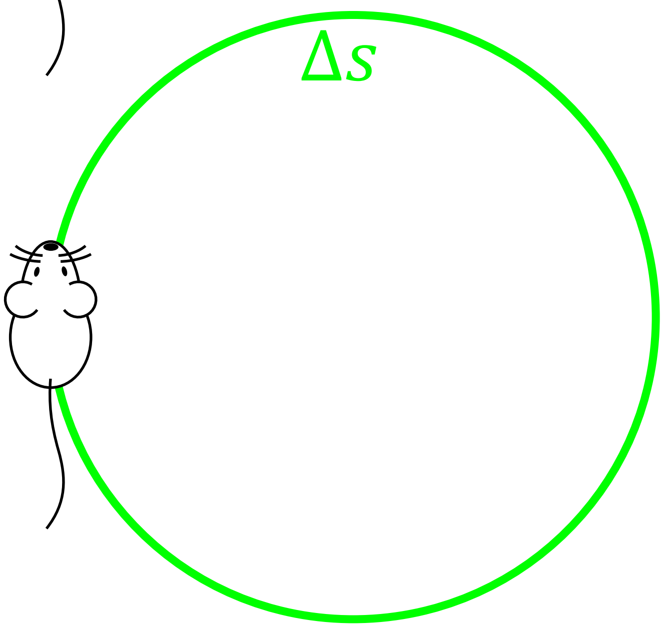
Desplazamiento y espacio recorrido



$$\Delta s = \pi R$$

$$|\Delta\vec{r}| = 2R$$

$$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$$



$$\Delta s = 2\pi R$$

$$|\Delta\vec{r}| = 0$$

$$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$$

$$|\Delta\vec{r}| = \Delta s$$

Velocidad media

Se denomina velocidad media de un punto en un intervalo de tiempo, al cociente entre el correspondiente desplazamiento, y la duración de dicho intervalo.

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Si se trata de un incremento infinitesimal de tiempo, dt, el punto tendrá un desplazamiento infinitesimal, $d\vec{r}$.*

La velocidad media en ese intervalo será $d\vec{r}/dt$.

Esa es, precisamente, la definición de velocidad.

* Sacrificando algo el rigor en beneficio de la claridad, en este documento se interpretará el diferencial de una magnitud como un incremento infinitesimal de dicha magnitud.

Velocidad

Se denomina velocidad de un punto, a la derivada de su vector de posición respecto al tiempo.

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

La velocidad es una magnitud vectorial.

El producto dimensional de la velocidad es $\dim v = \mathsf{T}^{-1}\mathsf{L}$.

La unidad SI coherente de la velocidad es el $\mathrm{m/s}$.

¿Y qué es, y cómo se realiza, la derivada de una función vectorial?

Derivada de una función vectorial

Sea una función vectorial $\vec{f}(t) = \big(x(t); y(t); z(t)\big)$.
Lo que sigue es general, esto es, la función no tiene por qué ser un vector de posición, ni la variable t el tiempo.

Se define su derivada $\vec{f}'(t)$ (o $d\vec{f}/dt$) como

$$\vec{f}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{f}(t + \Delta t) - \vec{f}(t)}{\Delta t}$$

Derivada de una función vectorial

Es

$$\frac{\vec{f}(t+\Delta t)-\vec{f}(t)}{\Delta t}=$$

$$=\frac{\big(x(t+\Delta t);y(t+\Delta t);z(t+\Delta t)\big)-\big(x(t);y(t);z(t)\big)}{\Delta t}=$$

$$=\left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t};\ \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t};\ \frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\right)$$

Derivada de una función vectorial

Tomando límites con $\Delta t \to 0$, resulta

$$\vec{f}'(t) = \left(x'(t); y'(t); z'(t)\right)$$

Con la notación alternativa,

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt}\right)$$

Por tanto, la derivada de una función vectorial se realiza derivando sus componentes.

Derivada de una función vectorial

Utilizando el laboratorio virtual *"Visualizador del concepto de derivada de un vector"* puede estudiarse la relación entre una función vectorial y su derivada.

https://riunet.upv.es/handle/10251/30530

La derivada de un vector tiene como módulo el ritmo al que se desplaza el extremo de este, y como orientación la de dicho desplazamiento.

Interpretación intuitiva: el vector cambia como si su derivada tirara de su extremo.

Laboratorio virtual

Para comprender mejor los conceptos que siguen en el bloque I, “Movimiento de un punto”, se recomienda utilizar el laboratorio virtual *“Visualizador de movimientos bidimensionales”*.

https://riunet.upv.es/handle/10251/5122

Velocidad: módulo y orientación

El módulo de la velocidad es

$$v = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{|d\vec{r}|}{dt}$$

Puesto que $d\vec{r}$ es un desplazamiento infinitesimal, se puede considerar rectilíneo, por lo que su módulo coincide con el espacio infinitesimal recorrido. Por tanto, $|d\vec{r}| = ds$.

En consecuencia, $v = ds/dt$.

Puesto que dt, aunque infinitesimal, es un escalar positivo, la orientación de $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ es la de $d\vec{r}$, esto es, tangente a la trayectoria y en el sentido de avance.

Velocidad: módulo y orientación

Recapitulemos.

- El módulo de la velocidad (en ocasiones llamado celeridad), es la derivada del espacio recorrido respecto al tiempo.

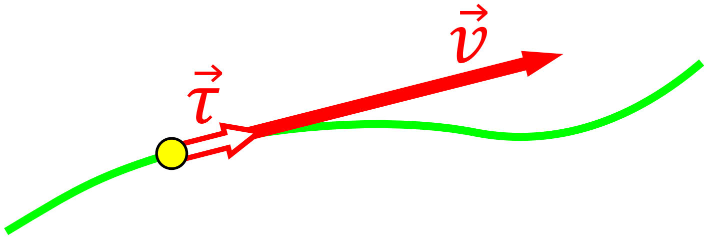
$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$

- La dirección de la velocidad es tangente a la trayectoria del punto, y su sentido el de avance de este.

Interpretación intuitiva: el vector de posición de un punto cambia como si su derivada, la velocidad, tirara de su extremo, y por tanto del propio punto.

Velocidad: módulo y orientación

Se denomina vector unitario tangente, y se denota por $\vec{\tau}$, al vector unitario de la velocidad.



$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}$$

$$\vec{v} = v\vec{\tau}$$

Dado que tiene la misma orientación que la velocidad, el vector unitario tangente también es tangente a la trayectoria del punto, con sentido el de avance de este.

El vector unitario tangente es una magnitud de dimensión uno. Su unidad SI coherente es el 1.

Aceleración media

Se denomina aceleración media de un punto en un intervalo de tiempo, al cociente entre el correspondiente incremento de velocidad, y la duración de dicho intervalo.

$$\vec{a}_{med} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Si se trata de un incremento infinitesimal de tiempo, dt, el punto tendrá un incremento infinitesimal de velocidad, $d\vec{v}$.

La aceleración media en ese intervalo será $d\vec{v}/dt$.

Esa es, precisamente, la definición de aceleración.

Aceleración

Se denomina aceleración de un punto, a la derivada de su velocidad respecto al tiempo.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

La aceleración es una magnitud vectorial.

El producto dimensional de la aceleración es

$$\dim a = \dim v \cdot \mathsf{T}^{-1} = (\mathsf{T}^{-1}\mathsf{L})\mathsf{T}^{-1} = \mathsf{T}^{-2}\mathsf{L}$$

La unidad SI coherente de la aceleración es el $\mathrm{m/s^2}$.

Interpretación intuitiva: la velocidad cambia como si su derivada, la aceleración, tirara de su extremo.

Aceleración

Para que la aceleración sea nula, $\vec{a} = \vec{0}$, la velocidad ha de ser constante, esto es, mantener tanto su módulo como su orientación.

Aunque la orientación de la velocidad sea fija (movimiento rectilíneo), si su módulo varía la aceleración no es nula.

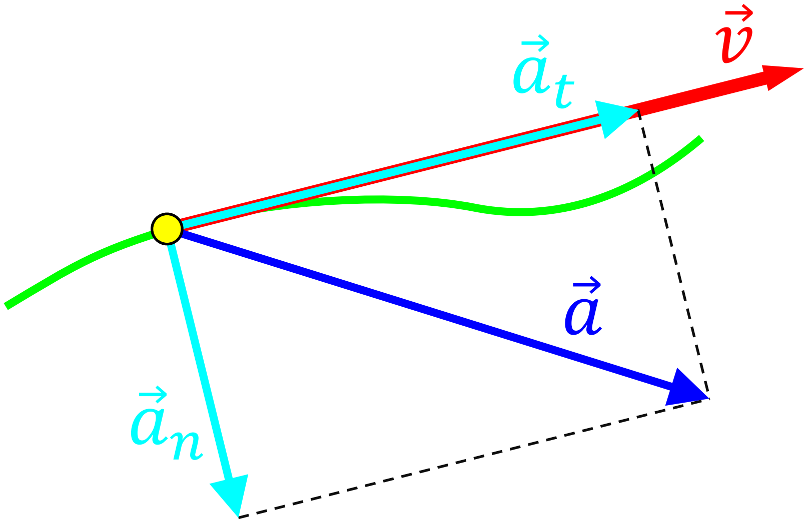
Aunque el módulo de la velocidad sea fijo (movimiento uniforme), si su orientación varía la aceleración no es nula.

Componentes intrínsecas de la aceleración

Como con cualquier vector, se puede descomponer la aceleración en dos vectores perpendiculares entre sí.

Elegimos hacerlo en las llamadas componentes intrínsecas:

- un vector tangente a la trayectoria, que se denomina aceleración tangencial, y se denota por $\vec{a}_t$;
- un vector perpendicular a la trayectoria, que se denomina aceleración normal, y se denota por $\vec{a}_n$.



Nótese que:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_t + \vec{a}_n \\ a^2 &= a_t^2 + a_n^2 \end{aligned}}$$

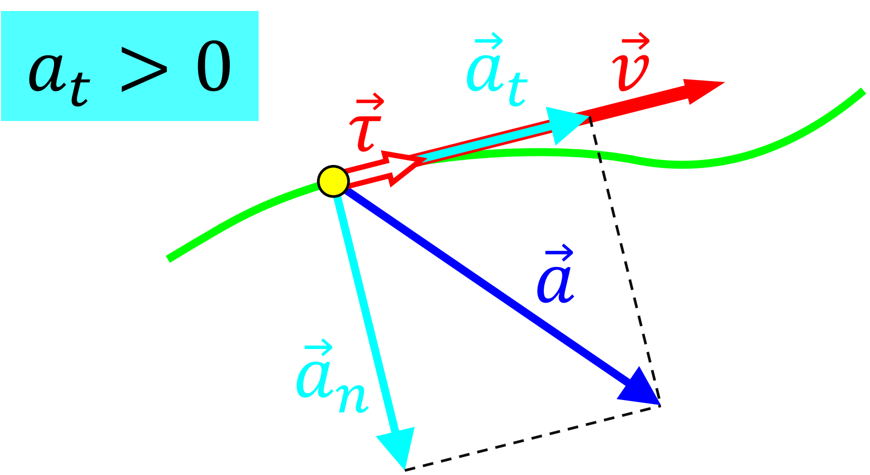
Componentes intrínsecas de la aceleración

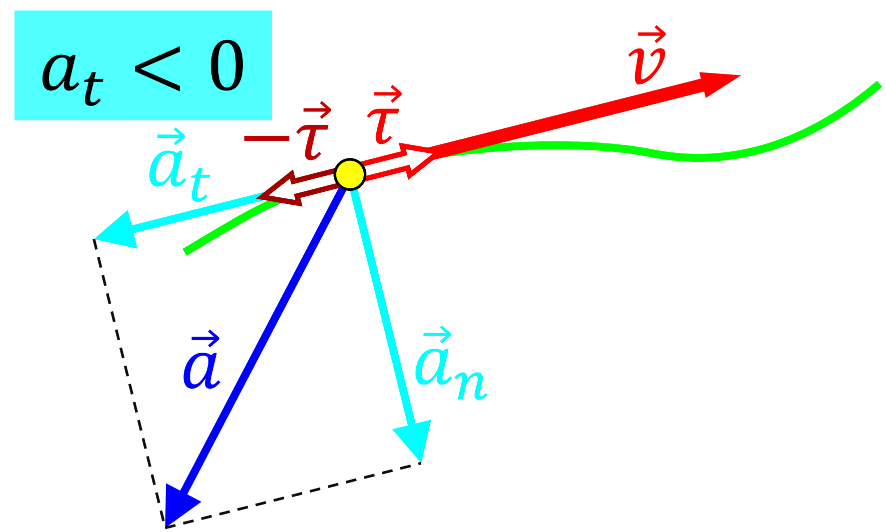
El vector unitario de $\vec{a}_t$ puede coincidir con el de $\vec{v}$ (el denominado vector unitario tangente, $\vec{\tau}$), o ser el opuesto, $-\vec{\tau}$.

En ambos casos se puede expresar $\vec{a}_t = a_t\vec{\tau}$.

Aquí, a_t es un "módulo con signo".

- $a_t > 0$ si su vector unitario es $\vec{\tau}$ ($\vec{a}_t$ tiene el sentido de $\vec{v}$).
- $a_t < 0$ si su vector unitario es $-\vec{\tau}$ ($\vec{a}_t$ tiene sentido contrario al de $\vec{v}$).





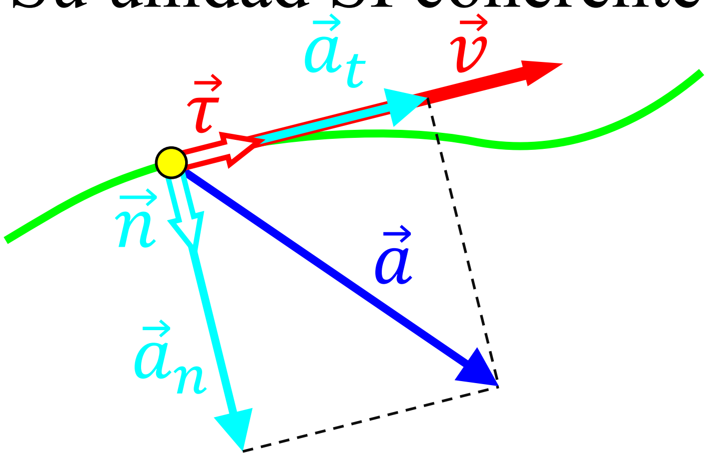
Componentes intrínsecas de la aceleración

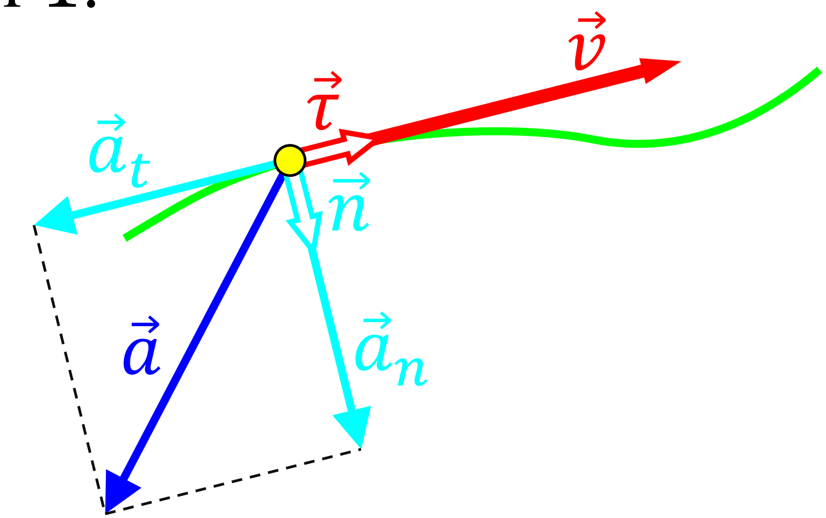
Se denomina vector unitario normal, y se denota por $\vec{n}$, al vector unitario de la aceleración normal.

$$\boxed{\vec{n} = \frac{\vec{a}_n}{a_n}} \qquad \boxed{\vec{a}_n = a_n \vec{n}}$$

Aquí a_n es el módulo de la aceleración normal, y siempre es positivo.

El vector unitario normal es una magnitud de dimensión uno. Su unidad SI coherente es el 1.

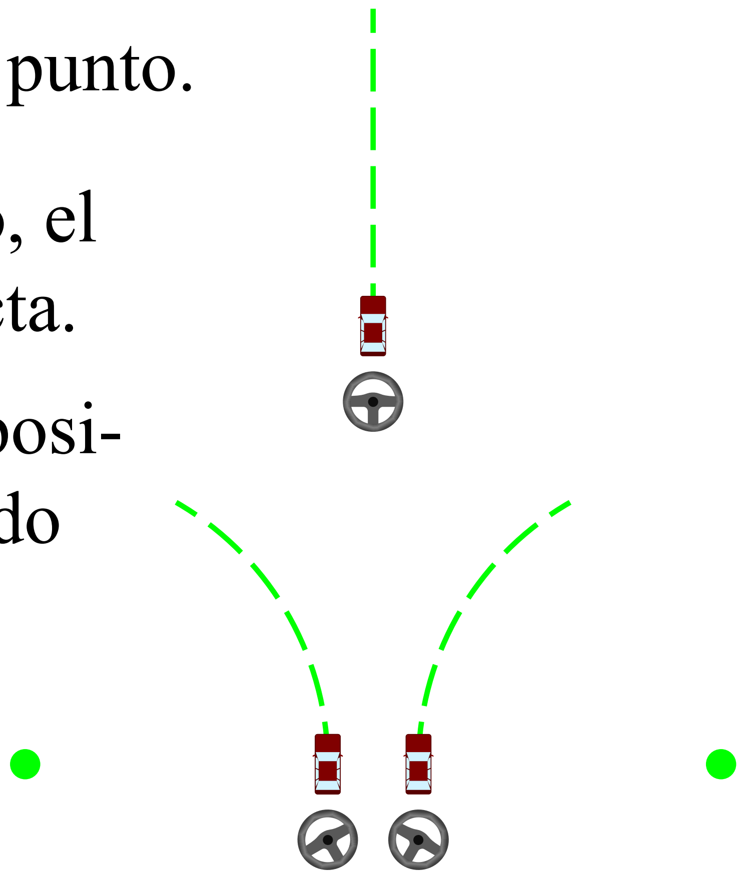




Radio de curvatura

Admitamos que un automóvil es un punto.

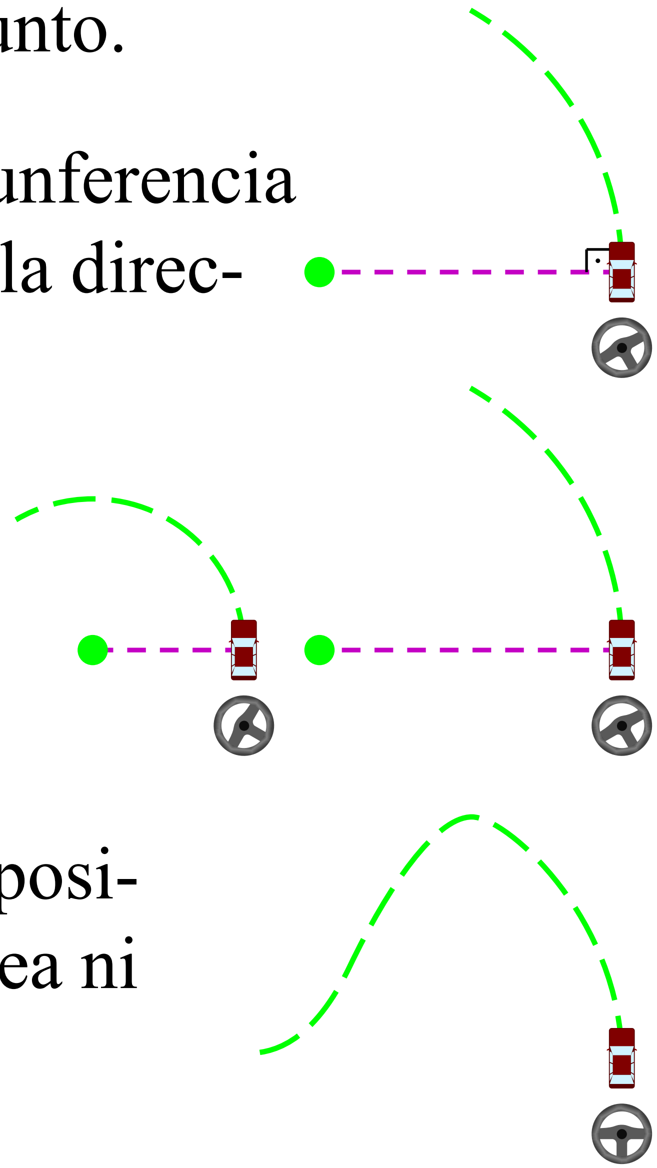
- Si se mantiene el volante centrado, el automóvil se desplaza en línea recta.
- Si se mantiene el volante en otra posición, el automóvil gira describiendo una circunferencia.
- El centro de la circunferencia está a la izquierda o a la derecha del automóvil, dependiendo del sentido en que se ha girado el volante.



Radio de curvatura

Admitamos que un automóvil es un punto.

- La línea que une el centro de la circunferencia con el automóvil es perpendicular a la dirección de la marcha.
- Cuanto más se ha girado el volante, más se curva la trayectoria, esto es, menor es el radio de la circunferencia.
- Si el volante no se mantiene en una posición fija, la trayectoria no es rectilínea ni circular.

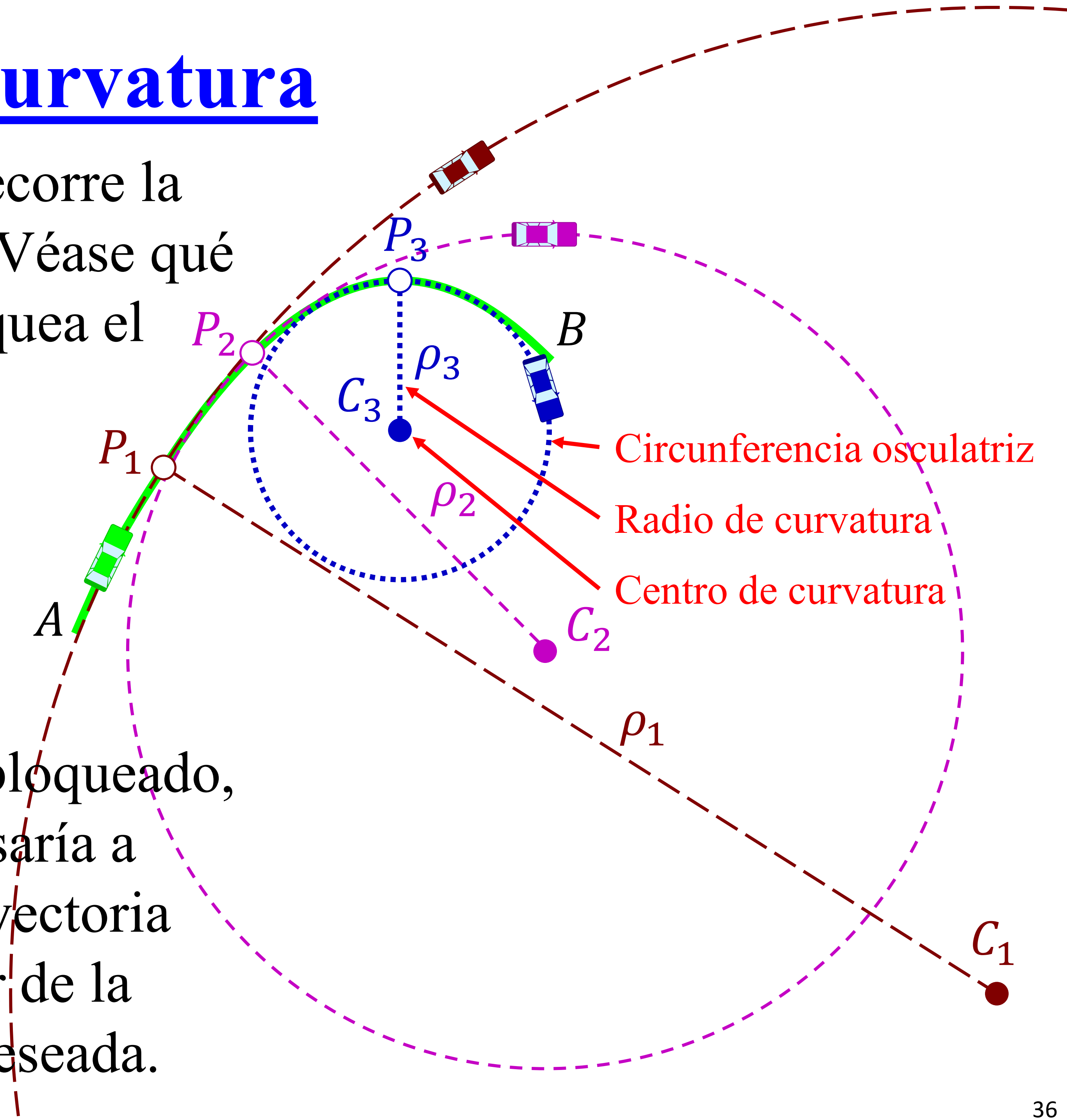


Radio de curvatura

Un automóvil recorre la trayectoria AB. Véase qué ocurre si se bloquea el volante:

- en P_1;
- en P_2;
- en P_3.

Con el volante bloqueado, el automóvil pasaría a recorrer una trayectoria circular en lugar de la originalmente deseada.



Radio de curvatura

Se denomina circunferencia osculatriz en un punto de una trayectoria, a la que mejor se adapta a la curva en el próximo arco infinitesimal.

Es la circunferencia que mejor "besa" a la curva (*osculari* es *besar*, en latín).

Se denomina centro de curvatura en un punto de una trayectoria, al centro de la circunferencia osculatriz en dicho punto.

Se denomina radio de curvatura en un punto de una trayectoria, y se denota por ρ, al radio de la circunferencia osculatriz en dicho punto.

Volvamos con la aceleración

Recapitulando,

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \begin{cases} \vec{a}_t = a_t \vec{\tau} \\ \vec{a}_n = a_n \vec{n} \end{cases}$$

Se puede demostrar (se hará más adelante) que

$$\begin{cases} \boxed{a_t = \dfrac{dv}{dt}} \\ \boxed{a_n = \dfrac{v^2}{\rho}} \end{cases}$$

Ver demostración ya

Aceleración tangencial

Analicemos la expresión $a_t = \frac{dv}{dt}$

- Si el módulo de la velocidad es constante (movimiento uniforme), entonces su derivada es cero, $a_t = 0$. Por tanto, es $\vec{a}_t = \vec{0}$.
- Si el módulo de la velocidad aumenta (v es una función creciente), entonces su derivada es positiva, $a_t > 0$. Por tanto, $\vec{a}_t$ tiene el mismo sentido que $\vec{\tau}$ y que $\vec{v}$.
- Si el módulo de la velocidad disminuye (v es una función decreciente), entonces su derivada es negativa, $a_t < 0$. Por tanto, $\vec{a}_t$ tiene sentido contrario que $\vec{\tau}$ y que $\vec{v}$.

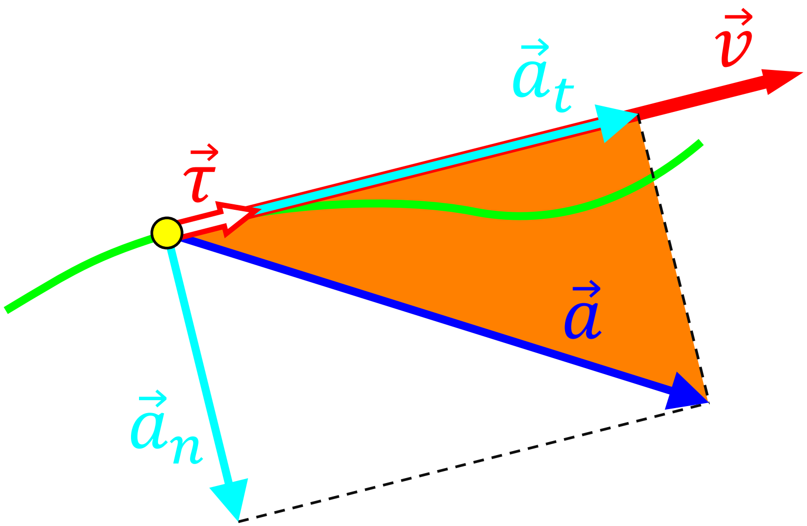
Aceleración tangencial

Nótese que el "módulo con signo" a_t es la proyección de $\vec{a}$ sobre la dirección del vector unitario tangente $\vec{\tau}$.

Por tanto, por las propiedades del producto escalar,

$$a_t = \vec{a} \cdot \vec{\tau} = \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{v} \Rightarrow \boxed{a_t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v}}$$

Expresión alternativa para el cálculo de a_t.



Obsérvese la influencia del ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{v}$.

- $a_t = 0$ si es recto.
- $a_t > 0$ si es agudo.
- $a_t < 0$ si es obtuso.

Aceleración normal

Analicemos la expresión $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$

- Mientras la aceleración tangencial indica el ritmo al que cambia el módulo de la velocidad, la aceleración normal indica el ritmo al que cambia la orientación de dicha velocidad.

- La aceleración normal, como el vector unitario normal, siempre está orientada hacia el centro de curvatura, y por tanto hacia el interior de la curva.

Aceleración normal

Analicemos la expresión $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$

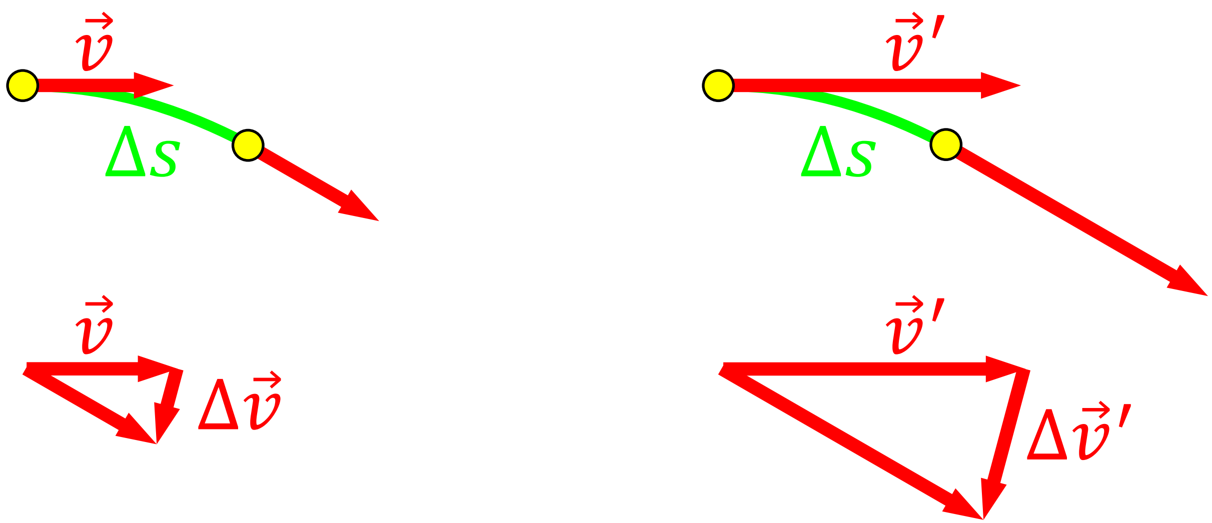
- En una trayectoria rectilínea (equivalente a una circunferencia de radio de curvatura $\rho = \infty$), es $a_n = 0$ y, por tanto, $\vec{a}_n = \vec{0}$.
- Cuanto más curvada es una trayectoria, menor es el radio de curvatura, y por tanto mayor es la aceleración normal.

Conceptualmente esto es lógico: si la trayectoria es más curvada, la velocidad debe cambiar su orientación más deprisa; y mayor ritmo de cambio implica mayor derivada.

Aceleración normal

¿Y por qué crece con el cuadrado del módulo de la velocidad?

Consideremos dos móviles que recorren trayectorias iguales, uno de ellos con velocidad $\vec{v}$ y el otro con el doble, $\vec{v}' = 2\vec{v}$, en ambos casos sin variar el módulo, por lo que solo hay aceleración normal.

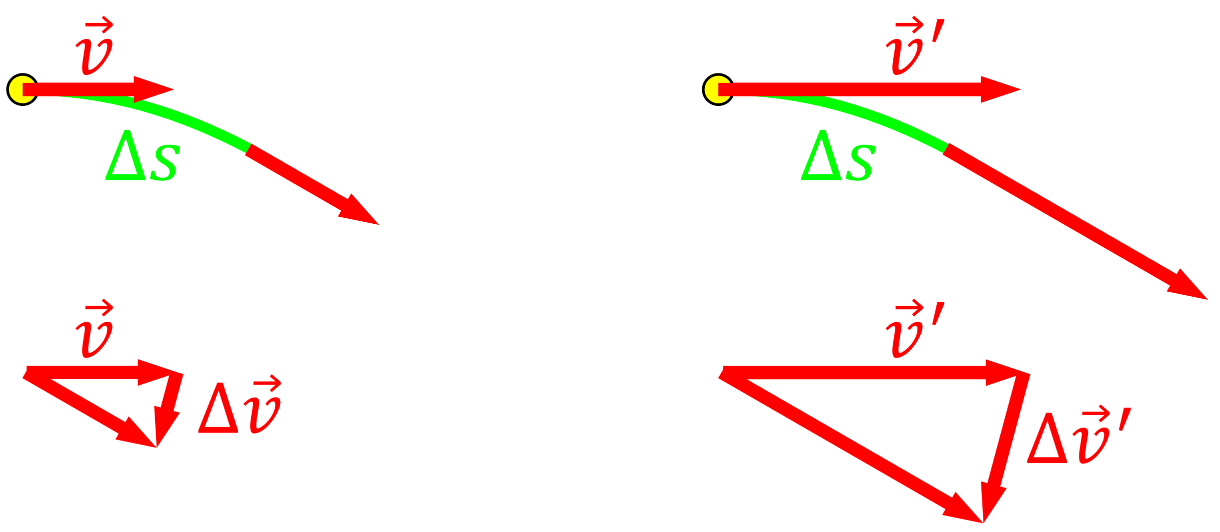


Aceleración normal

Nótese que $\Delta\vec{v}' = 2\Delta\vec{v}$ (triángulos semejantes).

El tiempo que el primer móvil tarda en recorrer el tramo considerado es $\Delta t = \Delta s/v$.

El tiempo que el segundo móvil tarda en recorrer ese tramo es $\Delta t' = \Delta s/v' = \Delta s/(2v) = \Delta t/2$.



Aceleración normal

La relación entre las aceleraciones medias de los móviles es

$$\vec{a}'_{med} = \frac{\Delta\vec{v}'}{\Delta t'} = \frac{2\Delta\vec{v}}{\Delta t/2} = 2^2\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = 2^2\vec{a}_{med}$$

Esa relación se mantiene al tomar intervalos de tiempo más pequeños, e incluso infinitesimales. Por tanto, $\vec{a}' = 2^2\vec{a}$.

Como se dijo al comienzo de este ejemplo, solo hay aceleración normal. Por tanto, $\vec{a}'_n = 2^2\vec{a}_n$.

En general, si la velocidad es k veces mayor, su incremento es k veces mayor en un tiempo k veces menor, por lo que la aceleración normal es k^2 veces mayor.

Resumen de expresiones

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = v\vec{\tau} \ ; \ v = \frac{ds}{dt}$$

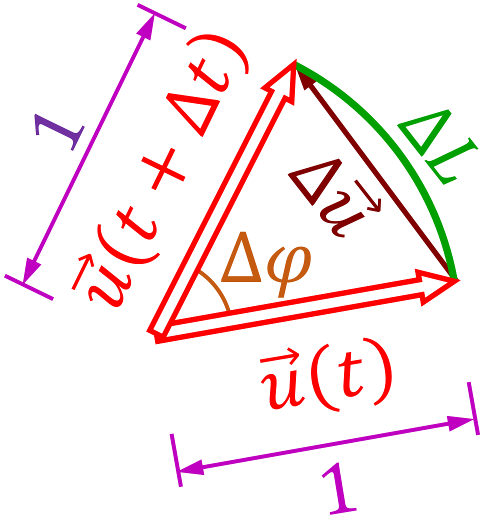
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \begin{cases} \vec{a}_t = a_t\vec{\tau} \ ; \ a_t = \dfrac{dv}{dt} \ ; \ a_t = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} \\ \vec{a}_n = a_n\vec{n} \ ; \ a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

¿Y la demostración?

Paso previo: derivada de un vector unitario



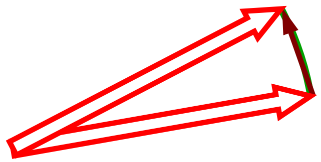
Sea un vector unitario $\vec{u}(t)$, cuya orientación varía con el tiempo, pero cuyo módulo es en todo momento 1.

Si transcurre un intervalo de tiempo Δt, el nuevo vector $\vec{u}(t+\Delta t)$ habrá girado un ángulo $\Delta\varphi$, y su extremo habrá recorrido un arco de circunferencia de longitud $\Delta L = 1\Delta\varphi$.

En ese Δt, el incremento del vector unitario es $\Delta\vec{u} = \vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)$, cuyo módulo es $|\Delta\vec{u}| < \Delta L = 1\Delta\varphi = \Delta\varphi$.

¿Y la demostración?

Paso previo: derivada de un vector unitario



Nótese lo que ocurre si Δt es progresivamente más pequeño.

Puede deducirse que en el límite se tendrá $d\vec{u}$ perpendicular a $\vec{u}(t)$, y que $|\Delta\vec{u}|/\Delta L$ tiende a 1, por lo que

$$|d\vec{u}| = dL = 1 d\varphi = d\varphi$$

Una forma más rigurosa de demostrar la perpendicularidad es partir de que el producto escalar de $\vec{u}$ por sí mismo es $\vec{u}\cdot\vec{u} = u^2 = 1^2 = 1$. Derivando resulta

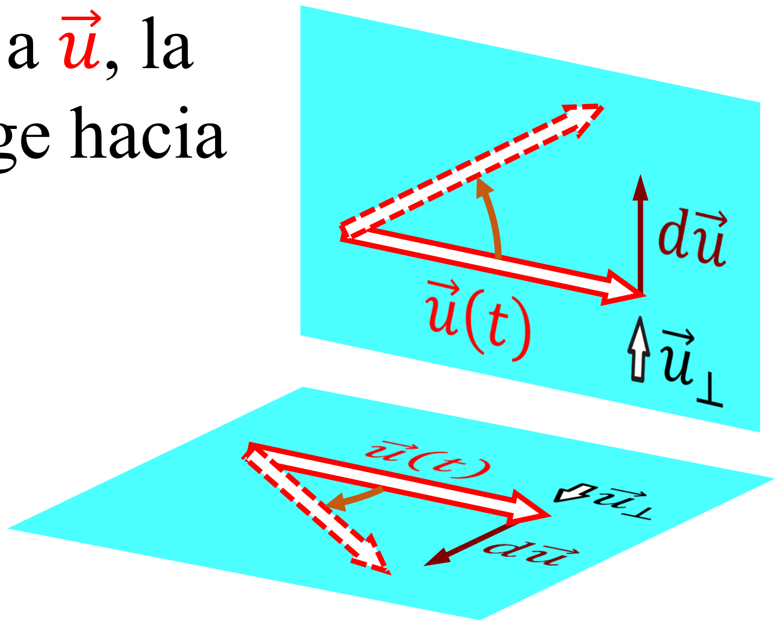
$$\frac{d1}{dt} = \frac{d(\vec{u}\cdot\vec{u})}{dt} \Rightarrow 0 = \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt} = 2\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}\cdot d\vec{u} = 0 \Rightarrow d\vec{u} \perp \vec{u}$$

¿Y la demostración?

Paso previo: derivada de un vector unitario

De entre todas las perpendiculares a $\vec{u}$, la orientación de $d\vec{u}$ es la que se dirige hacia donde el primero se desvía.



Denotando por $\vec{u}_\perp$ al correspondiente vector unitario, se tiene que

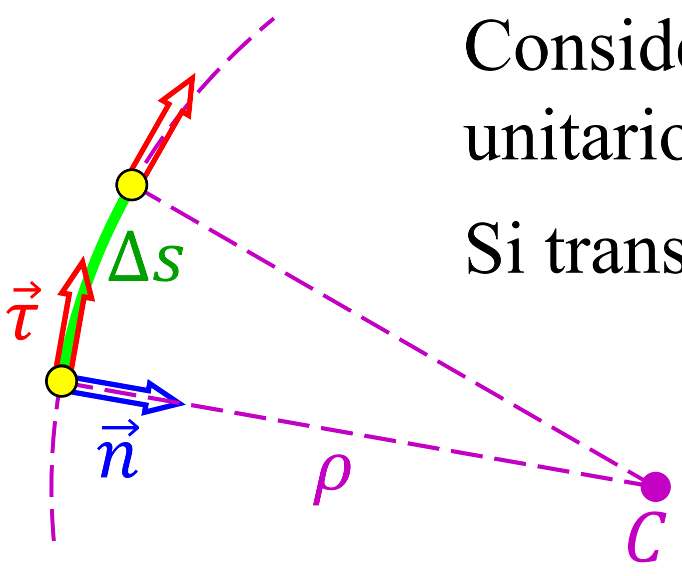
$$d\vec{u} = |d\vec{u}|\,\vec{u}_\perp = d\varphi\,\vec{u}_\perp \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\varphi\,\vec{u}_\perp}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\perp$$

¿Y la demostración?

Derivada del vector unitario tangente

En el caso del vector unitario tangente $\vec{\tau}$, el vector $\vec{u}_\perp$ de la expresión anterior es, por definición, el vector unitario normal $\vec{n}$. Por tanto,

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{n}$$



Consideremos un móvil, y los vectores unitarios $\vec{\tau}$ y $\vec{n}$ de su trayectoria.

Si transcurre un intervalo de tiempo Δt pequeño, el espacio Δs recorrido está situado aproximadamente sobre la circunferencia osculatriz, de centro C y radio ρ.

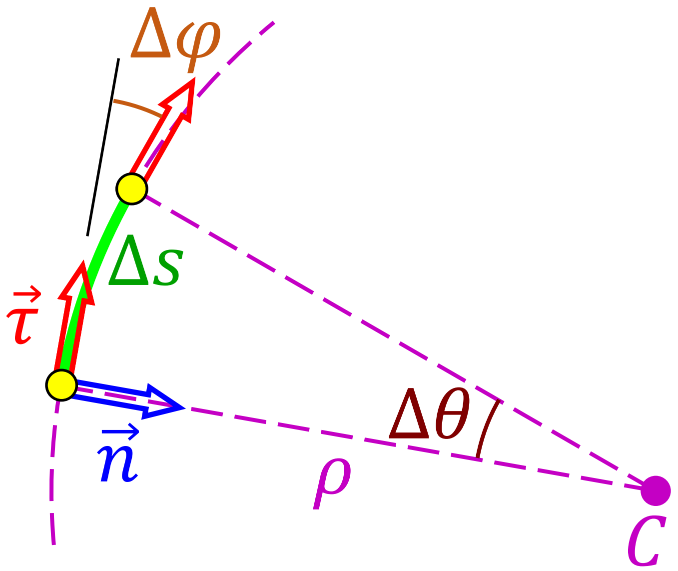
¿Y la demostración?

Derivada del vector unitario tangente

El ángulo girado por el móvil es $\Delta\theta = \Delta s/\rho$.

El ángulo girado por $\vec{\tau}$ es $\Delta\varphi = \Delta\theta$. Por tanto,

$$\Delta\varphi = \Delta s/\rho \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta s/\rho}{\Delta t} = \frac{1}{\rho}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$



En el límite, $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho}v$

Por tanto, $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{n} = \frac{v}{\rho}\vec{n}$

¿Y la demostración?

Derivada de la velocidad (por fin)

Aplicando la regla de la derivada de un producto, resulta

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{v}{\rho}\vec{n}$$

Por tanto,

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

como se quería demostrar.

Relaciones de derivación e integración

s	$\vec{r}$	x	y	z
↓ ↑	↓ ↑	↓ ↑	↓ ↑	↓ ↑
v	$\vec{v}$	v_x	v_y	v_z
↓ ↑	↓ ↑	↓ ↑	↓ ↑	↓ ↑
a_t	$\vec{a}$	a_x	a_y	a_z

↓ Derivación   ↑ Integración

Ejercicio 1

El vector de posición de un punto es $\vec{r} = (6t; t^3 - 20t; 3)$ (SI).
Obténgase para $t = 2$ s: la posición; la velocidad y su módulo; la aceleración y su módulo; los módulos de las componentes intrínsecas de la aceleración, con signos en su caso; y el radio de curvatura.
Obténgase también para dicho instante: las componentes intrínsecas de la aceleración; los vectores unitarios tangente y normal; y las coordenadas del centro de curvatura.

Partimos de $\vec{r} = (6t; t^3 - 20t; 3)$ (SI)

Posición para $t = 2$ s:

$$\vec{r}(2) = (6 \times 2; 2^3 - 20 \times 2; 3) = (12; -32; 3)\ \text{m}$$

Velocidad:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (6; 3t^2 - 20; 0)\ \text{(SI)}$$

Velocidad y su módulo para $t = 2$ s:

$$\vec{v}(2) = (6; 3 \times 2^2 - 20; 0) = (6; -8; 0)\ \text{m/s}$$

$$v(2) = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + 0^2} = 10\ \text{m/s}$$

Continuamos desde $\vec{v} = (6; 3t^2 - 20; 0)$ (SI)

Aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (0; 6t; 0) \text{ (SI)}$$

Aceleración y su módulo para $t = 2$ s:

$$\vec{a}(2) = (0; 6 \times 2; 0) = (0; 12; 0)\,\mathrm{m/s^2}$$

$$a(2) = \sqrt{0^2 + 12^2 + 0^2} = 12\,\mathrm{m/s^2}$$

Módulo de la velocidad:

$$v = \sqrt{6^2 + (3t^2 - 20)^2 + 0^2} = \sqrt{36 + (3t^2 - 20)^2}$$

Continuamos desde $v = \sqrt{36 + (3t^2 - 20)^2}$ (SI)

Módulo con signo de la aceleración tangencial:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{2(3t^2 - 20)(6t)}{2\sqrt{36 + (3t^2 - 20)^2}} \text{ (SI)}$$

Módulo con signo de la aceleración tangencial para $t = 2$ s:

$$a_t(2) = \frac{2(3 \times 2^2 - 20)(6 \times 2)}{2\sqrt{36 + (3 \times 2^2 - 20)^2}} = \frac{-192}{2\sqrt{100}} = -9{,}6\,\mathrm{m/s^2}$$

<u>Alternativa más cómoda</u>

Módulo con signo de la aceleración tangencial para $t = 2$ s:

$$a_t(2) = \frac{\vec{a}(2) \cdot \vec{v}(2)}{v(2)} = \frac{(0; 12; 0) \cdot (6; -8; 0)}{10} =$$

$$= \frac{0 \times 6 + 12(-8) + 0 \times 0}{10} = \frac{-96}{10} = -9{,}6\,\mathrm{m/s^2}$$

Módulo de la aceleración normal para $t = 2$ s:

$$a^2(2) = a_t^2(2) + a_n^2(2)$$

$$a_n(2) = \sqrt{a^2(2) - a_t^2(2)} = \sqrt{12^2 - (-9{,}6)^2} = 7{,}2\ \mathrm{m/s^2}$$

Radio de curvatura para $t = 2$ s:

$$a_n(2) = \frac{v^2(2)}{\rho(2)}$$

$$\rho(2) = \frac{v^2(2)}{a_n(2)} = \frac{10^2}{7{,}2} = 13{,}89\ \mathrm{m}$$

Vector unitario tangente para $t = 2$ s:

$$\vec{\tau}(2) = \frac{\vec{v}(2)}{v(2)} = \frac{(6; -8; 0)}{10} = (0{,}6; -0{,}8; 0)$$

Aceleración tangencial para $t = 2$ s:

$$\vec{a}_t(2) = a_t(2)\vec{\tau}(2) = -9{,}6(0{,}6; -0{,}8; 0) = (-5{,}76; 7{,}68; 0)\ \mathrm{m/s^2}$$

Aceleración normal para $t = 2$ s:

$$\vec{a}(2) = \vec{a}_t(2) + \vec{a}_n(2)$$

$$\vec{a}_n(2) = \vec{a}(2) - \vec{a}_t(2) = (0; 12; 0) - (-5{,}76; 7{,}68; 0) =$$

$$= (5{,}76; 4{,}32; 0)\ \mathrm{m/s^2}$$

Comprobaciones:

$$a_n(2) = \sqrt{5{,}76^2 + 4{,}32^2 + 0^2} = 7{,}2\ \mathrm{m/s^2} \text{ (como ya se obtuvo)}$$

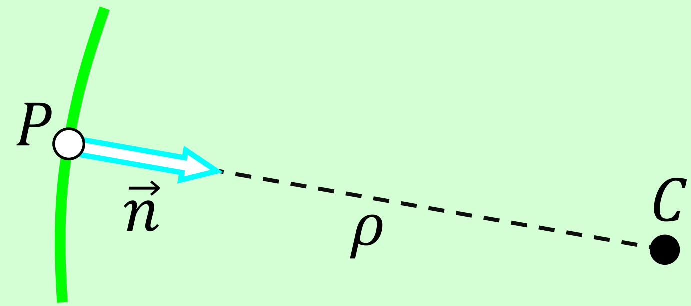
$$\vec{a}_t(2) \cdot \vec{a}_n(2) = (-5{,}76; 7{,}68; 0) \cdot (5{,}76; 4{,}32; 0) = 0\ \mathrm{m^2/s^4}$$

(son perpendiculares entre sí)

Vector unitario normal para $t = 2$ s:

$$\vec{n}(2) = \frac{\vec{a}_n(2)}{a_n(2)} = \frac{(5{,}76; 4{,}32; 0)}{7{,}2} = (0{,}8; 0{,}6; 0)$$

Centro de curvatura para $t = 2$ s:



$$\overrightarrow{PC}(2) = \rho(2)\vec{n}(2) = 13{,}89(0{,}8; 0{,}6; 0) = (11{,}11; 8{,}334; 0)\ \text{m}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC}(2) &= \overrightarrow{OP}(2) + \overrightarrow{PC}(2) = \vec{r}(2) + \overrightarrow{PC}(2) = \\ &= (12; -32; 3) + (11{,}11; 8{,}334; 0) = \\ &= (23{,}11; -23{,}67; 3)\ \text{m} \end{aligned}$$

Ejercicio 2

Un móvil recorre la trayectoria $y^3 = 2x^2$ (SI) a partir del punto $(2; 2)$ m, de tal modo que la proyección de la velocidad sobre el eje OY es constante e igual a $2\ \mathrm{m/s}$. Hállese las expresiones, en función del tiempo, de: a) el vector de posición; b) la velocidad; c) la aceleración.

a) $v_y = 2\ \mathrm{m/s} \quad \Rightarrow y = \int v_y\, dt = \int 2\, dt = 2t + C$

$\vec{r}(0) = (2; 2)\ \mathrm{m} \quad \Rightarrow y(0) = 2\ \mathrm{m} \Rightarrow 2 \times 0 + C = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 2\ \mathrm{m} \Rightarrow y = 2t + 2 = 2(t+1)$ (SI)

$y^3 = 2x^2$ (SI) $\Rightarrow 2^3(t+1)^3 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 4(t+1)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2(t+1)^{1{,}5}$ (SI) $\Rightarrow \vec{r} = (x; y) = \left(2(t+1)^{1{,}5}; 2(t+1)\right)$ (SI)

b) $\vec{v} = d\vec{r}/dt = (3(t+1)^{0{,}5}; 2)$ (SI)

c) $\vec{a} = d\vec{v}/dt = (1{,}5(t+1)^{-0{,}5}; 0)$ (SI)

II.- Casos particulares

Movimiento rectilíneo uniforme

Se denomina movimiento rectilíneo uniforme (abreviado m.r.u.) al que tiene aceleración nula y velocidad no nula.

Puesto que $\vec{a} = \vec{0}$, es $\vec{a}_t = \vec{0}$ y $\vec{a}_n = \vec{0}$. Así:

$$\left.\begin{array}{l} a_n = 0 \\ v \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n} = \infty \Rightarrow \text{mvto. rectilíneo}$$

$$a_t = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v \text{ constante} \Rightarrow \text{mvto. uniforme}$$

Visto de otro modo,

$$\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} \text{ constante}$$

Movimiento rectilíneo uniforme

Denominamos velocidad inicial, $\vec{v}_0$, a la que tiene el móvil cuando $t = 0$, esto es, $\vec{v}_0 = \vec{v}(0)$.

Puesto que v es constante, es $v = v_0$ en todo momento. Así,

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s = \int v\,dt = \int v_0\,dt = v_0 t + C$$

Para determinar la constante de integración C,

$$s(0) = v_0 \times 0 + C = C \Rightarrow C = s(0) \Rightarrow s = v_0 t + s(0)$$

Denotando el espacio ya recorrido inicialmente, $s(0)$, por s_0, y reordenando términos, resulta

$$\boxed{s = s_0 + v_0 t}$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Se denomina movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (abreviado m.r.u.a.) al que tiene aceleración normal nula y aceleración tangencial constante no nula.

De la definición se deduce que en un m.r.u.a. la aceleración $\vec{a}$ es constante.

La implicación inversa no es cierta: un movimiento puede tener aceleración constante, y sin embargo no ser un m.r.u.a.

Ejemplo: si lanzamos horizontalmente un objeto sobre el que actúa la aceleración constante de la gravedad, $\vec{a} = \vec{g}$, el movimiento resultante es parabólico, no un m.r.u.a.

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Puesto que $\vec{a}_n = \vec{0}$, resulta

$$\left.\begin{array}{l} a_n = 0 \\ v \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n} = \infty \Rightarrow \text{mvto. rectilíneo}$$

Como además $\vec{a}_t$ es constante,

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \vec{a}_t + \vec{0} = \vec{a}_t \Rightarrow a = a_t \text{ constante}$$

Por tanto,

$$a_t = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = \int a_t dt = \int a\, dt = at + C$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Para determinar la constante de integración C,

$$v(0) = a \times 0 + C = C \Rightarrow C = v(0) = v_0 \Rightarrow v = at + v_0$$

Además,

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s = \int v\,dt = \int (at + v_0)dt = a\frac{t^2}{2} + v_0 t + C'$$

Para determinar la constante de integración C',

$$s(0) = a\frac{0^2}{2} + v_0 \times 0 + C' = C' \Rightarrow C' = s(0) = s_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = a\frac{t^2}{2} + v_0 t + s_0$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Reordenando términos:

$$\boxed{\begin{aligned} s &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v &= v_0 + a t \end{aligned}}$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Utilizando las expresiones anteriores:

$$v = v_0 + at \Rightarrow at = v - v_0 \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s - s_0 = v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 =$$

$$= \frac{v_0 (v - v_0)}{a} + \frac{1}{2} a \frac{(v - v_0)^2}{a^2} =$$

$$= \frac{2 v_0 (v - v_0)}{2a} + \frac{(v - v_0)^2}{2a}$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

$$2a(s - s_0) = 2v_0(v - v_0) + (v - v_0)^2 =$$

$$= (2v_0v - 2v_0^2) + (v^2 - 2vv_0 + v_0^2) =$$

$$= v^2 - v_0^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + at$$

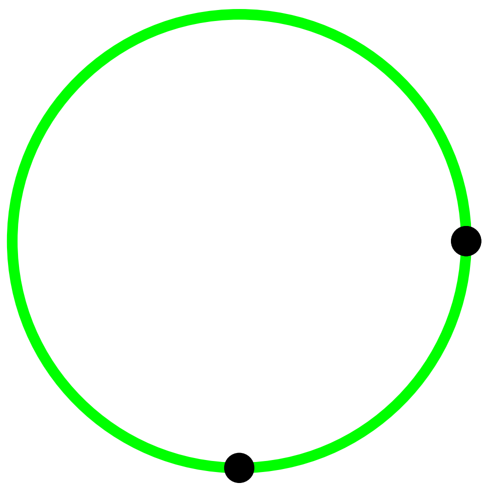
$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a(s - s_0)}$$

Movimiento circular

Se denomina movimiento circular al que tiene radio de curvatura constante.

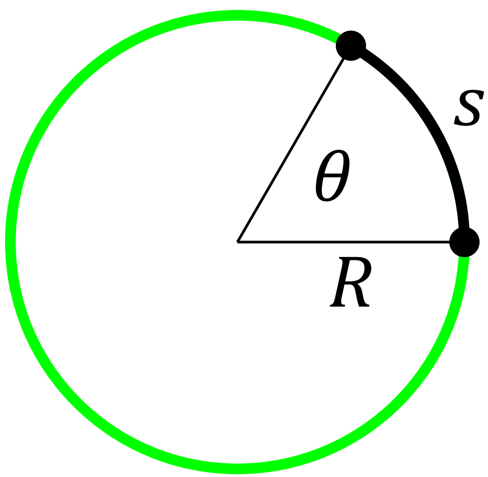
Así, la trayectoria descrita es una circunferencia cuyo radio R es dicho radio de curvatura.

Ejemplo de movimiento circular



Movimiento circular

En un movimiento circular es más cómodo identificar la posición del móvil, no por sus coordenadas, sino por el ángulo θ respecto a una referencia.



Es $\boxed{s = \theta R}$

Recuérdese que un ángulo plano, $\theta = s/R$, es un cociente de longitudes, y por tanto se trata de una magnitud de dimensión uno.

La correspondiente unidad SI es el radián (símbolo rad), que es simplemente otro nombre (utilizado específicamente para ángulos planos) de la unidad 1.

Movimiento circular

Se denomina velocidad angular de un movimiento circular a un vector cuyo módulo es la derivada del ángulo girado respecto al tiempo.

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

Por tanto, ese módulo es el cociente entre el incremento infinitesimal del ángulo, $d\theta$, en un intervalo infinitesimal de tiempo, y la duración dt de dicho intervalo.

El producto dimensional de la velocidad angular es $\dim \omega = \dim \theta \cdot \mathsf{T}^{-1} = \mathsf{T}^{-1}$.

La unidad SI coherente de la velocidad angular es el $\mathrm{rad/s}$.

Movimiento circular

Se denomina aceleración angular de un movimiento circular a un vector cuyo módulo es la derivada del de la velocidad angular respecto al tiempo.

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}}$$

Por tanto, ese módulo es el cociente entre el incremento infinitesimal del módulo de la velocidad angular, $d\omega$, en un intervalo infinitesimal de tiempo, y la duración dt de dicho intervalo.

El producto dimensional de la aceleración angular es $\dim \alpha = \dim \omega \cdot \mathsf{T}^{-1} = \mathsf{T}^{-1} \cdot \mathsf{T}^{-1} = \mathsf{T}^{-2}$.

La unidad SI coherente de la aceleración angular es el $\mathrm{rad/s^2}$.

Movimiento circular

Con estas definiciones resulta:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(\theta R)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} R$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(\omega R)^2}{R}$$

$$s = \theta R$$

$$v = \omega R$$

$$a_t = \alpha R$$

$$a_n = \omega^2 R$$

Ejercicio 3

Un punto describe una trayectoria circular de radio $R = 3$ m. La posición angular de dicho punto respecto a una cierta referencia es $\theta = 0{,}1t^3$ (SI). Obténgase para $t = 2$ s su posición angular y los módulos de: velocidad angular; aceleración angular; velocidad; aceleración; y componentes intrínsecas de esta.

Posición angular para $t = 2$ s:

$$\theta(2) = 0{,}1 \times 2^3 = 0{,}8 \text{ rad}$$

Módulo de la velocidad angular para $t = 2$ s:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 0{,}3t^2 \text{ (SI)} \Rightarrow \omega(2) = 0{,}3 \times 2^2 = 1{,}2 \text{ rad/s}$$

Módulo de la aceleración angular para $t = 2$ s:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0{,}6t \text{ (SI)} \Rightarrow \alpha(2) = 0{,}6 \times 2 = 1{,}2 \text{ rad/s}^2$$

Módulo de la velocidad para $t = 2\ s$:

$$v(2) = \omega(2)R = 1{,}2 \times 3 = 3{,}6\,\mathrm{m/s}$$

Módulos de las componentes intrínsecas de la aceleración para $t = 2$ s:

$$a_t(2) = \alpha(2)R = 1{,}2 \times 3 = 3{,}6\,\mathrm{m/s^2}$$

$$a_n(2) = \omega^2(2)R = 1{,}2^2 \times 3 = 4{,}32\,\mathrm{m/s^2}$$

Módulo de la aceleración para $t = 2$ s:

$$a = \sqrt{a_t^2(2) + a_n^2(2)} = \sqrt{3{,}6^2 + 4{,}32^2} = 5{,}623\,\mathrm{m/s^2}$$

Movimiento circular uniforme

Se denomina movimiento circular uniforme (abreviado m.c.u.) al que tiene aceleración angular nula y velocidad angular no nula.

Por tanto,

$$\alpha = 0 \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = 0 \Rightarrow \omega \text{ constante}$$

Denotamos el módulo de la velocidad angular inicial, $\omega(0)$, por ω_0. Puesto que ω es constante, es $\omega = \omega_0$ en todo momento. Así,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta = \int \omega dt = \int \omega_0 \, dt = \omega_0 t + C$$

Movimiento circular uniforme

Para determinar la constante de integración C,

$$\theta(0) = \omega_0 \times 0 + C = C \Rightarrow C = \theta(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \omega_0 t + \theta(0)$$

Denotando la posición angular inicial, $\theta(0)$, por θ_0, y reordenando términos, resulta

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 t}$$

Movimiento circular uniformemente acelerado

Se denomina movimiento circular uniformemente acelerado (abreviado m.c.u.a.) al que tiene aceleración angular constante no nula.

Por tanto,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \omega = \int \alpha \, dt = \alpha t + C$$

Para determinar la constante de integración C,

$$\omega(0) = \alpha \times 0 + C = C \Rightarrow C = \omega(0) = \omega_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \alpha t + \omega_0$$

Movimiento circular uniformemente acelerado

Además,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta = \int \omega dt = \int (\alpha t + \omega_0) dt =$$

$$= \alpha \frac{t^2}{2} + \omega_0 t + C'$$

Para determinar la constante de integración C',

$$\theta(0) = \alpha \frac{0^2}{2} + \omega_0 \times 0 + C' = C' \Rightarrow C' = \theta(0) = \theta_0 \Rightarrow$$

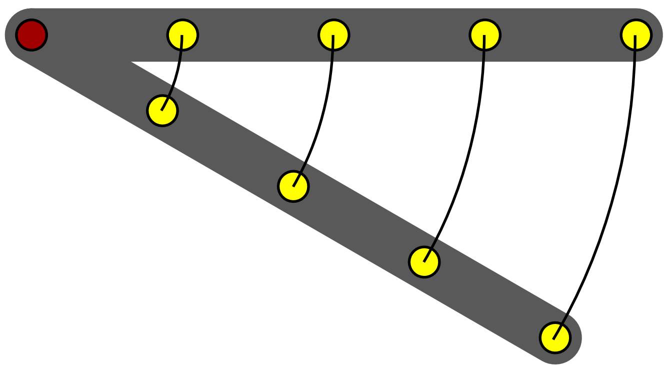
$$\Rightarrow \theta = \alpha \frac{t^2}{2} + \omega_0 t + \theta_0$$

Movimiento circular uniformemente acelerado

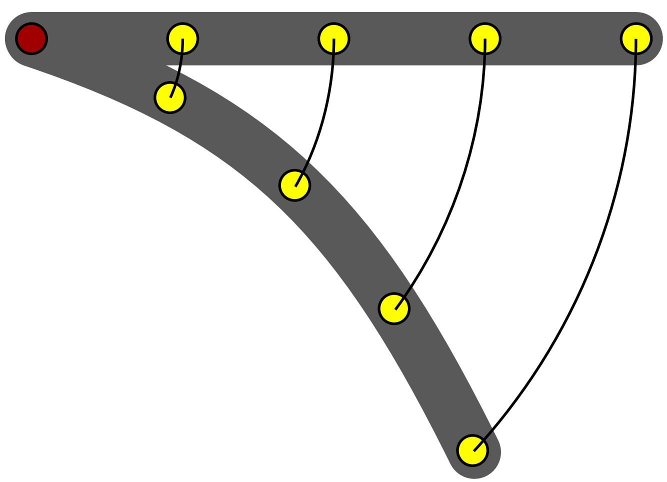
Reordenando términos:

$$\boxed{\begin{aligned}&\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ &\omega = \omega_0 + \alpha t\end{aligned}}$$

Rotación de un sólido rígido



En un sólido rígido en rotación, los puntos tienen desplazamientos diferentes, y por tanto velocidades diferentes.



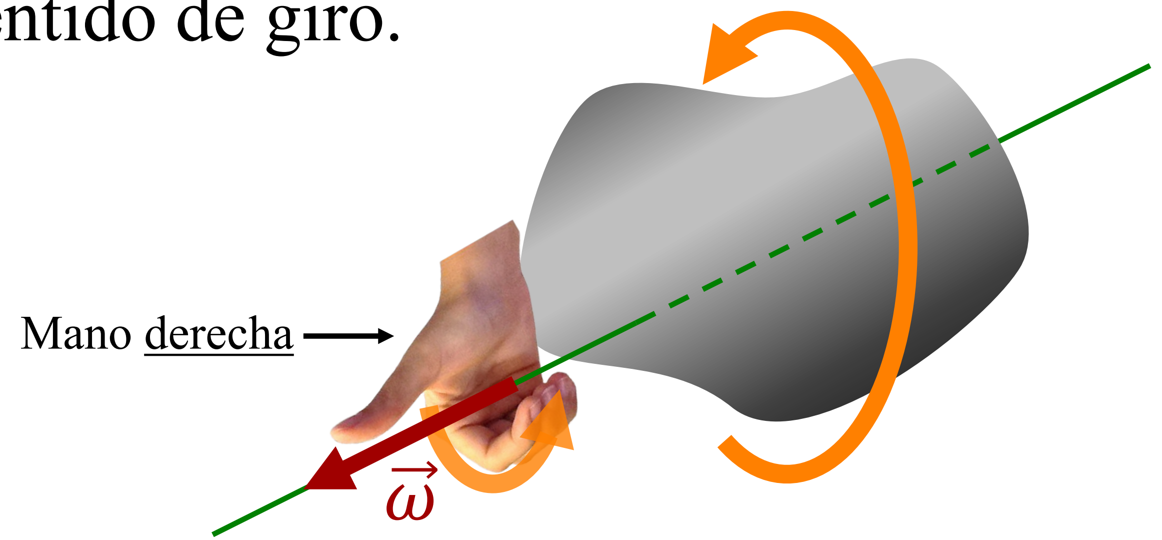
En cambio, los ángulos girados son idénticos, y por tanto la velocidad angular es única.

Si los puntos giraran ángulos diferentes, el cuerpo se deformaría. Esto no es posible si se trata de un sólido rígido.

Velocidad angular

La velocidad angular, $\vec{\omega}$, es una magnitud vectorial que se define como sigue.

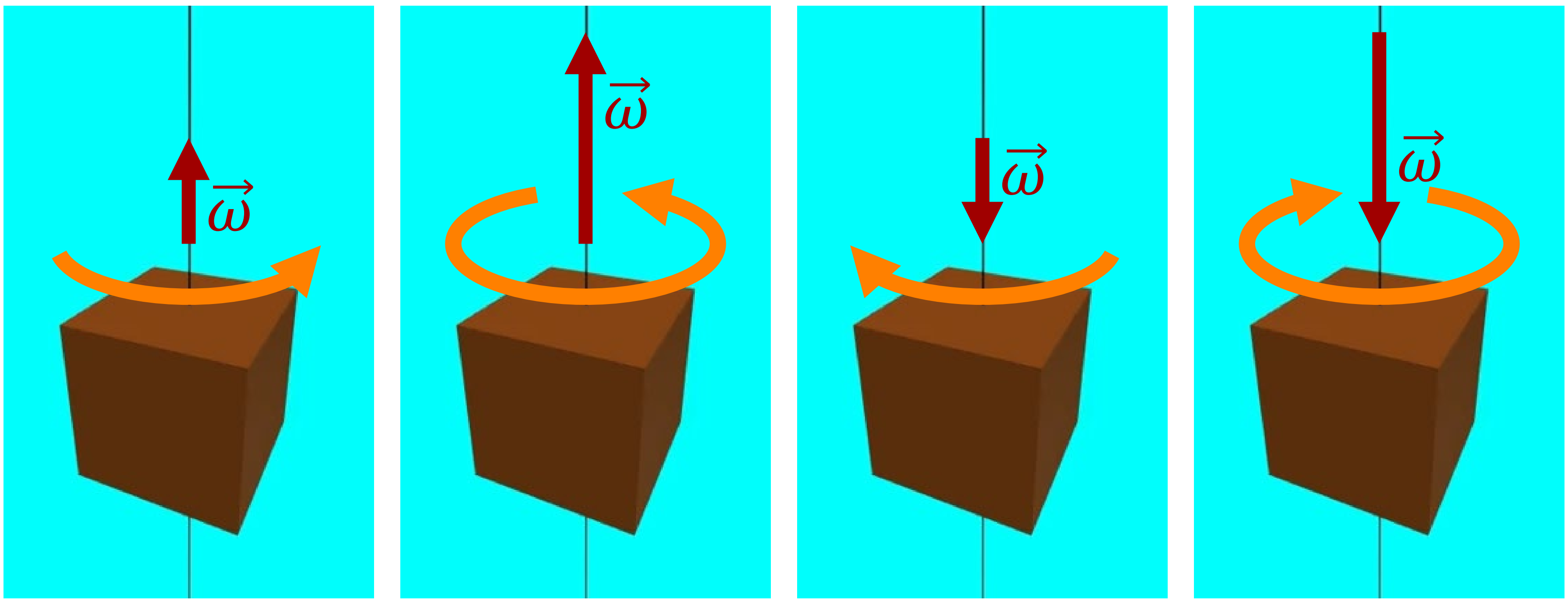
- Su módulo es la derivada del ángulo girado respecto al tiempo, $\omega = d\theta/dt$.
- Su dirección es la del eje de giro.
- Su sentido es el que corresponde, por la regla de Maxwell, al sentido de giro.



Velocidad angular

¿Qué indican el módulo y el sentido de la velocidad angular?

El ritmo y el sentido del giro, respectivamente.

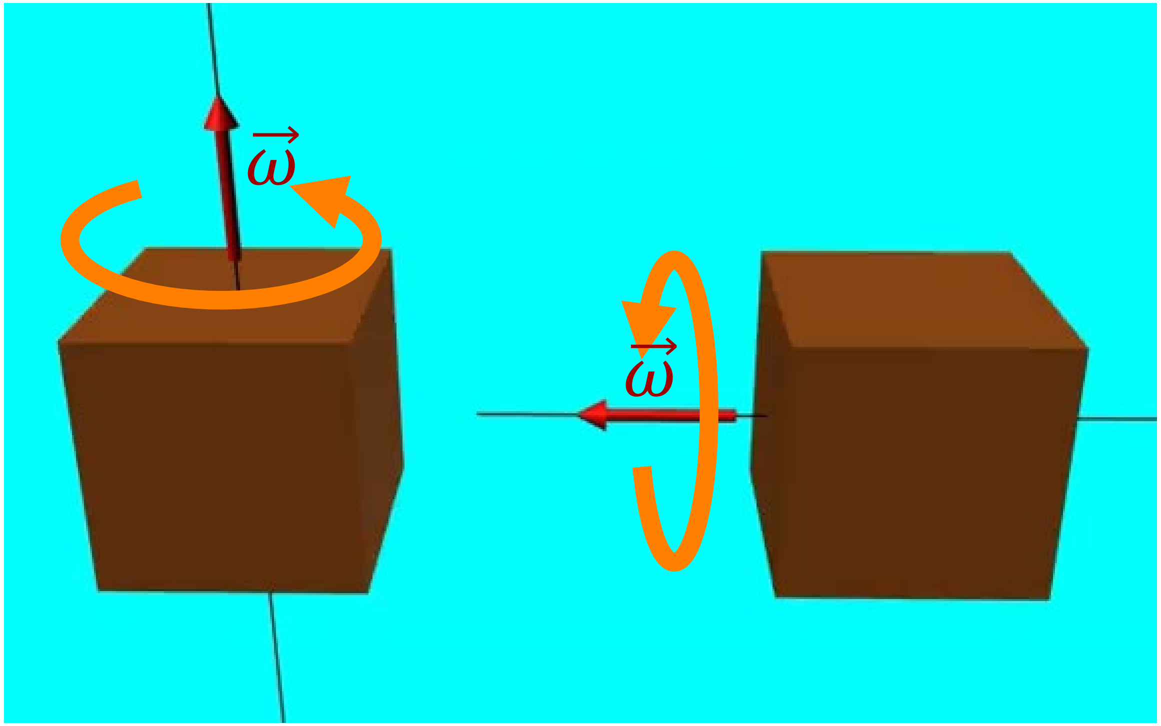


Fuente: Giménez, M.H., Riera, J., Vidaurre, A., y Carratalá, J.V. (2001). *Experiencias virtuales 3D de fundamentos físicos*. ISBN 84-9705-084-3. Editorial UPV.

Velocidad angular

¿Qué indica la dirección de la velocidad angular?

La dirección del eje de giro.



Fuente: Giménez, M.H., Riera, J., Vidaurre, A., y Carratalá, J.V. (2001). *Experiencias virtuales 3D de fundamentos físicos*. ISBN 84-9705-084-3. Editorial UPV.

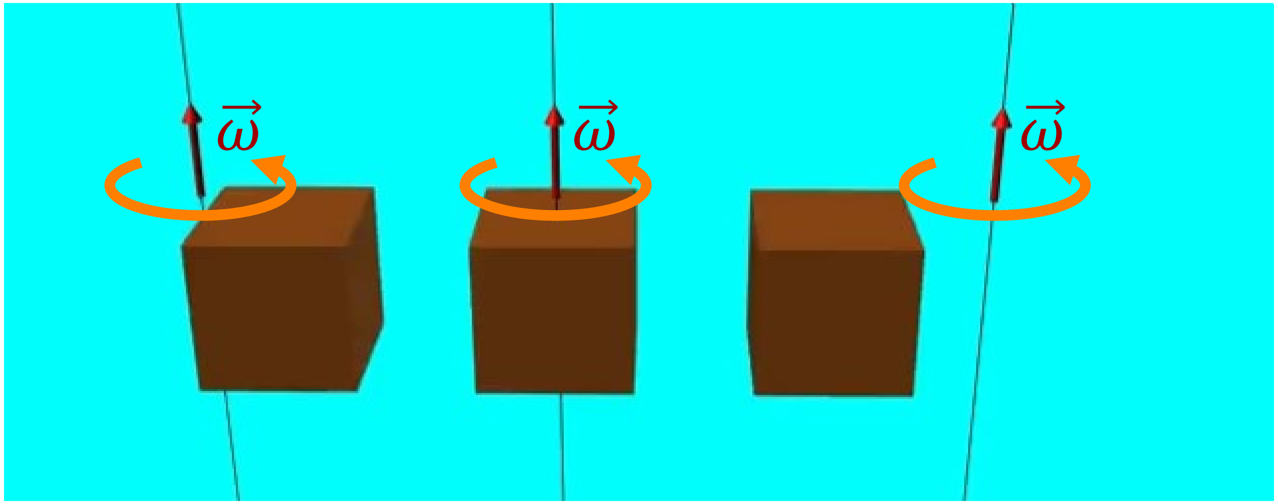
Velocidad angular

Los tres sólidos rígidos de la figura giran con el mismo ritmo, y en el mismo sentido, alrededor de ejes con la misma orientación.

Por tanto, los tres tienen la misma velocidad angular.

¿Qué los diferencia?

<u>La posición del eje de giro</u>.

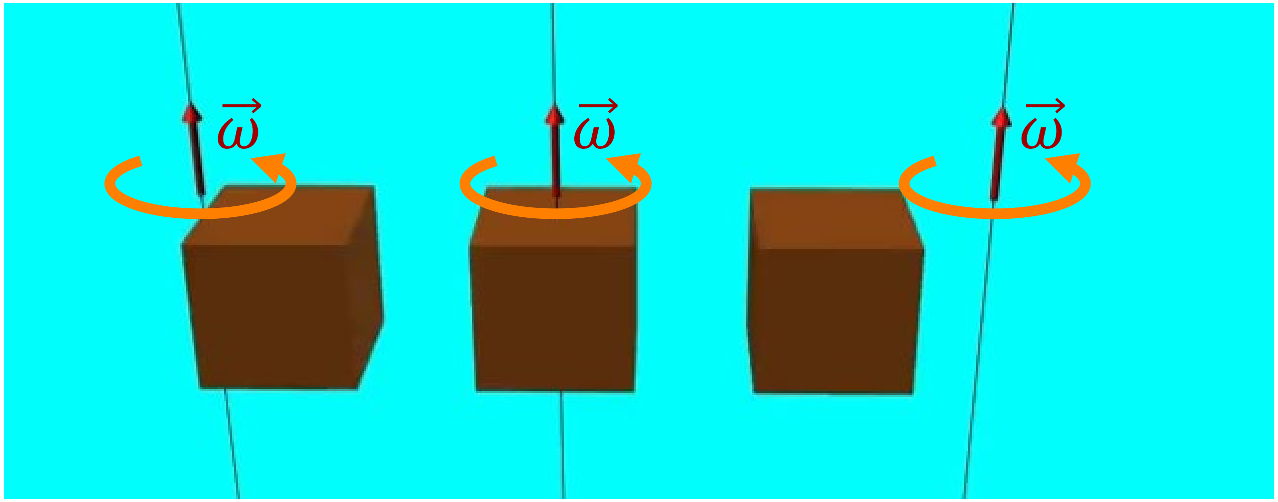


Fuente: Giménez, M.H., Riera, J., Vidaurre, A., y Carratalá, J.V. (2001). *Experiencias virtuales 3D de fundamentos físicos*. ISBN 84-9705-084-3. Editorial UPV.

Velocidad angular

Identificaremos el eje de giro utilizándolo como línea de acción de la velocidad angular.

Si se cambia la línea de acción del vector, se tiene un nuevo eje de giro y una rotación diferente.



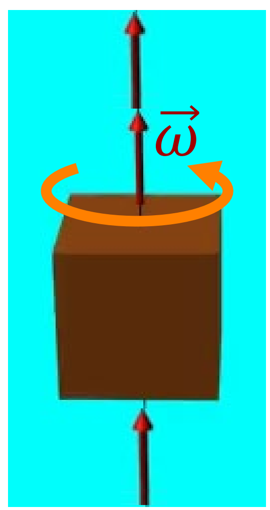
Fuente: Giménez, M.H., Riera, J., Vidaurre, A., y Carratalá, J.V. (2001). *Experiencias virtuales 3D de fundamentos físicos*. ISBN 84-9705-084-3. Editorial UPV.

Velocidad angular

¿Y si se cambia el punto de aplicación dentro de la misma línea de acción?

La rotación del sólido rígido es entonces la misma.

Por tanto, la velocidad angular es un vector deslizante.



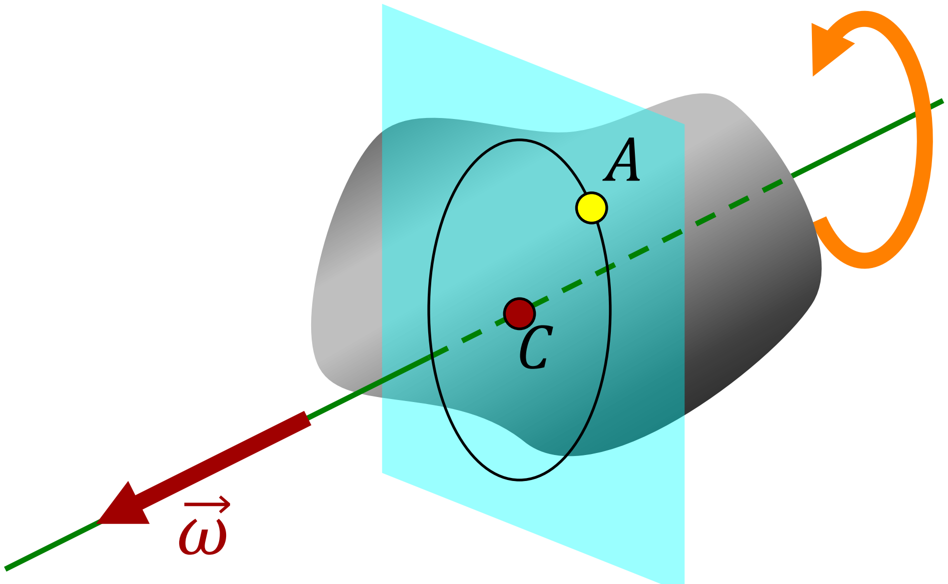
Fuente: Giménez, M.H., Riera, J., Vidaurre, A., y Carratalá, J.V. (2001). *Experiencias virtuales 3D de fundamentos físicos*. ISBN 84-9705-084-3. Editorial UPV.

Velocidades en una rotación

Sea un punto A de un sólido rígido en rotación.

El punto seguirá una trayectoria circular en un plano perpendicular al eje de giro.

El centro de esa trayectoria es el punto C del eje de giro que se encuentra más cerca de A.



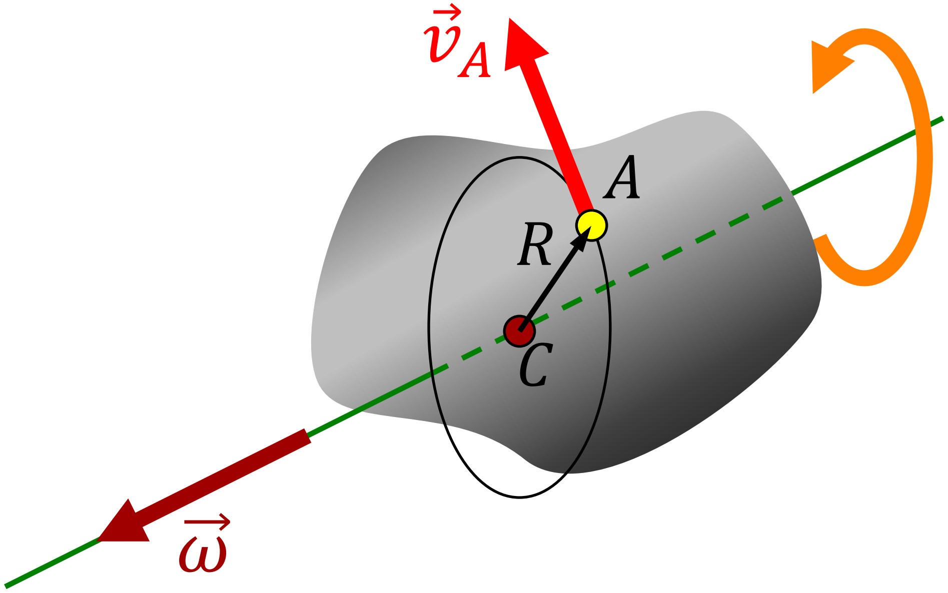
Velocidades en una rotación

La distancia entre C y A es el radio R de la trayectoria.

Como ya sabemos, el módulo de la velocidad de A es

$$v_A = \omega R$$

La velocidad es tangente a la trayectoria, y su sentido es el que corresponde al del giro.



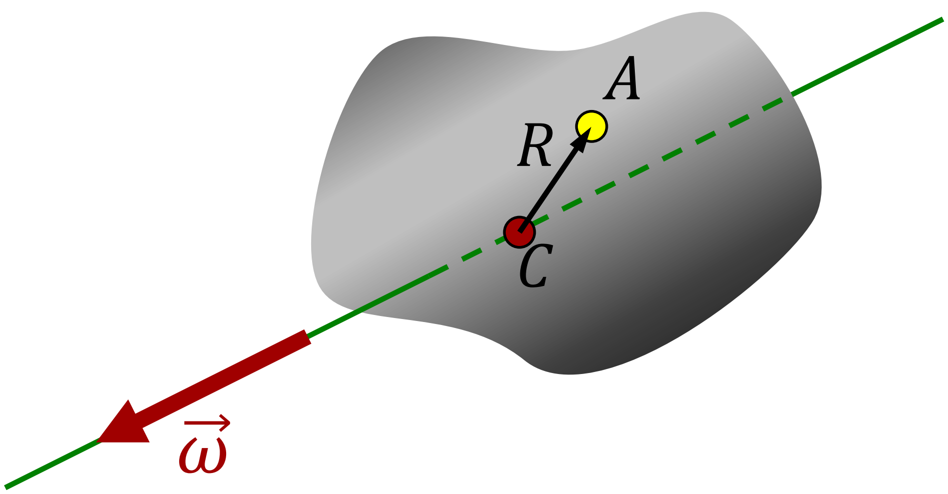
Velocidades en una rotación

La velocidad angular es un vector deslizante.

Sus momentos, ¿tienen algún significado físico?

El brazo de $\vec{\omega}$ respecto al punto A es precisamente R.

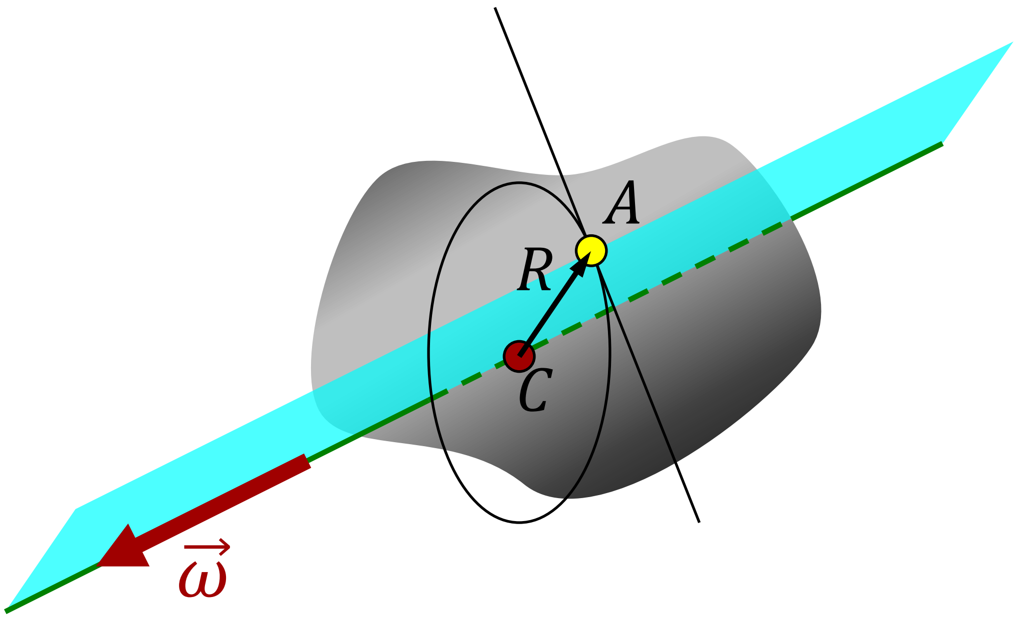
Por tanto, el módulo del momento de $\vec{\omega}$ respecto al punto A es $M_A(\vec{\omega}) = \omega R$.



Velocidades en una rotación

La dirección del momento es perpendicular al plano definido por la línea de acción (el eje) y el punto A.

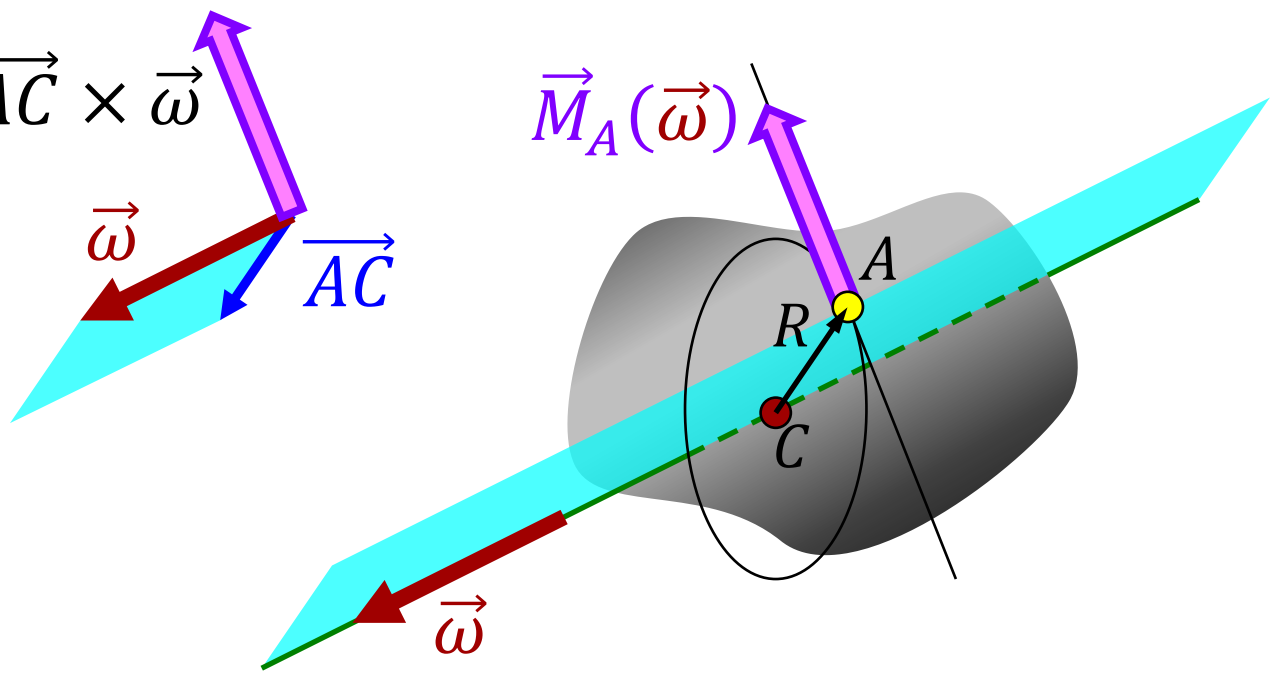
Esa dirección es precisamente la tangente a la trayectoria circular.



Velocidades en una rotación

Puede comprobarse también que el producto vectorial $\overrightarrow{AC} \times \vec{\omega}$ tiene el sentido que se muestra en la figura.

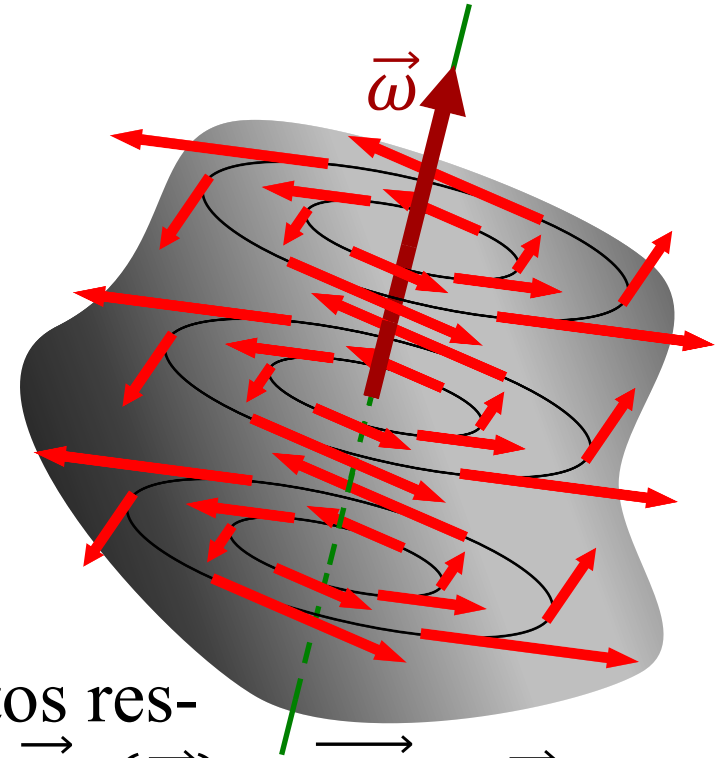
Puesto que $\vec{v}_A$ y $\vec{M}_A(\vec{\omega})$ tienen iguales módulo, dirección y sentido, se concluye que se trata del mismo vector.



Velocidades en una rotación

Por tanto, la velocidad de un punto de un sólido rígido en rotación es el momento de la velocidad angular respecto al mismo punto.

$$\vec{v}_A = \overrightarrow{M}_A(\vec{\omega})$$



Así pues, el campo de momentos de la velocidad angular de un sólido rígido es, precisamente, el campo de velocidades de los puntos de dicho sólido.

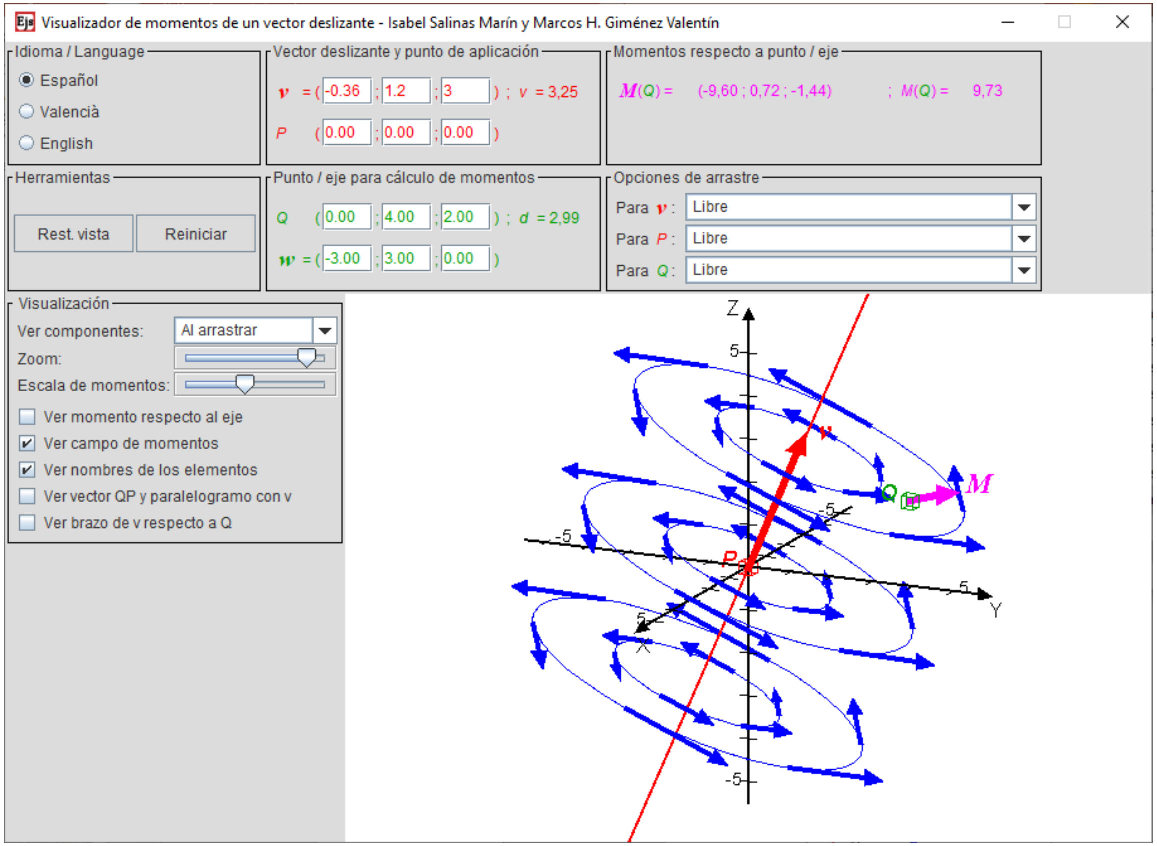
De la relación general entre momentos respecto a dos puntos A y B, $\overrightarrow{M}_A(\vec{\omega}) = \overrightarrow{M}_B(\vec{\omega}) + \overrightarrow{AB} \times \vec{\omega}$, se deduce que

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \overrightarrow{AB} \times \vec{\omega}$$

Velocidades en una rotación

Sugerencia: Utilizar el laboratorio virtual *“Visualizador de momentos de un vector deslizante”* con la opción *“Ver campo de momentos”* activada, y arrastrar con el ratón el extremo del vector rojo.

https://riunet.upv.es/handle/10251/105937



Ejercicio 4

Un sólido rígido tiene una velocidad angular $\vec{\omega} = (2; -1; 3)$ rad/s, y su eje de giro pasa por el punto $Q(3; 1; 3)$ m. Obténgase las velocidades de los puntos $C(-1; 2; -3)$ m y $D(1; 1; 2)$ m del sólido.

$$\overrightarrow{CQ} = (3; 1; 3) - (-1; 2; -3) = (4; -1; 6)\ \text{m}$$

$$\vec{v}_C = \vec{M}_C(\vec{\omega}) = \overrightarrow{CQ} \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (3; 0; -2)\ \text{m/s}$$

$$\overrightarrow{DQ} = (3; 1; 3) - (1; 1; 2) = (2; 0; 1)\ \text{m}$$

$$\vec{v}_D = \vec{M}_D(\vec{\omega}) = \overrightarrow{DQ} \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (1; -4; -2)\ \text{m/s}$$

Tarea: Compruébese que se cumple que $\vec{v}_D = \vec{v}_C + \overrightarrow{DC} \times \vec{\omega}$.

Aceleración angular

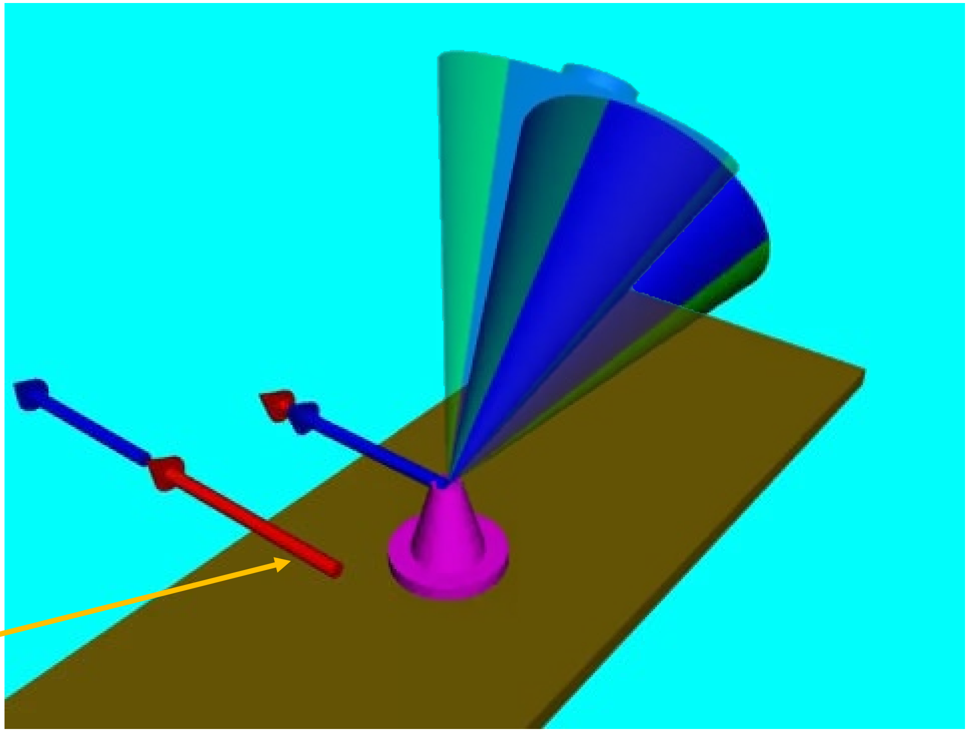
Se define la aceleración angular como la derivada de la velocidad angular.

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Interpretación intuitiva: la velocidad angular cambia como si su derivada, la aceleración angular, tirara de su extremo.

La velocidad angular es un vector

La aceleración angular, debida al peso de la peonza inicialmente inmóvil, hace que crezca su velocidad angular. Así, la peonza cae.



Fuente: Giménez, M.H., Riera, J., Vidaurre, A., y Carratalá, J.V. (2001). *Experiencias virtuales 3D de fundamentos físicos*. ISBN 84-9705-084-3. Editorial UPV.

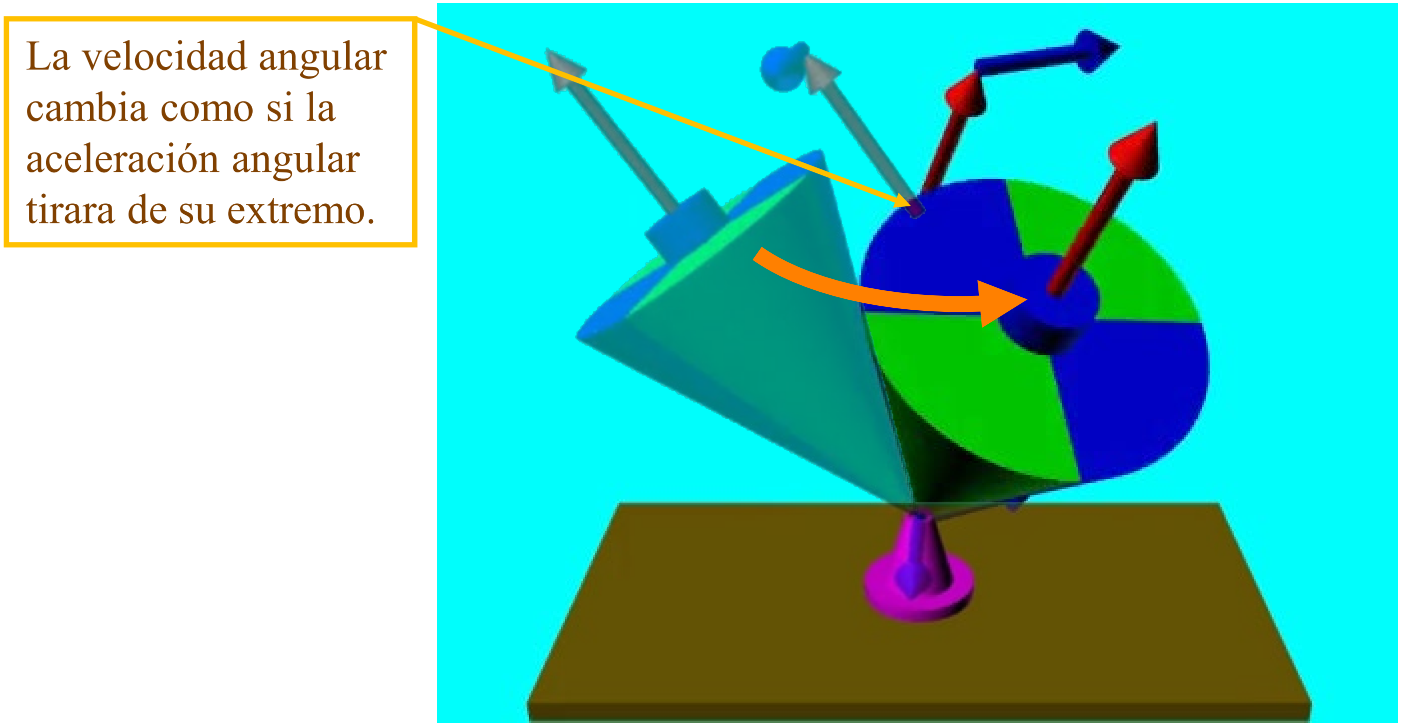
La velocidad angular cambia como si la aceleración angular tirara de su extremo.

Rojo: velocidad angular.

Azul: aceleración angular.

La velocidad angular es un vector

Si la peonza tiene inicialmente la velocidad angular mostrada en la imagen atenuada, la misma aceleración angular no cambia el módulo de la primera, sino su orientación.



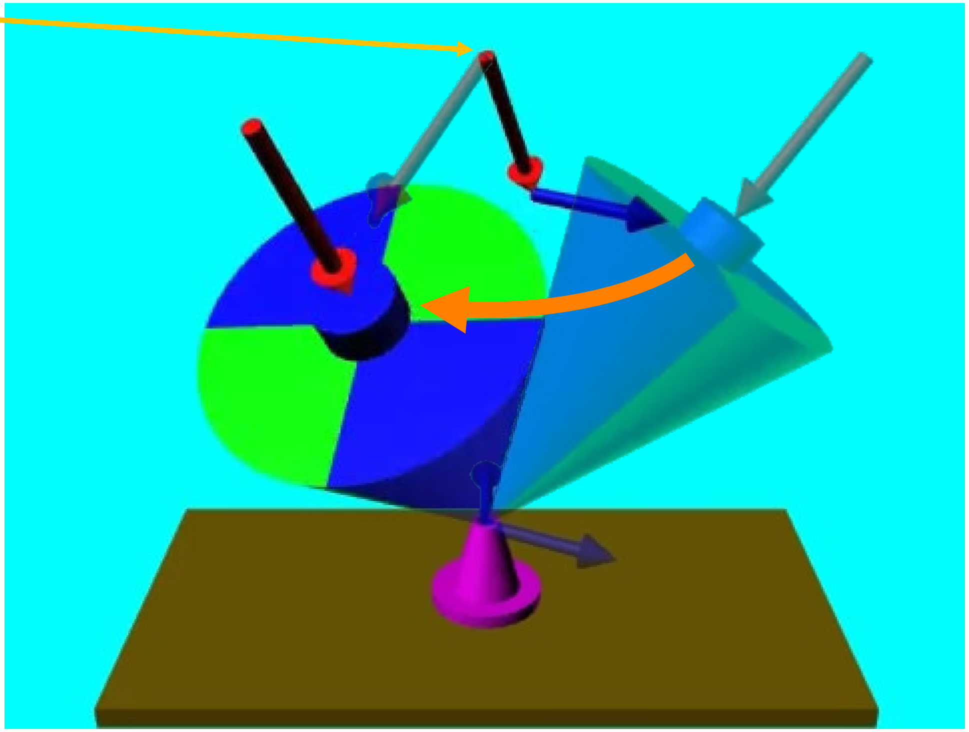
Fuente: Giménez, M.H., Riera, J., Vidaurre, A., y Carratalá, J.V. (2001). *Experiencias virtuales 3D de fundamentos físicos*. ISBN 84-9705-084-3. Editorial UPV.

Rojo: velocidad angular.
Azul: aceleración angular.

La velocidad angular es un vector

Si la velocidad angular tiene sentido contrario al anterior, el comportamiento de la peonza es el que aquí se muestra.

La velocidad angular cambia como si la aceleración angular tirara de su extremo.



Fuente: Giménez, M.H., Riera, J., Vidaurre, A., y Carratalá, J.V. (2001). *Experiencias virtuales 3D de fundamentos físicos*. ISBN 84-9705-084-3. Editorial UPV.

Rojo: velocidad angular.

Azul: aceleración angular.

III.- Composición de movimientos

Movimiento compuesto

Se denomina movimiento compuesto al realizado por un cuerpo que se encuentra sometido a dos movimientos simultáneos e independientes.

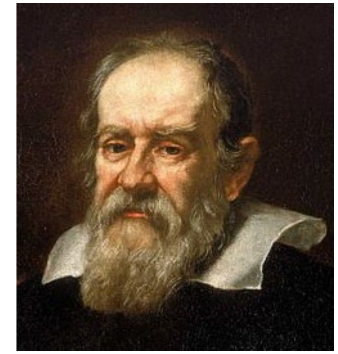
Ejemplos

- Nadador que cruza un río.
- Proyectil no lanzado verticalmente.
- Interferencia de las ondas generadas por dos piedras que han caído a un estanque.

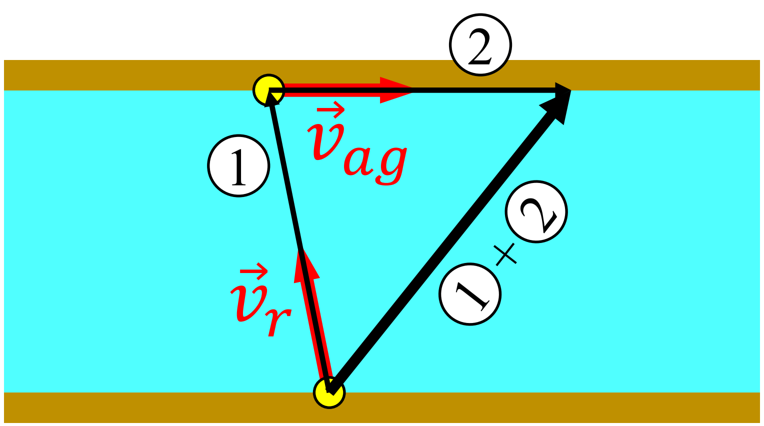
Movimiento compuesto

Principio de Galileo de la independencia de los movimientos.

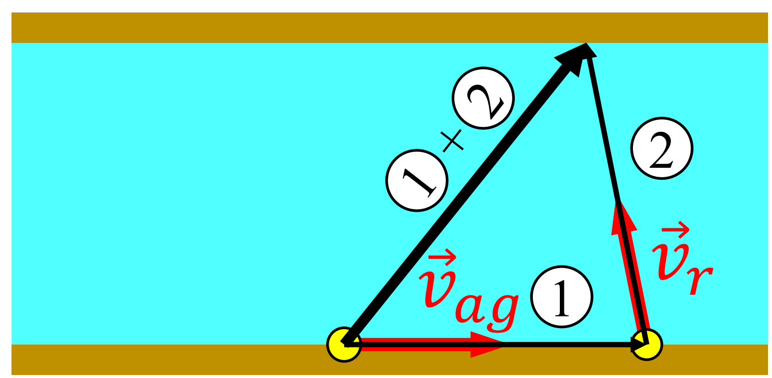
Cuando un cuerpo está dotado, por dos causas distintas, de dos movimientos simultáneos, su cambio de posición es independiente de que los dos movimientos se realicen de forma sucesiva o simultánea.



Fuente: Justus Sustermans, Public domain, via Wikimedia Commons



Movimientos sucesivos



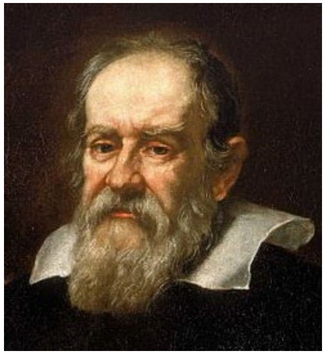
Movimientos sucesivos

$\vec{v}_{ag}$: velocidad del agua en un río; $\vec{v}_r$: velocidad de una barca por remadura.

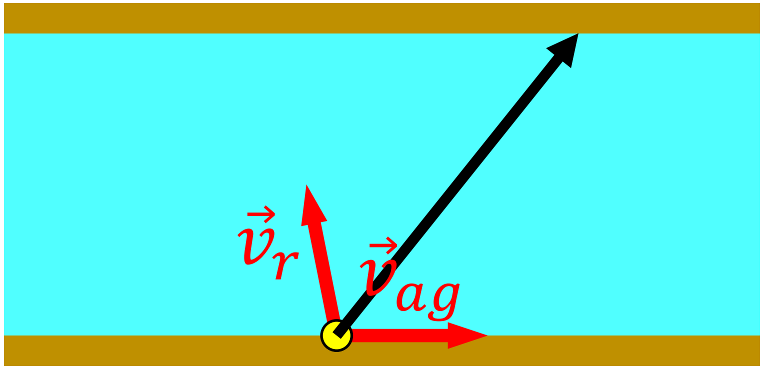
Movimiento compuesto

Principio de Galileo de la independencia de los movimientos.

Cuando un cuerpo está dotado, por dos causas distintas, de dos movimientos simultáneos, su cambio de posición es independiente de que los dos movimientos se realicen de forma sucesiva o simultánea.



Fuente: Justus Sustermans, Public domain, via Wikimedia Commons



Movimientos simultáneos

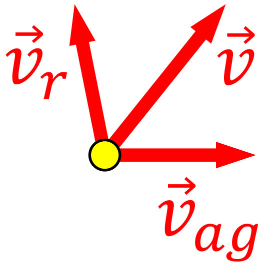
$\vec{v}_{ag}$: velocidad del agua en un río; $\vec{v}_r$: velocidad de una barca por remadura.

Movimiento compuesto

El “cambio de posición” mencionado es el desplazamiento.

Por tanto, lo que se afirma es que el desplazamiento real es la suma de los desplazamientos debidos a las dos causas actuando por separado.

Derivando esa suma, se deduce que la velocidad real es la suma de las velocidades debidas a las dos causas actuando por separado.



$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_{ag}$$

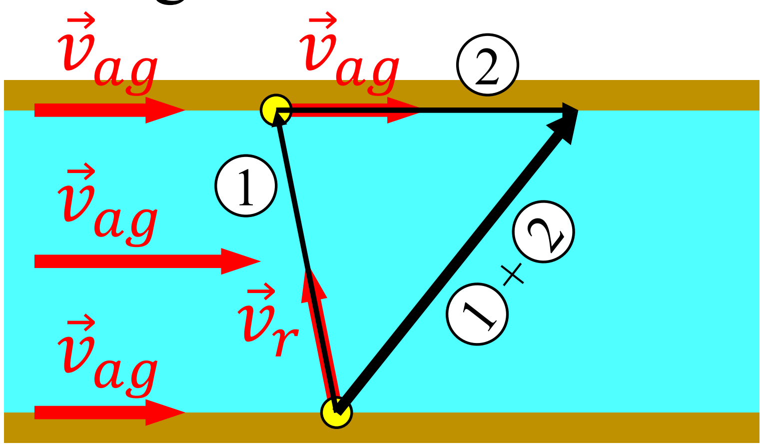
Derivando de nuevo, se concluye lo mismo respecto a las aceleraciones.

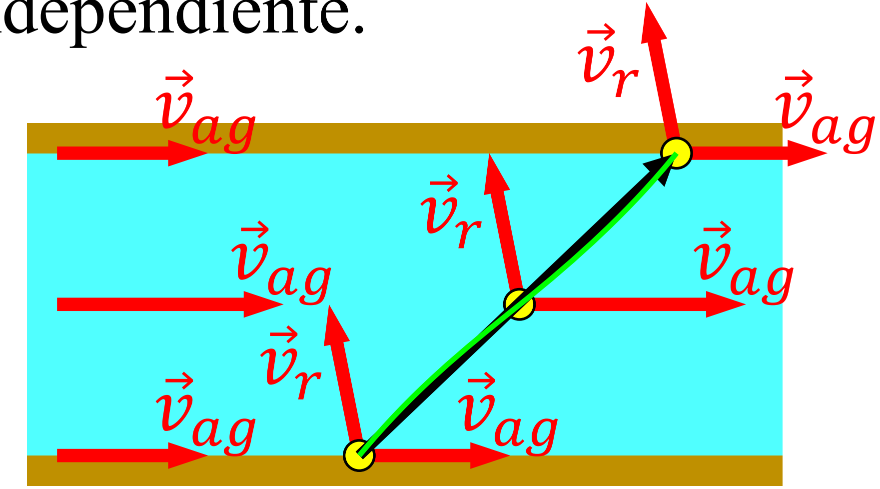
Movimiento compuesto

¿Qué significa "causas distintas"? Que sean independientes entre sí.

Por ejemplo, supongamos que la velocidad en el río es mayor en el centro del cauce que en las orillas.

El desplazamiento real difiere de los desplazamientos sucesivos porque el efecto de la corriente depende del lugar al que se ha llegado remando: no es independiente.





Movimientos sucesivos   Movimientos simultáneos

$\vec{v}_{ag}$: velocidad del agua en un río; $\vec{v}_r$: velocidad de una barca por remadura.

Proyectil

Sea un proyectil que se mueve con la aceleración constante de la gravedad.

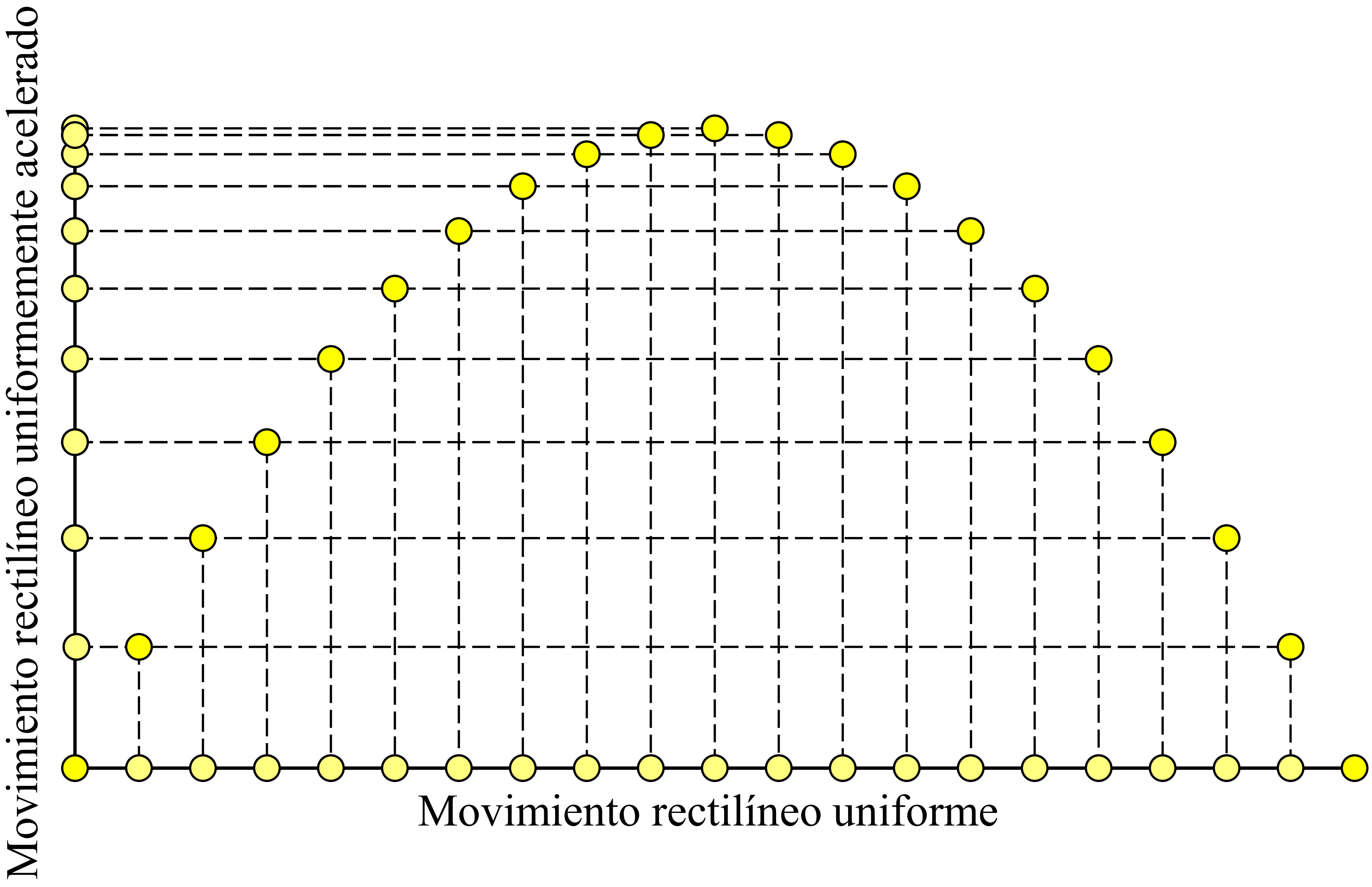
Se puede considerar que su movimiento obedece a dos causas independientes:

- el movimiento horizontal debido a la velocidad horizontal inicial;
- el movimiento vertical debido a la velocidad vertical inicial y a la aceleración constante de la gravedad.*

El horizontal es rectilíneo uniforme; el vertical, rectilíneo uniformemente acelerado.

* Este valor varía con la altura, la profundidad, e incluso a lo largo de la superficie. En el caso de la Tierra, se ha adoptado como valor estándar $g = 9{,}80665\,\mathrm{m/s^2}$ (exacto). En el presente documento se utilizará $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, salvo indicación expresa en contrario.

Proyectil


Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado
Movimiento rectilíneo uniforme

Ejercicio 5

La boca de un cañón está situada $10\ \mathrm{m}$ por encima del suelo horizontal. Una bala sale disparada con una velocidad de módulo $50\ \mathrm{m/s}$ y con un ángulo de $30°$ sobre la horizontal. Obténgase:

a) el vector de posición de la bala y su velocidad, ambos en función del tiempo;

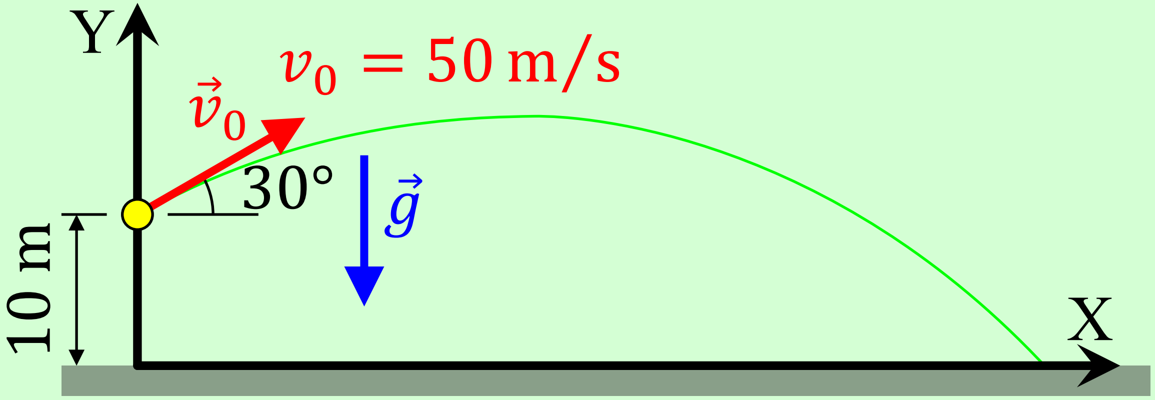
b) la distancia a la que llegará la bala;

c) el ángulo que forma la trayectoria con la horizontal en el momento del impacto;

d) la altura máxima que alcanzará la bala;

e) la altura a la que la bala golpearía un muro vertical si este se situara a una distancia horizontal de $200\ \mathrm{m}$ de la boca del cañón.

a) El primer paso es definir un sistema de referencia, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.



En este sistema de referencia bidimensional (el movimiento tiene lugar en un plano), es:

$$\vec{r}_0 = (0; 10)\,\mathrm{m}$$

$$\vec{v}_0 = (50\cos 30°; 50\,\mathrm{sen}\,30°) = (43{,}3; 25)\,\mathrm{m/s}$$

$$\vec{a} = \vec{g} = (0; -9{,}8)\,\mathrm{m/s^2}$$

$\vec{r}_0 = (0; 10)$ m ← Posición inicial.

$\vec{v}_0 = (43{,}3; 25)$ m/s ← Velocidad inicial.

$\vec{a} = (0; -9{,}8)$ m/s^2 ← Aceleración durante todo el movimiento analizado.

Se tiene a_x nula y a_y constante. Por tanto:

Eje X (m.r.u.) $\begin{cases} x = 0 + 43{,}3t = 43{,}3t \text{ (SI)} \\ v_x = 43{,}3 \text{ m/s} \end{cases}$

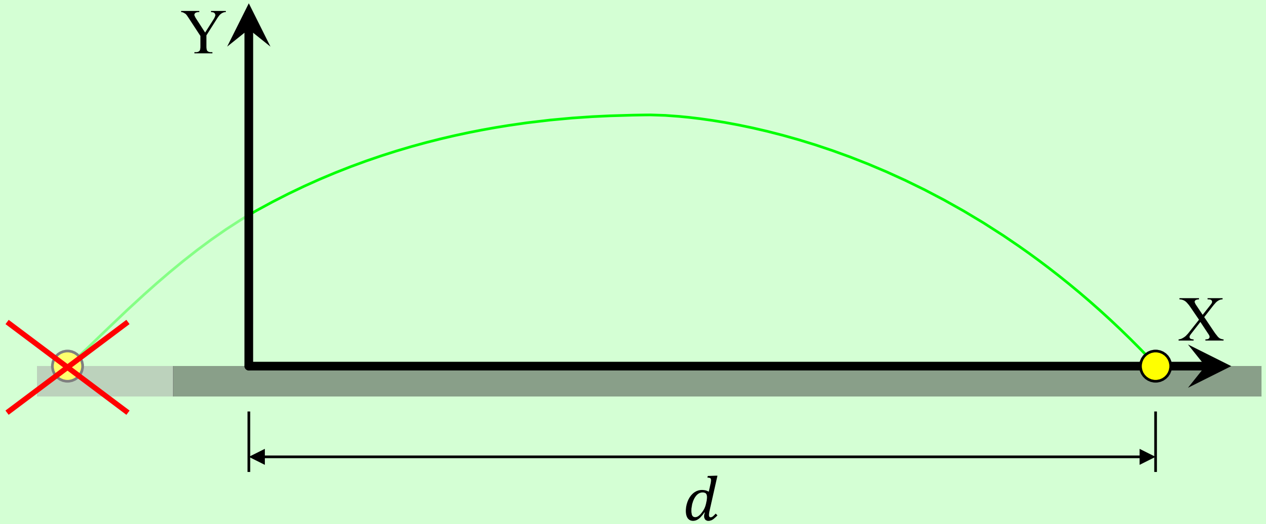
Eje Y (m.r.u.a.) $\begin{cases} y = 10 + 25t + \dfrac{1}{2}(-9{,}8)t^2 = 10 + 25t - 4{,}9t^2 \text{ (SI)} \\ v_y = 25 + (-9{,}8)t = 25 - 9{,}8t \text{ (SI)} \end{cases}$

En consecuencia: $\vec{r} = (43{,}3t; 10 + 25t - 4{,}9t^2)$ (SI)

$\vec{v} = (43{,}3;\ 25 - 9{,}8t)$ (SI)

Nótese que a partir de la expresión de $\vec{r}$ se podrían obtener valores de aceleración tangencial, aceleración normal, radio de curvatura, etc.
Nótese también que $\vec{v} = d\vec{r}/dt$.

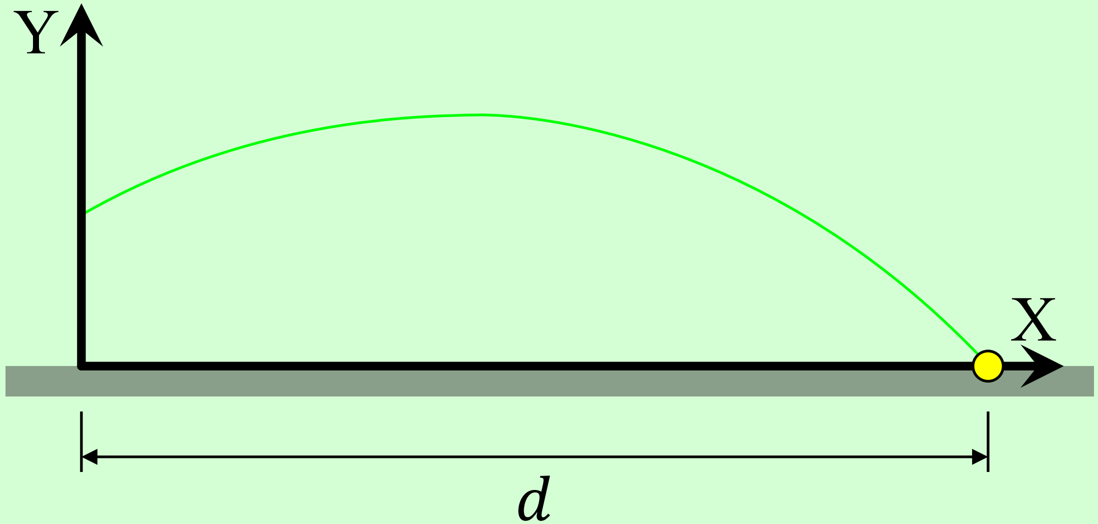
b)



Lo que tiene de específico el punto de impacto con el suelo, es que su coordenada y en el sistema de referencia utilizado es $y = 0$ m.

$$y = 0 \text{ m} \Rightarrow 10 + 25t - 4{,}9t^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -0{,}3728 \text{ s} \\ t = 5{,}475 \text{ s} \end{cases}$$

La solución $t = -0{,}3728$ s, aunque matemáticamente correcta, no es válida en este ejercicio, no por ser negativa, sino por ser anterior al inicio del movimiento analizado.



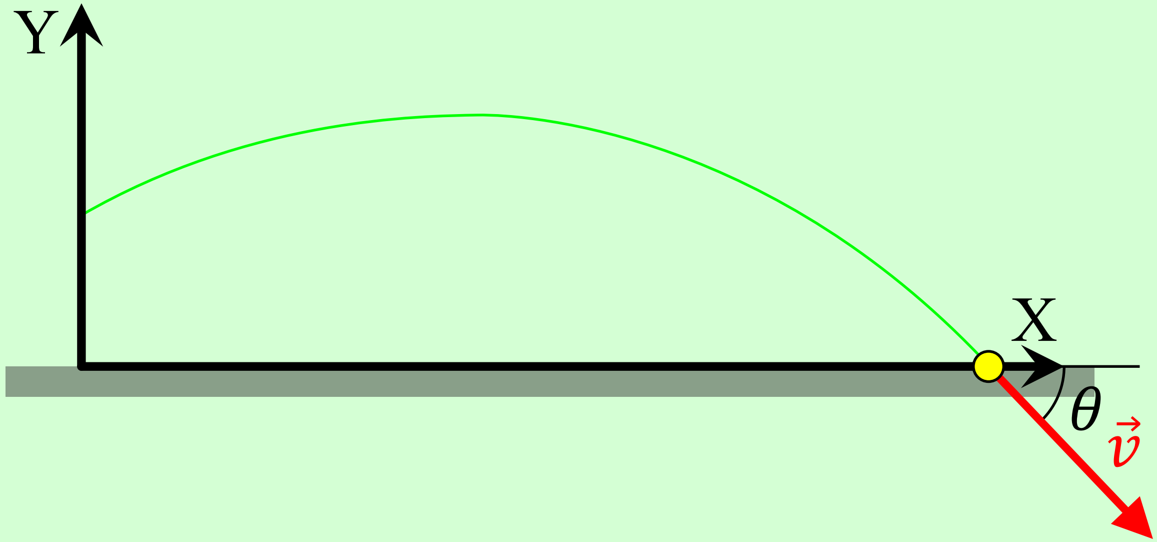
Para $t = 5{,}475$ s se tiene que

$$x = 43{,}3 \times 5{,}475 = 237{,}1 \text{ m}$$

En el sistema de referencia utilizado, la distancia d es precisamente la coordenada x del punto de impacto con el suelo. Por tanto,

$$d = 237{,}1 \text{ m}$$

c)



Recuérdese que la velocidad es siempre tangente a la trayectoria.

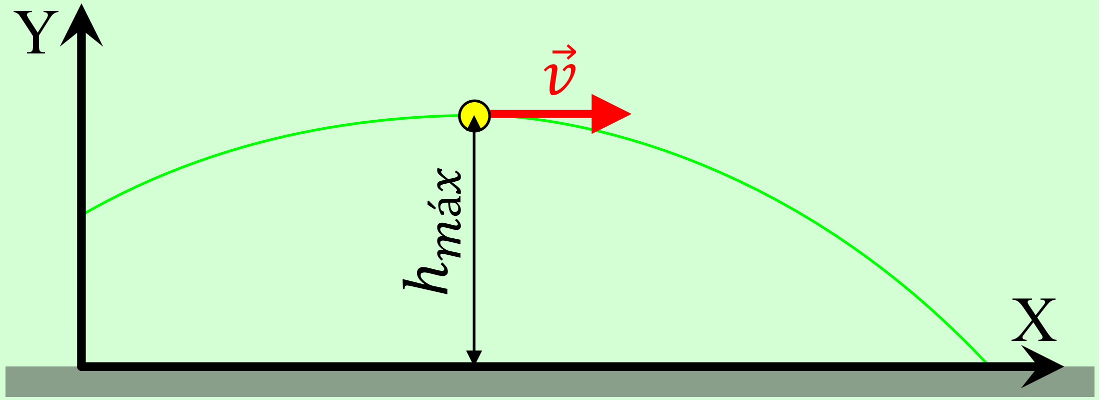
Por tanto, el ángulo que en el momento del impacto forma la trayectoria con la horizontal, es el mismo que forma la velocidad.

Es:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= 43{,}3\ \mathrm{m/s} \\ v_y &= 25 - 9{,}8 \times 5{,}475 = -28{,}66\ \mathrm{m/s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{v} = (43{,}3; -28{,}66)\ \mathrm{m/s}$$

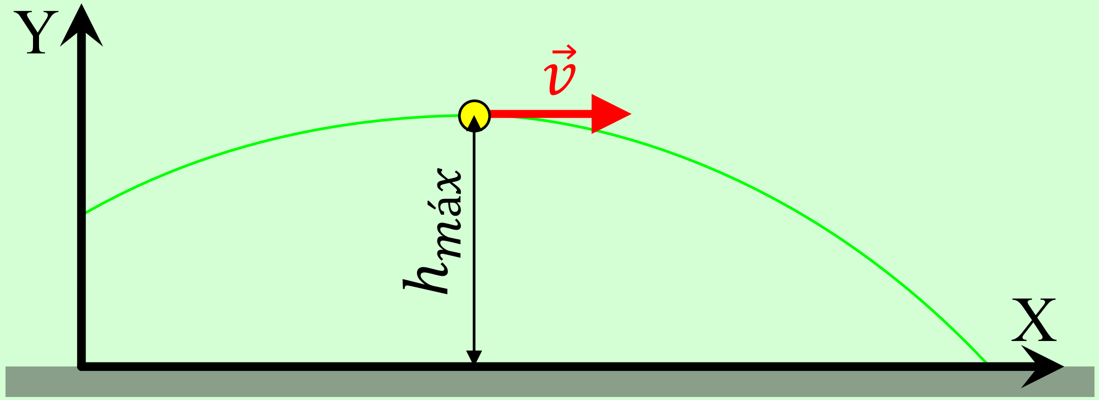
$$\theta = \mathrm{arctg}\frac{28{,}66}{43{,}3} = 33{,}50° \qquad \text{(Si se pidiera, es } v = 51{,}93\ \mathrm{m/s}\text{)}$$

d)



Lo que tiene de específico el punto más alto de la trayectoria, es que en él la velocidad es horizontal. Por tanto, en el sistema de referencia utilizado es $v_y = 0\,\mathrm{m/s}$.

$$v_y = 0\,\mathrm{m/s} \Rightarrow 25 - 9{,}8t = 0 \;\Rightarrow t = 2{,}551\,\mathrm{s}$$



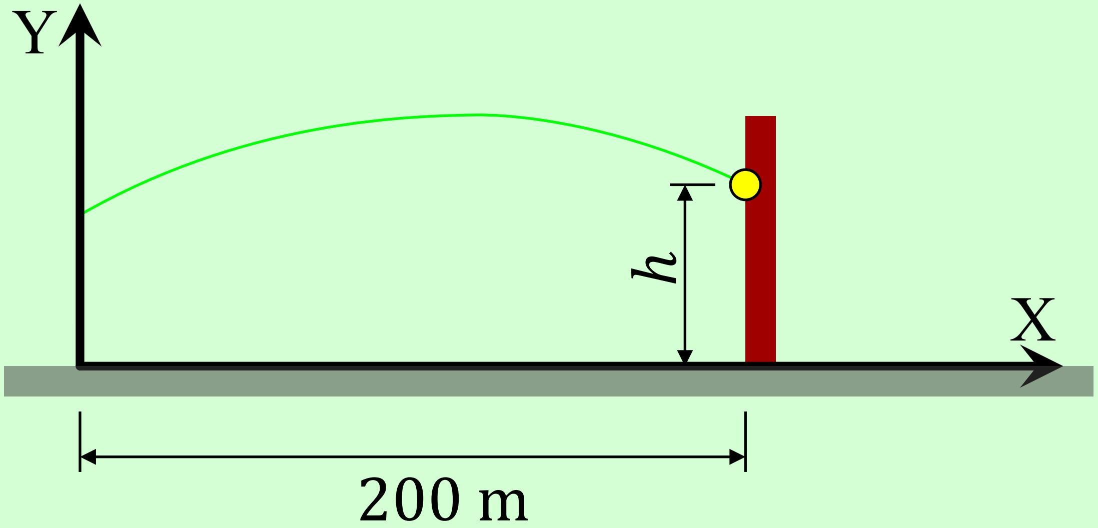
Para $t = 2{,}551$ s se tiene que

$$y = 10 + 25 \times 2{,}551 - 4{,}9 \times 2{,}551^2 = 41{,}89 \text{ m}$$

En el sistema de referencia utilizado, el valor de $h_{máx}$ es precisamente la coordenada y del punto analizado. Por tanto,

$$h_{máx} = 41{,}89 \text{ m}$$

e)



Lo que tiene de específico el punto de impacto con el muro, es que su coordenada x en el sistema de referencia utilizado es $x = 200$ m.

$$x = 200 \text{ m} \Rightarrow 43{,}3t = 200 \;\Rightarrow t = 4{,}619 \text{ s}$$

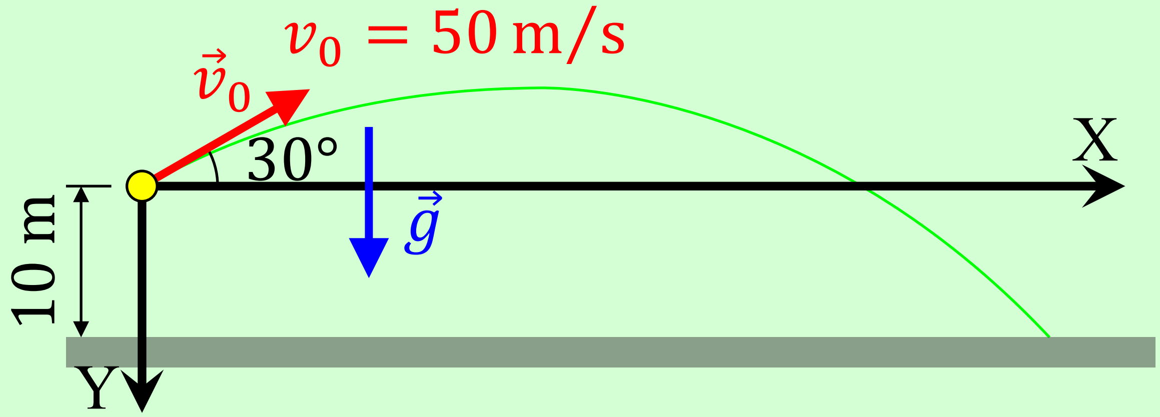
Para $t = 4{,}619$ s se tiene que

$$y = 10 + 25 \times 4{,}619 - 4{,}9 \times 4{,}619^2 = 20{,}93 \text{ m}$$

En el sistema de referencia utilizado, el valor de h es precisamente la coordenada y del punto analizado. Por tanto,

$$h = 20{,}93 \text{ m}$$

a) ¿Y si hubiéramos elegido otro sistema de referencia? Vamos a probar con el que se muestra en la figura.



En este sistema de referencia es:

$$\vec{r}_0 = (0; 0)\ \mathrm{m}$$

$$\vec{v}_0 = (50\cos 30°; -50\,\mathrm{sen}\,30°) = (43{,}3; -25)\ \mathrm{m/s}$$

$$\vec{a} = \vec{g} = (0; 9{,}8)\ \mathrm{m/s^2}$$

$\vec{r}_0 = (0; 0)\ \text{m}$ ← Posición inicial.

$\vec{v}_0 = (43{,}3; -25)\ \text{m/s}$ ← Velocidad inicial.

$\vec{a} = (0; 9{,}8)\ \text{m/s}^2$ ← Aceleración durante todo el movimiento analizado.

Se tiene a_x nula y a_y constante. Por tanto:

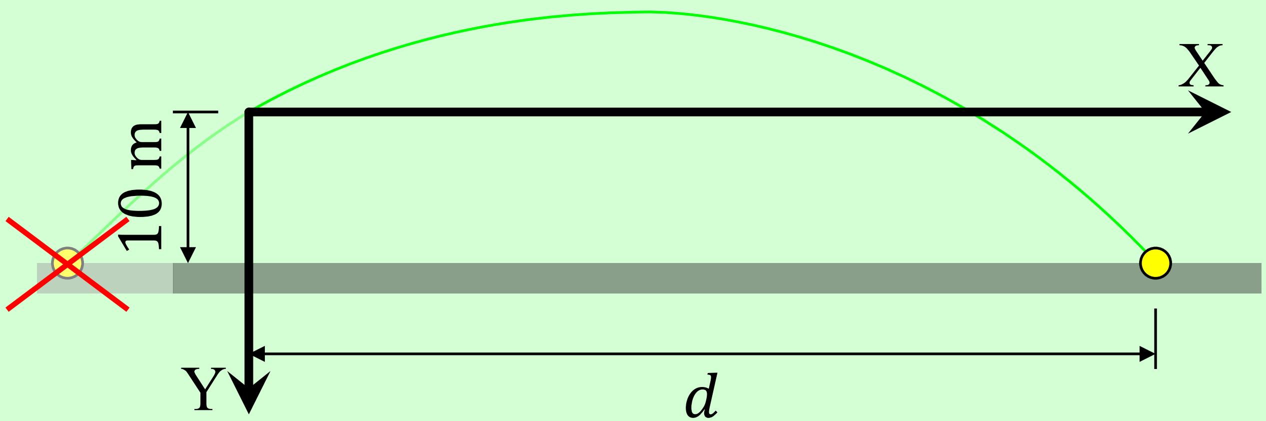
Eje X (m.r.u.) $\begin{cases} x = 0 + 43{,}3t = 43{,}3t \text{ (SI)} \\ v_x = 43{,}3\ \text{m/s} \end{cases}$

Eje Y (m.r.u.a.) $\begin{cases} y = 0 + (-25)t + \dfrac{1}{2}9{,}8t^2 = -25t + 4{,}9t^2 \text{ (SI)} \\ v_y = -25 + 9{,}8t = -25 + 9{,}8t \text{ (SI)} \end{cases}$

En consecuencia: $\vec{r} = (43{,}3t; -25t + 4{,}9t^2) \text{ (SI)}$

$\vec{v} = (43{,}3; -25 + 9{,}8t) \text{ (SI)}$

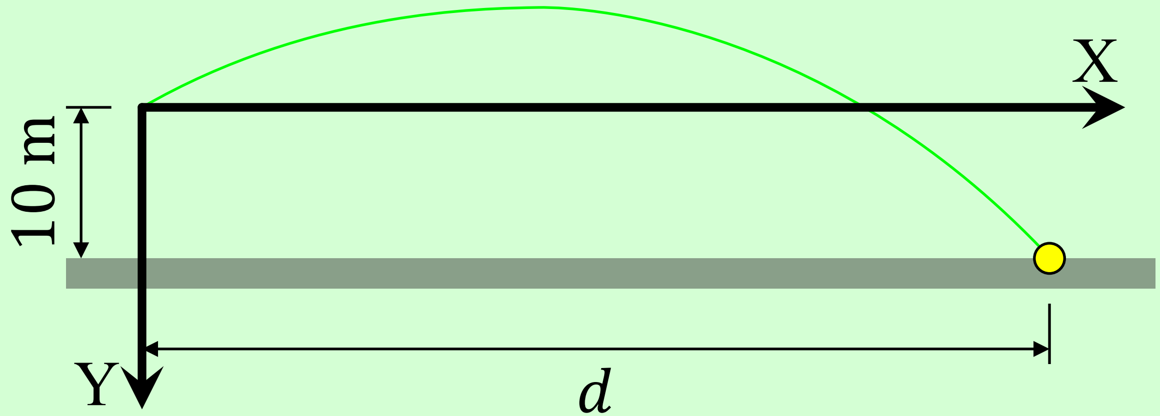
b)



Lo que tiene de específico el punto de impacto con el suelo, es que su coordenada y en el sistema de referencia utilizado es $y = 10$ m.

$$y = 10\ \mathrm{m} \Rightarrow -25t + 4{,}9t^2 = 10 \Rightarrow \begin{cases} t = -0{,}3728\ \mathrm{s} \\ t = 5{,}475\ \mathrm{s} \end{cases}$$

La solución $t = -0{,}3728$ s, aunque matemáticamente correcta, no es válida en este ejercicio, <u>no por ser negativa</u>, sino <u>por ser anterior al inicio del movimiento analizado</u>.



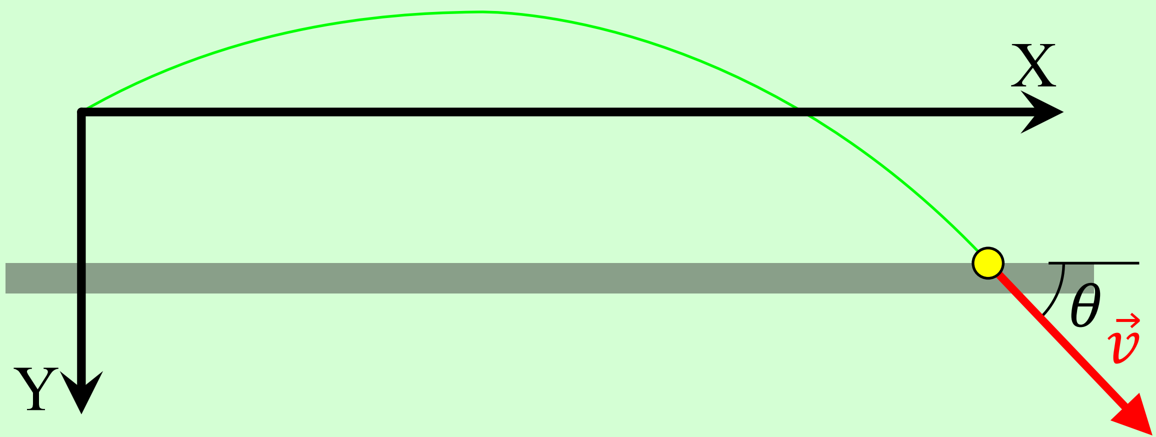
Para $t = 5{,}475$ s se tiene que

$$x = 43{,}3 \times 5{,}475 = 237{,}1 \text{ m}$$

En el sistema de referencia utilizado, la distancia d es precisamente la coordenada x del punto de impacto con el suelo. Por tanto,

$$d = 237{,}1 \text{ m}$$

c)



Recuérdese que la velocidad es siempre tangente a la trayectoria.

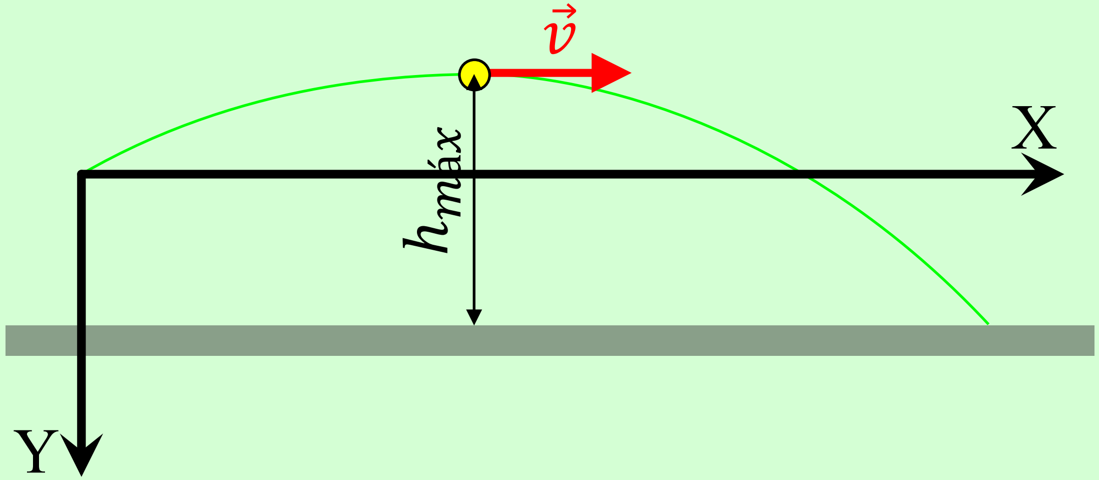
Por tanto, el ángulo que en el momento del impacto forma la trayectoria con la horizontal, es el mismo que forma la velocidad.

Es:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= 43{,}3\,\mathrm{m/s} \\ v_y &= -25 + 9{,}8 \times 5{,}475 = 28{,}66\,\mathrm{m/s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{v} = (43{,}3; 28{,}66)\,\mathrm{m/s}$$

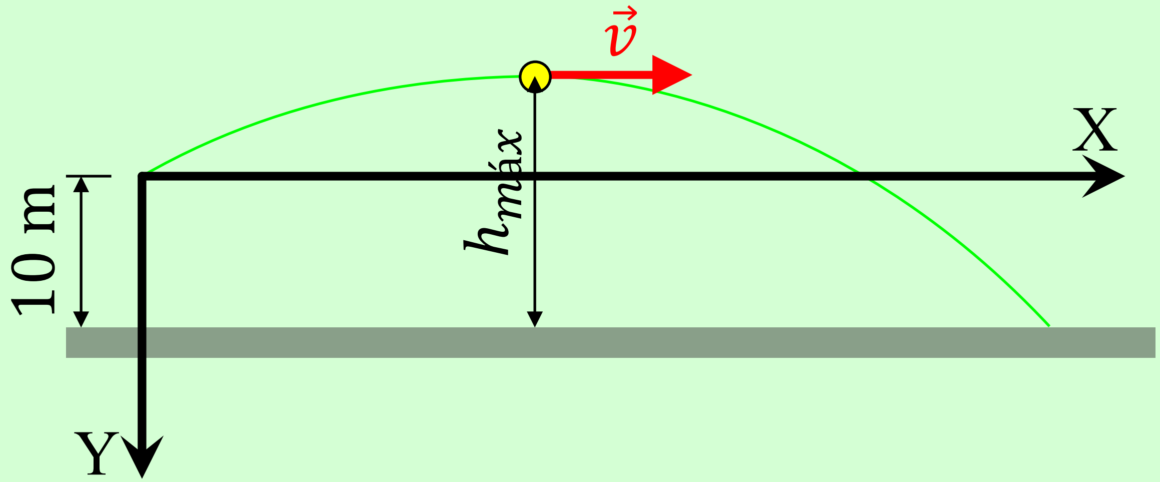
$$\theta = \mathrm{arctg}\frac{28{,}66}{43{,}3} = 33{,}50°$$ (Si se pidiera, es $v = 51{,}93\,\mathrm{m/s}$)

d)



Lo que tiene de específico el punto más alto de la trayectoria, es que en él la velocidad es horizontal. Por tanto, en el sistema de referencia utilizado es $v_y = 0\ \mathrm{m/s}$.

$$v_y = 0\ \mathrm{m/s} \Rightarrow -25 + 9{,}8t = 0 \ \Rightarrow t = 2{,}551\ \mathrm{s}$$



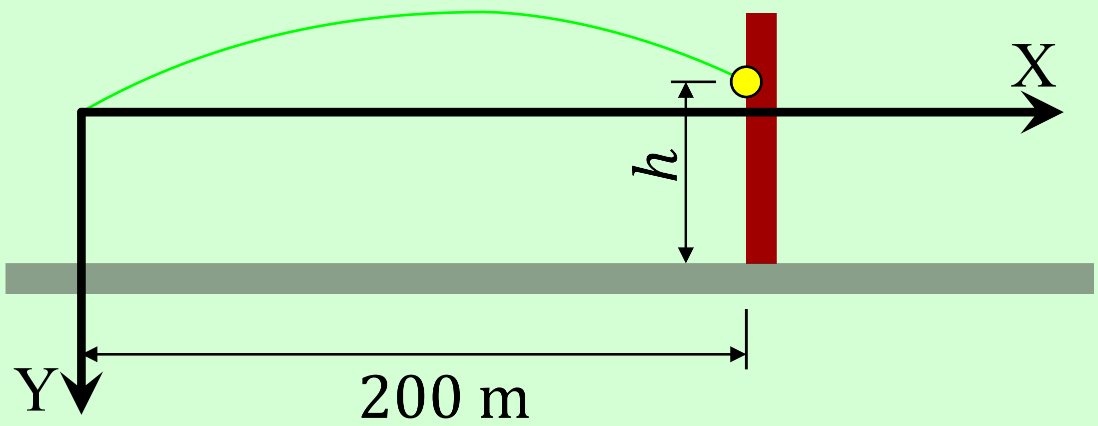
Para $t = 2{,}551$ s se tiene que

$$y = -25 \times 2{,}551 + 4{,}9 \times 2{,}551^2 = -31{,}89 \text{ m}$$

En el sistema de referencia utilizado, el valor de $h_{máx}$ es la diferencia entre esta coordenada y la y_s del suelo. Por tanto,

$$h_{máx} = y_s - y = 10 - (-31{,}89) = 41{,}89 \text{ m}$$

e)



Lo que tiene de específico el punto de impacto con el muro, es que su coordenada x en el sistema de referencia utilizado es $x = 200$ m.

$$x = 200 \text{ m} \Rightarrow 43{,}3t = 200 \ \Rightarrow t = 4{,}619 \text{ s}$$

Para $t = 4{,}619$ s se tiene que

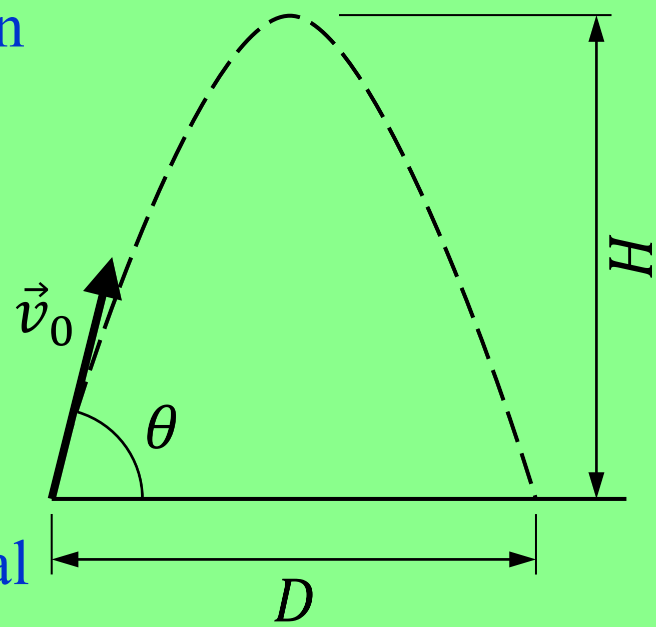
$$y = -25 \times 4{,}619 + 4{,}9 \times 4{,}619^2 = -10{,}93 \text{ m}$$

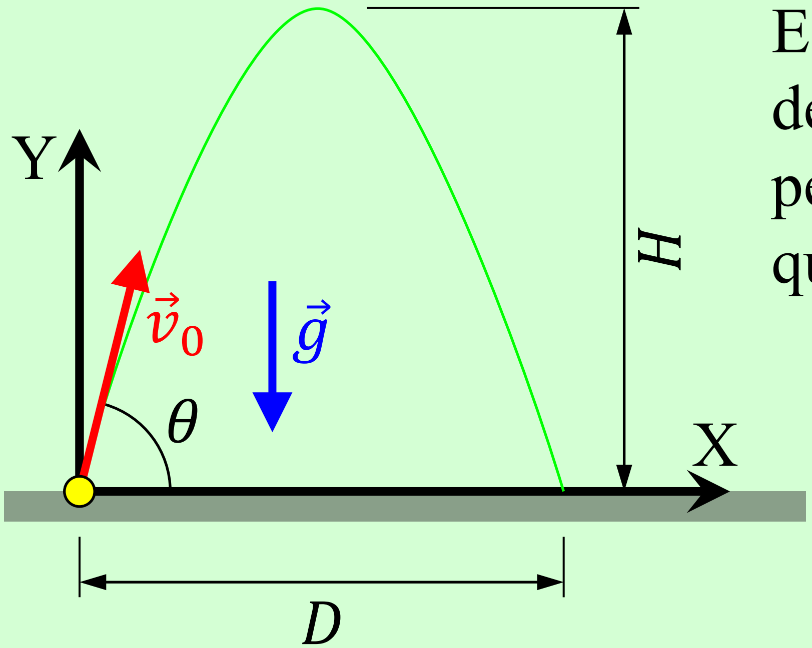
En el sistema de referencia utilizado, el valor de h es la diferencia entre esta coordenada y la y_s del suelo. Por tanto,

$$h = y_s - y = 10 - (-10{,}93) = 20{,}93 \text{ m}$$

Ejercicio 6

Un cañón dispara, desde el suelo, balas con una velocidad de módulo indeterminado v_0, actuando a partir de ese instante sobre ellas la aceleración constante de la gravedad, de módulo indeterminado g. ¿Con qué ángulo θ hay que orientar el cañón respecto a la horizontal, para que la altura máxima H alcanzada por las balas sea igual a su alcance D?





El primer paso es definir un sistema de referencia, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.

En este sistema de referencia bidimensional (el movimiento tiene lugar en un plano), es:

$$\vec{r}_0 = (0; 0)\ \mathrm{m}$$

$$\vec{v}_0 = (v_0 \cos\theta\, ; v_0 \operatorname{sen}\theta)$$

$$\vec{a} = \vec{g} = (0; -g)$$

Se tiene a_x nula y a_y constante. Por tanto:

Eje X (m.r.u.) $\begin{cases} x = 0 + (v_0 \cos\theta)t = v_0 t \cos\theta \\ v_x = v_0 \cos\theta \end{cases}$

Eje Y (m.r.u.a.) $\begin{cases} y = 0 + (v_0 \operatorname{sen}\theta)t + \dfrac{1}{2}(-g)t^2 = v_0 t \operatorname{sen}\theta - \dfrac{1}{2}gt^2 \\ v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta + (-g)t = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt \end{cases}$

Lo que tiene de específico el punto de impacto con el suelo, es que su coordenada y en el sistema de referencia utilizado es $y = 0$ m.

$$y = 0\text{ m} \Rightarrow v_0 t \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t\left(v_0 \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}gt\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0\text{ s} \\ v_0 \operatorname{sen}\theta - \dfrac{1}{2}gt = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}gt = v_0 \operatorname{sen}\theta \Rightarrow t = \dfrac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} \end{cases}$$

La solución $t = 0$ s corresponde al instante inicial, donde en efecto es $y = 0$ m, pero la del instante del impacto es la otra.

Para $t = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$ se tiene que

$$x = v_0 t \cos\theta = v_0 \left(\frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\right)\cos\theta = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g}$$

En el sistema de referencia utilizado, la distancia D es precisamente la coordenada x del punto de impacto con el suelo. Por tanto,

$$D = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g}$$

Lo que tiene de específico el punto más alto de la trayectoria, es que en él la velocidad es horizontal. Por tanto, en el sistema de referencia utilizado es $v_y = 0\,\mathrm{m/s}$.

$$v_y = 0\,\mathrm{m/s} \Rightarrow v_0 \operatorname{sen}\theta - gt = 0 \Rightarrow gt = v_0 \operatorname{sen}\theta \Rightarrow t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

Nótese que, en este caso particular, el tiempo obtenido es la mitad del que tarda en tener lugar el impacto.

Para $t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{g}$ se tiene que

$$y = v_0 t \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{g} \right) \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{g} \right)^2 =$$

$$= \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{g^2} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{g} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \right) \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{g}$$

En el sistema de referencia utilizado, el valor de H es precisamente la coordenada y del punto analizado. Por tanto,

$$H = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{g}$$

Recapitulando:

$$D = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g} \ ; \ \ H = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g}$$

La condición buscada es que sea $H = D$. Para ello,

$$\frac{1}{2}\frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g} = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g}$$

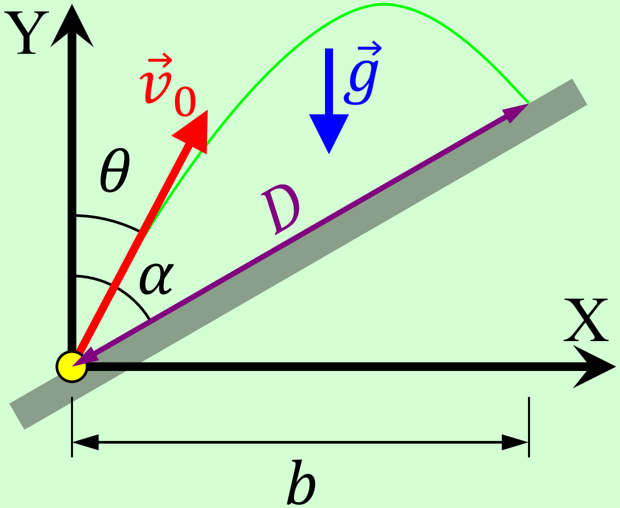
Simplificando términos, resulta

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta = 2\cos\theta \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 4 \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = 4 \Rightarrow \theta = 75{,}96°$$

Nótese que el resultado no depende del valor de v_0 ni del de g.

Ejercicio 7

Desde el suelo, un cañón dispara balas con una velocidad de módulo indeterminado v_0, actuando a partir de ese instante sobre ellas la aceleración constante de la gravedad, de módulo indeterminado g. El suelo es un plano inclinado que forma un ángulo indeterminado α con la vertical ($\alpha \in (0°; 180°)$). ¿Con qué ángulo θ hay que orientar el cañón respecto a la vertical, para que sea máxima la distancia D alcanzada por las balas?



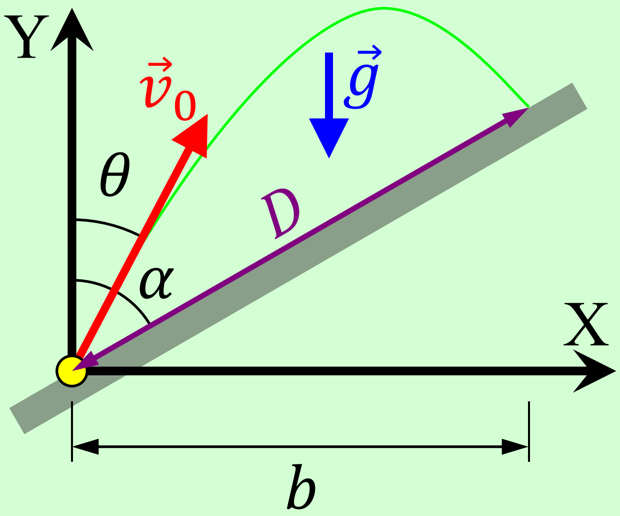
El primer paso es definir un sistema de referencia, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.

En este sistema de referencia bidimensional (el movimiento tiene lugar en un plano), es:

$$\vec{r}_0 = (0; 0)\ \mathrm{m}$$
$$\vec{v}_0 = (v_0 \operatorname{sen}\theta\,; v_0 \cos\theta)$$
$$\vec{a} = \vec{g} = (0; -g)$$

Hay algunos detalles que conviene mencionar.

- Como indica el anunciado, el ángulo θ se toma con la vertical, por lo que las expresiones de las componentes de $\vec{v}_0$ cambian respecto a los ejercicios anteriores.
- El desarrollo es válido para $\alpha > 90°$ (suelo descendente), así como para $\theta > 90°$ (sería $\cos\theta < 0$ y, por tanto, $v_{0y} = v_0 \cos\theta < 0$).



Se tiene a_x nula y a_y constante. Por tanto:

$$\text{Eje X (m.r.u.)} \begin{cases} x = 0 + (v_0 \operatorname{sen}\theta)t = v_0 t \operatorname{sen}\theta \\ v_x = v_0 \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$\text{Eje Y (m.r.u.a.)} \begin{cases} y = 0 + (v_0 \cos\theta)t + \frac{1}{2}(-g)t^2 = v_0 t \cos\theta - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y = v_0 \cos\theta + (-g)t = v_0 \cos\theta - gt \end{cases}$$

Lo que tiene de específico el punto de impacto con el suelo, es que sus coordenadas x e y en el sistema de referencia utilizado deben cumplir que $x/y = \operatorname{tg}\alpha$.

Por tanto,

$$y = \frac{x}{\operatorname{tg}\alpha} \Rightarrow v_0 t \cos\theta - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{v_0 t \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{tg}\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t\left(v_0 \cos\theta - \frac{1}{2} g t - \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ s} \\ v_0 \cos\theta - \dfrac{1}{2} g t - \dfrac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{tg}\alpha} = 0 \end{cases}$$

La solución $t = 0$ s corresponde al instante inicial, donde en efecto la bala está en el plano del suelo, pero la del instante del impacto es la de la segunda expresión, que se desarrolla a continuación.

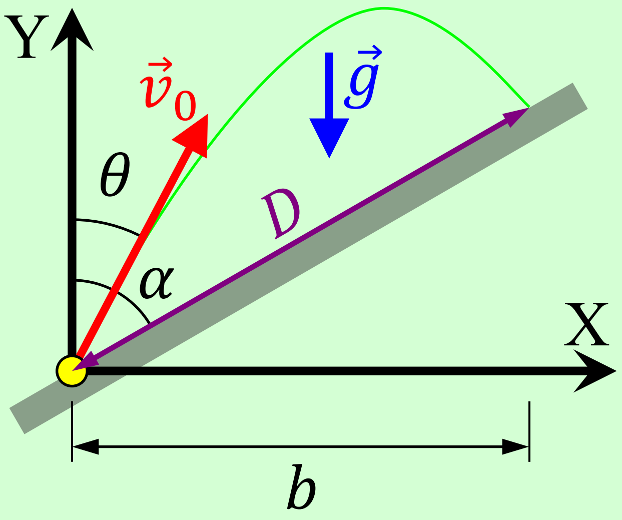
$$\frac{1}{2} g t = v_0 \cos\theta - \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{tg}\alpha} = v_0\left(\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{tg}\alpha}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{2 v_0}{g}\left(\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$$

Para ese valor de t se tiene que

$$x = v_0 t \operatorname{sen}\theta = v_0 \left[\frac{2v_0}{g}\left(\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\right]\operatorname{sen}\theta =$$

$$= \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta}{g}\left(\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$$



En el sistema de referencia utilizado, la distancia b es precisamente la coordenada x del punto de impacto con el suelo. Por tanto,

$$b = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta}{g}\left(\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$$

Podría a partir de aquí obtenerse la expresión de D y buscar su máximo. Sin embargo, el desarrollo es más sencillo observando que el máximo de D se corresponde con el máximo de b, y este con el máximo de la función

$$f = \operatorname{sen}\theta\left(\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$$

Las derivadas primera y segunda de

$$f = \operatorname{sen}\theta\left(\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$$

respecto a la variable θ, son:

$$\frac{df}{d\theta} = \cos\theta\left(\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{tg}\alpha}\right) + \operatorname{sen}\theta\left(-\operatorname{sen}\theta - \frac{\cos\theta}{\operatorname{tg}\alpha}\right) =$$

$$= \cos^2\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{tg}\alpha} - \operatorname{sen}^2\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= [\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta] - \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{tg}\alpha} = \cos(2\theta) - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\frac{d^2f}{d\theta^2} = -2\operatorname{sen}(2\theta) - \frac{2\cos(2\theta)}{\operatorname{tg}\alpha}$$

A continuación obtenemos los valores de θ para los que la derivada primera es cero.

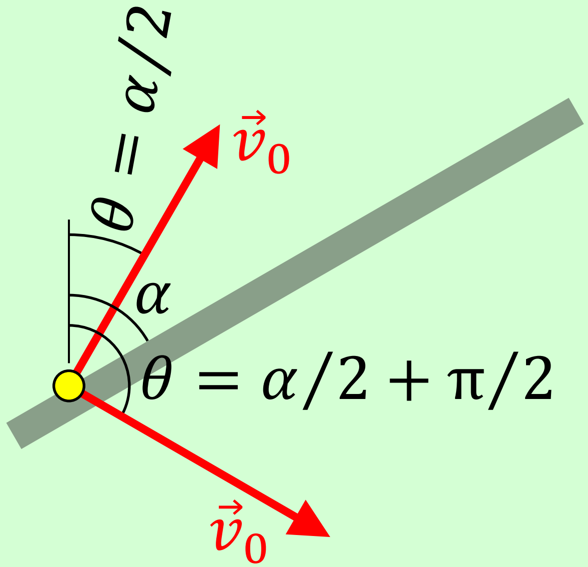
$$\frac{df}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos(2\theta) - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\operatorname{tg}\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\operatorname{tg}\alpha} = \cos(2\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}(2\theta) = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\theta = \alpha \Rightarrow \theta = \alpha/2 \\ 2\theta = \alpha + \pi \Rightarrow \theta = \alpha/2 + \pi/2 \end{cases}$$

Como ejemplo, y utilizando grados, para $\alpha = 30°$ son soluciones tanto $\theta = 15°$ como $\theta = 105°$, pues ambas cumplen que $\operatorname{tg}(2\theta) = \operatorname{tg} 30°$.

La solución $\theta = \alpha/2 + \pi/2$, aunque matemáticamente correcta, no es válida en este ejercicio, ya que resulta $\theta > \alpha$ ($\alpha \in (0;\pi)$ rad $\Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha < \pi \Rightarrow \alpha/2 < \pi/2 \Rightarrow \theta = \alpha/2 + \pi/2 > \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$), lo que implica disparar directamente contra el suelo.



A la izquierda aparecen representadas las dos soluciones. Puede verse que, en efecto, $\theta = \alpha/2 + \pi/2$ no es válida.

Vamos ahora a obtener el valor de la derivada segunda de f para la solución válida obtenida.

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} = -2\,\mathrm{sen}(2\theta) - \frac{2\cos(2\theta)}{\mathrm{tg}\,\alpha}$$

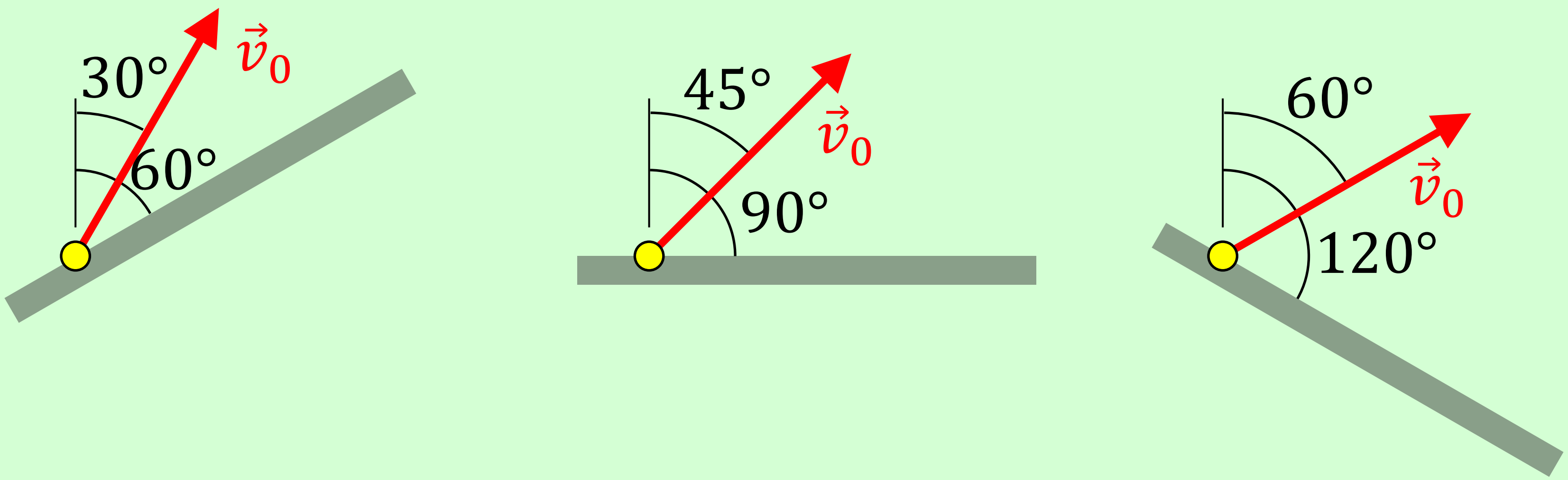
$$\left(\frac{d^2 f}{d\theta^2}\right)_{\theta=\alpha/2} = -2\,\mathrm{sen}\,\alpha - \frac{2\cos\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha} = -2\,\mathrm{sen}\,\alpha - \frac{2\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha/\cos\alpha} =$$

$$= -\frac{2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha} - \frac{2\cos^2\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha} = -\frac{2(\mathrm{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha)}{\mathrm{sen}\,\alpha} =$$

$$= -\frac{2}{\mathrm{sen}\,\alpha}$$

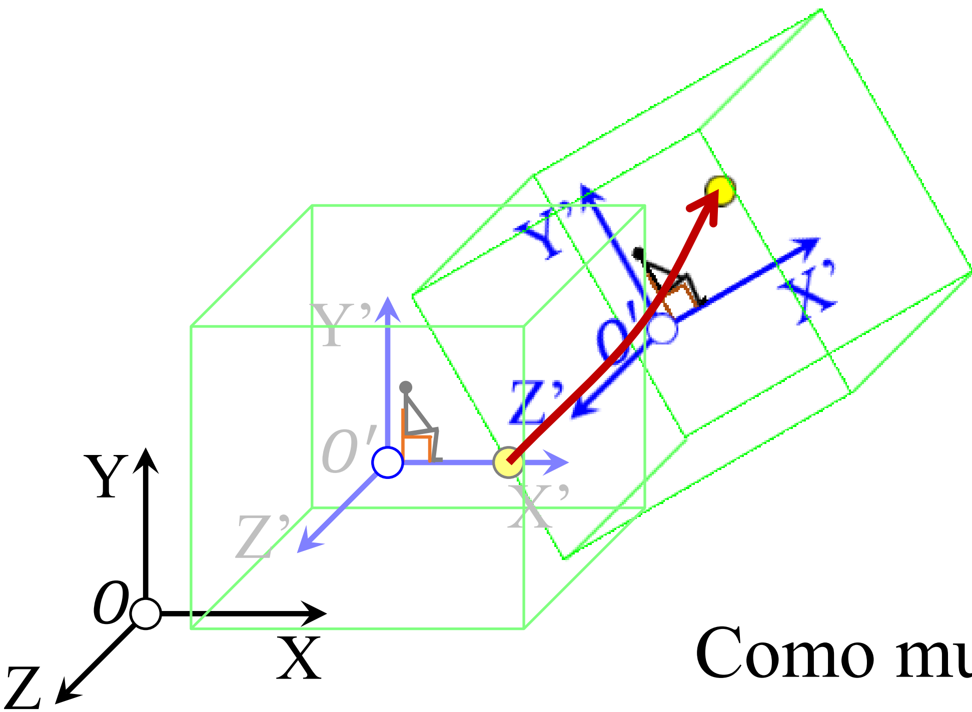
De acuerdo con el enunciado, es $\alpha \in (0;\pi)$ rad ($\alpha < \pi/2$ rad si el suelo es ascendente; $\alpha > \pi/2$ rad si es descendente, y $\alpha = \pi/2$ rad si es horizontal). Para todos los valores del intervalo es $\mathrm{sen}\,\alpha > 0$. Así, el valor de la derivada segunda para $\theta = \alpha/2$ es negativo, y se tiene un máximo de f y, por tanto, de D.

Desde una perspectiva geométrica, esto significa que D es máxima si la bala se dispara según la bisectriz del ángulo que forma el suelo con la vertical. Nótese además que el resultado no depende del valor de v_0 ni del de g.

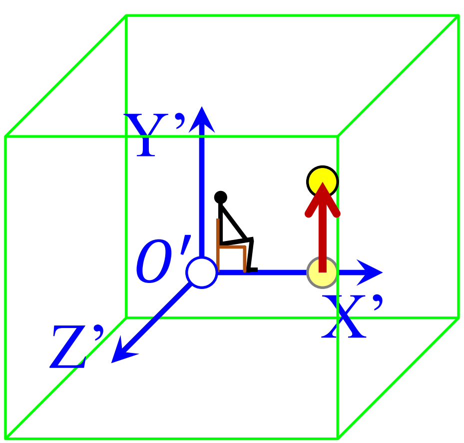


IV.- Movimiento relativo

Movimientos absoluto y relativo

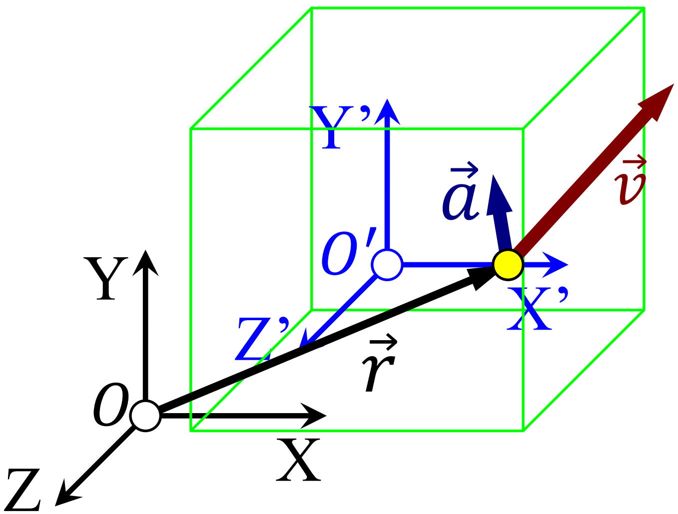


Sean un sistema de referencia, XYZ, que consideraremos fijo, y otro móvil X'Y'Z', ligado a un observador móvil, por ejemplo un pasajero en un avión.

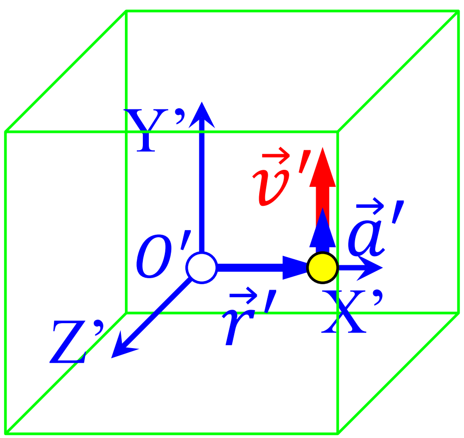


Como muestra la figura, el movimiento de un punto (por ejemplo una mosca en el avión), tal y como lo percibe el observador móvil (parte inferior), no coincide con el real (parte superior).

Movimientos absoluto y relativo



En cualquier instante, la situación real del punto queda descrita por su vector de posición $\vec{r}$, su velocidad $\vec{v}$, y su aceleración $\vec{a}$.



Para el observador móvil, la situación del punto queda descrita por su vector de posición $\vec{r}\,'$, su velocidad $\vec{v}\,'$, y su aceleración $\vec{a}\,'$, respecto al sistema de referencia móvil al que dicho observador está ligado.

Movimientos absoluto y relativo

Como es obvio, los valores reales de estos vectores, y los percibidos por el observador, son distintos pero no independientes.

Las relaciones entre todos ellos dependen de los parámetros que caracterizan el movimiento del sistema de referencia X'Y'Z' en el instante considerado. Esos parámetros son:

- el vector de posición $\vec{r}_{O'}$, la velocidad $\vec{v}_{O'}$, y la aceleración $\vec{a}_{O'}$, del origen O' del sistema móvil;
- la velocidad angular $\vec{\omega}$, y la aceleración angular $\vec{\alpha}$, del sistema móvil.

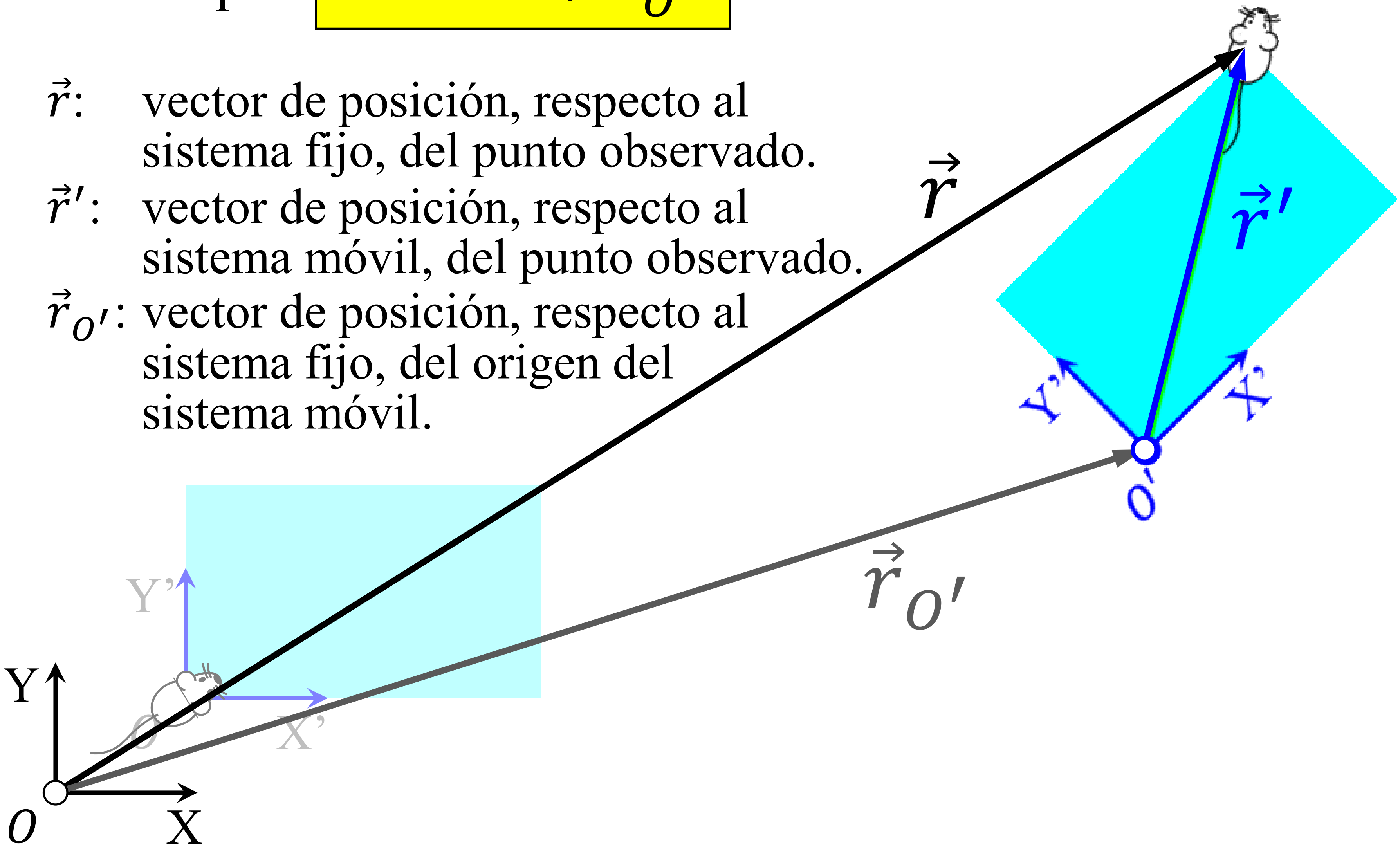
El primer conjunto de parámetros caracteriza la traslación del sistema X'Y'Z', y el segundo su rotación.

Nuestro objetivo es encontrar y analizar estas relaciones.

Relación entre vectores de posición

Nótese que $\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{O'}}$

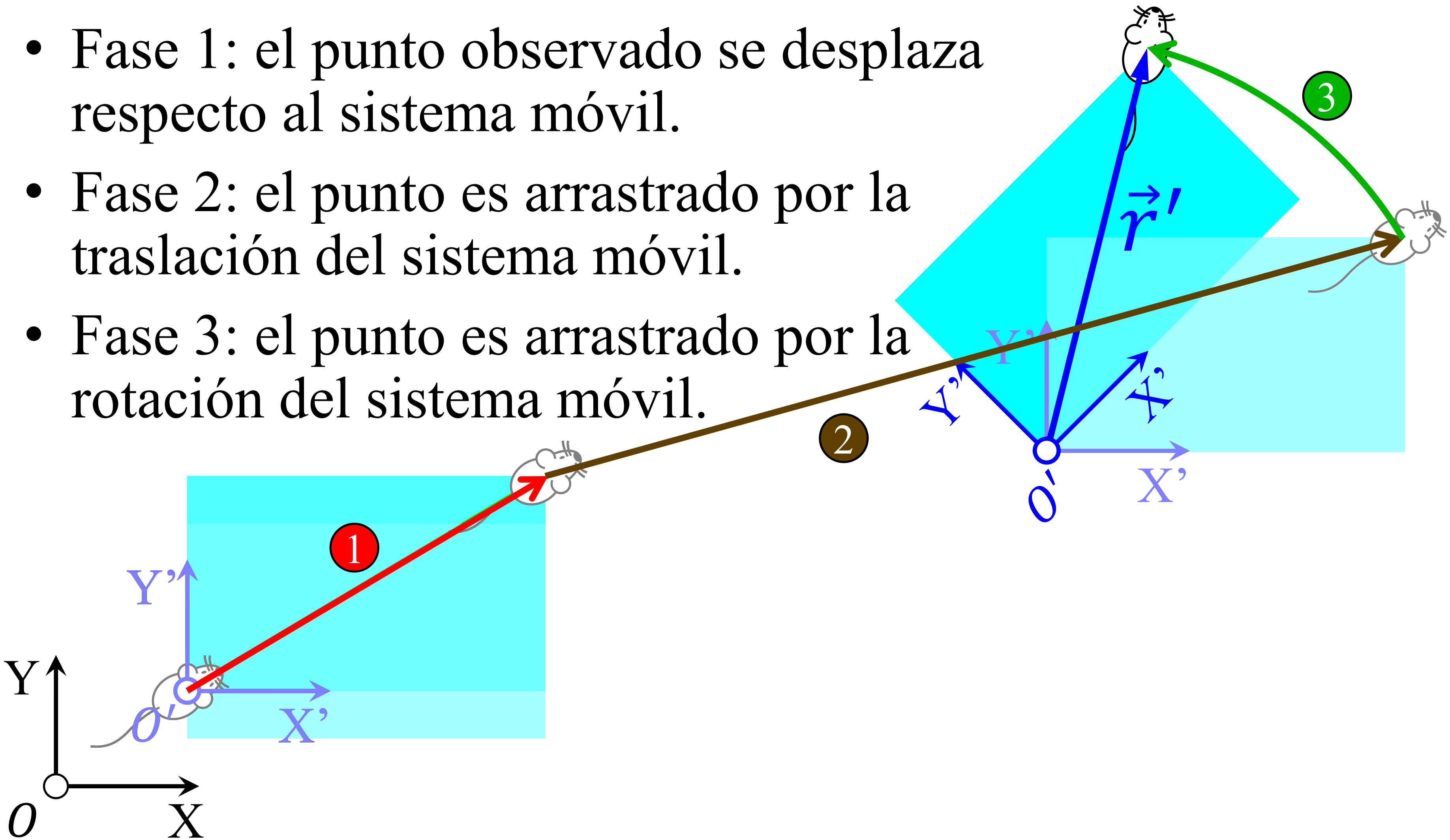
- $\vec{r}$: vector de posición, respecto al sistema fijo, del punto observado.
- $\vec{r}\,'$: vector de posición, respecto al sistema móvil, del punto observado.
- $\vec{r}_{O'}$: vector de posición, respecto al sistema fijo, del origen del sistema móvil.



Movimiento relativo: descomposición

Vamos a descomponer el movimiento en tres fases.

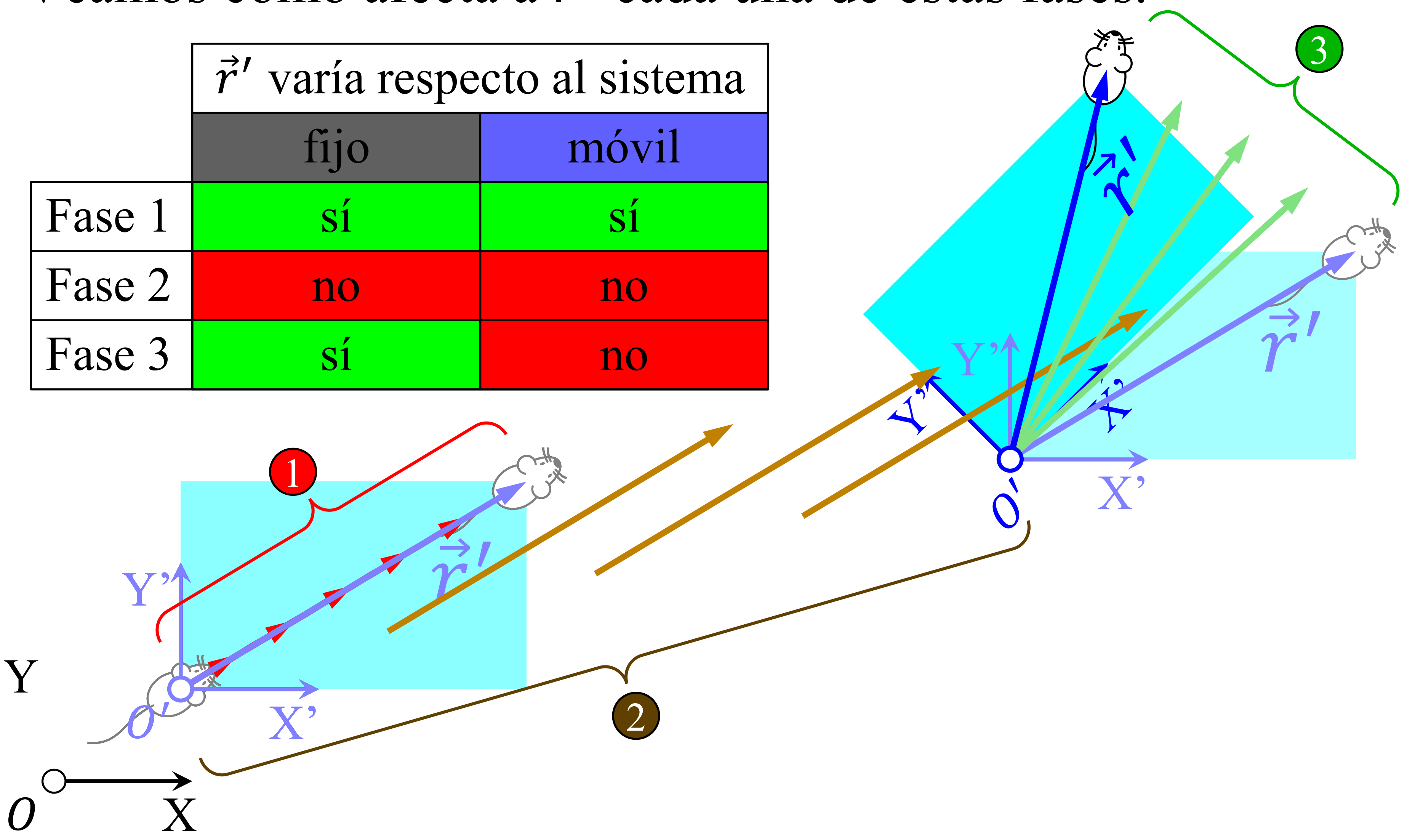
- Fase 1: el punto observado se desplaza respecto al sistema móvil.
- Fase 2: el punto es arrastrado por la traslación del sistema móvil.
- Fase 3: el punto es arrastrado por la rotación del sistema móvil.



Cambio del vector de posición relativa

Veamos cómo afecta a $\vec{r}\,'$ cada una de estas fases.

	$\vec{r}\,'$ varía respecto al sistema	
	fijo	móvil
Fase 1	sí	sí
Fase 2	no	no
Fase 3	sí	no



Cambio del vector de posición relativa

Veamos cómo afecta a $\vec{r}'$ cada una de estas fases.

	$\vec{r}'$ varía respecto al sistema	
	fijo	móvil
Fase 1	sí	sí
Fase 2	no	no
Fase 3	sí	no

En el sistema móvil, solo hay cambio de $\vec{r}'$ en la fase 1. El ritmo de ese cambio es la velocidad relativa a ese sistema, a la que denotaremos por $\vec{v}'$.

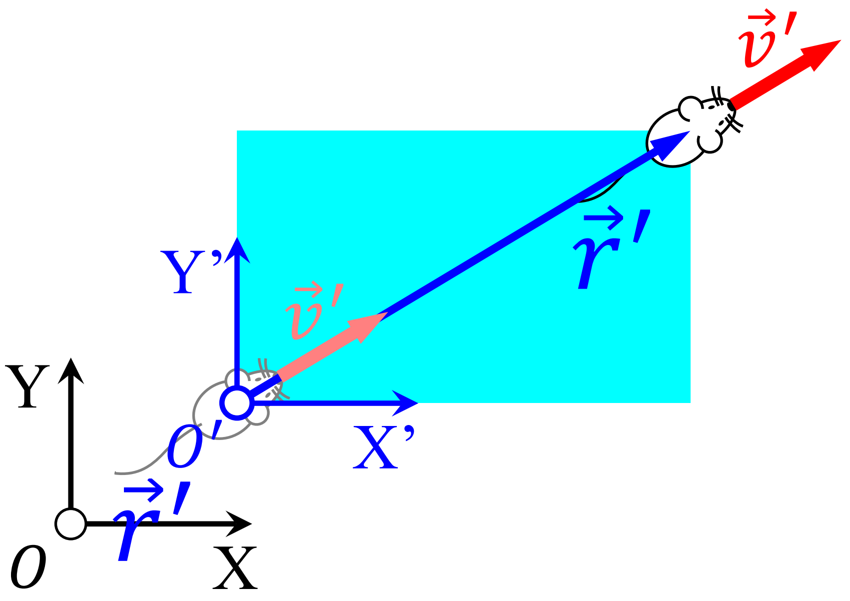
En el sistema fijo, hay cambio de $\vec{r}'$ en las fases 1 y 3. Por tanto, su ritmo de cambio es la suma de los existentes en esas fases. $d\vec{r}'/dt = (d\vec{r}'/dt)_1 + (d\vec{r}'/dt)_3$

Cambio del vector de posición relativa

En la fase 1, $\vec{r}'$ es el mismo en los dos sistemas.

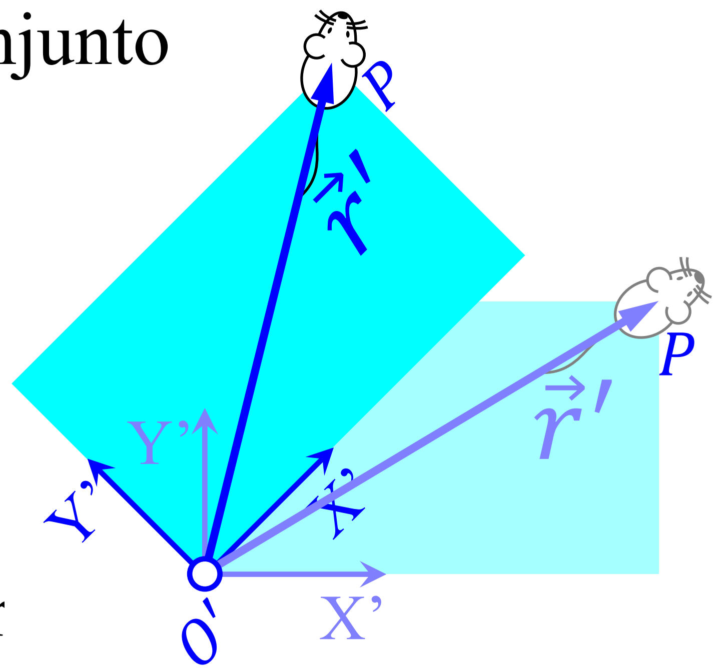
Por tanto, su ritmo de cambio es también el mismo.

$$(d\vec{r}'/dt)_1 = \vec{v}'$$



Cambio del vector de posición relativa

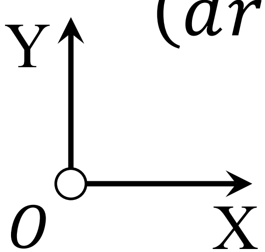
En la fase 3, $\vec{r}'$ gira solidariamente con el sistema móvil, comportándose el conjunto como un sólido rígido.



Por tanto, su ritmo de cambio es el momento de la velocidad angular $\vec{\omega}$ del sistema móvil respecto a la posición P del objeto.

La línea de acción de $\vec{\omega}$ (el eje de gir del sistema móvil) pasa por O'. Así

$$(d\vec{r}'/dt)_3 = \vec{M}_P(\vec{\omega}) = \overrightarrow{PO'} \times \vec{\omega}$$



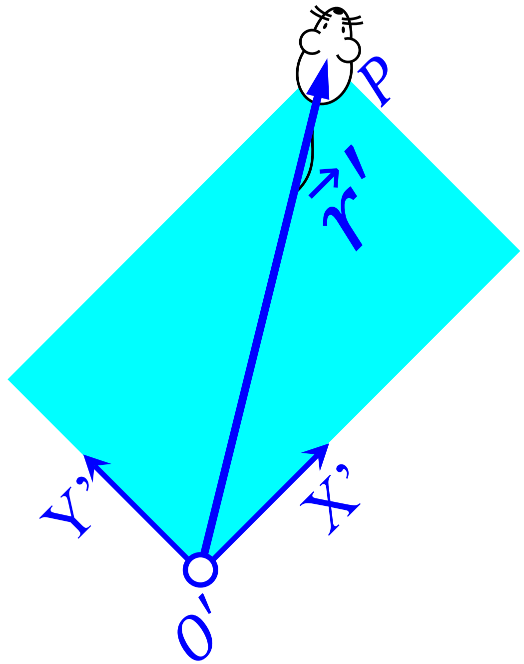
Cambio del vector de posición relativa

Utilizando las propiedades del producto vectorial, resulta

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_3 = \vec{M}_P(\vec{\omega}) = \overrightarrow{PO'} \times \vec{\omega} =$$

$$= -\vec{\omega} \times \overrightarrow{PO'} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'P} =$$

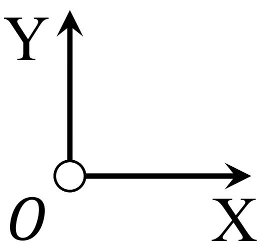
$$= \vec{\omega} \times \vec{r}'$$



Por tanto,

$$d\vec{r}'/dt = (d\vec{r}'/dt)_1 + (d\vec{r}'/dt)_3 =$$

$$= \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$



Relación entre velocidades

Para obtener la relación entre las velocidades real y relativa, vamos a partir de la relación entre vectores de posición,

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{O'}$$

y a utilizar la expresión de la derivada del vector de posición relativa,

$$d\vec{r}'/dt = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

La velocidad real es

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\vec{r}' + \vec{r}_{O'})}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} =$$

$$= \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}_{O'}$$

Relación entre velocidades

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_a \,; \;\; \vec{v}_a = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$$

$\vec{v}$: velocidad, respecto al sistema fijo, del punto observado.

$\vec{v}'$: velocidad relativa (velocidad, respecto al sistema móvil, del punto observado).

$\vec{v}_a$: velocidad de arrastre (velocidad con que el punto es arrastrado por el sistema móvil).

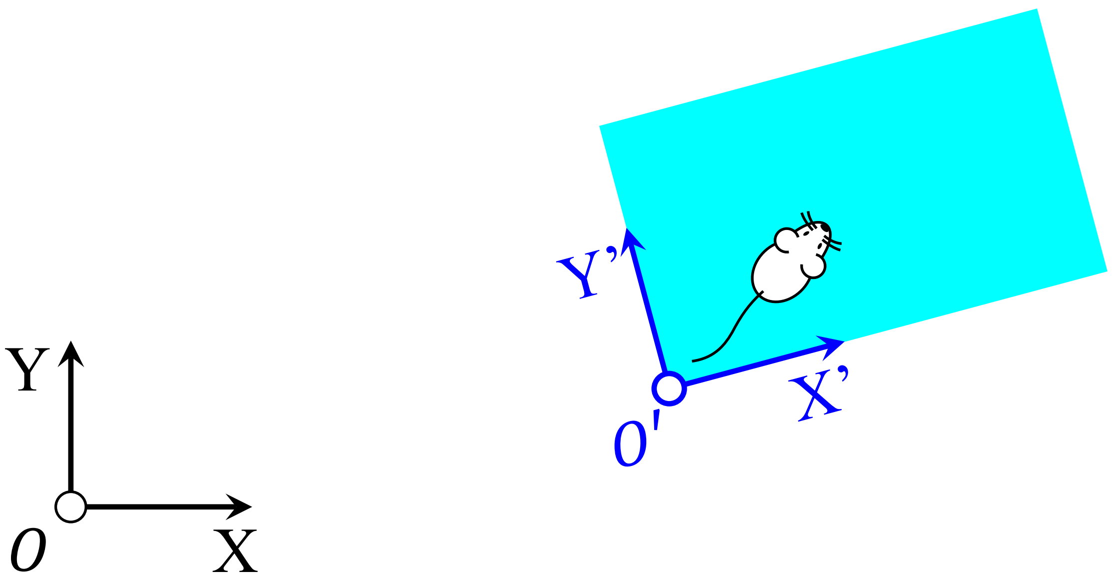
$\vec{v}_{O'}$: velocidad del origen de coordenadas del sistema móvil.

$\vec{\omega}$: velocidad angular del sistema móvil.

$\vec{r}'$: vector de posición, respecto al sistema móvil, del punto observado.

Análisis de la relación entre velocidades

Analicemos lo que ocurre en un instante cualquiera.

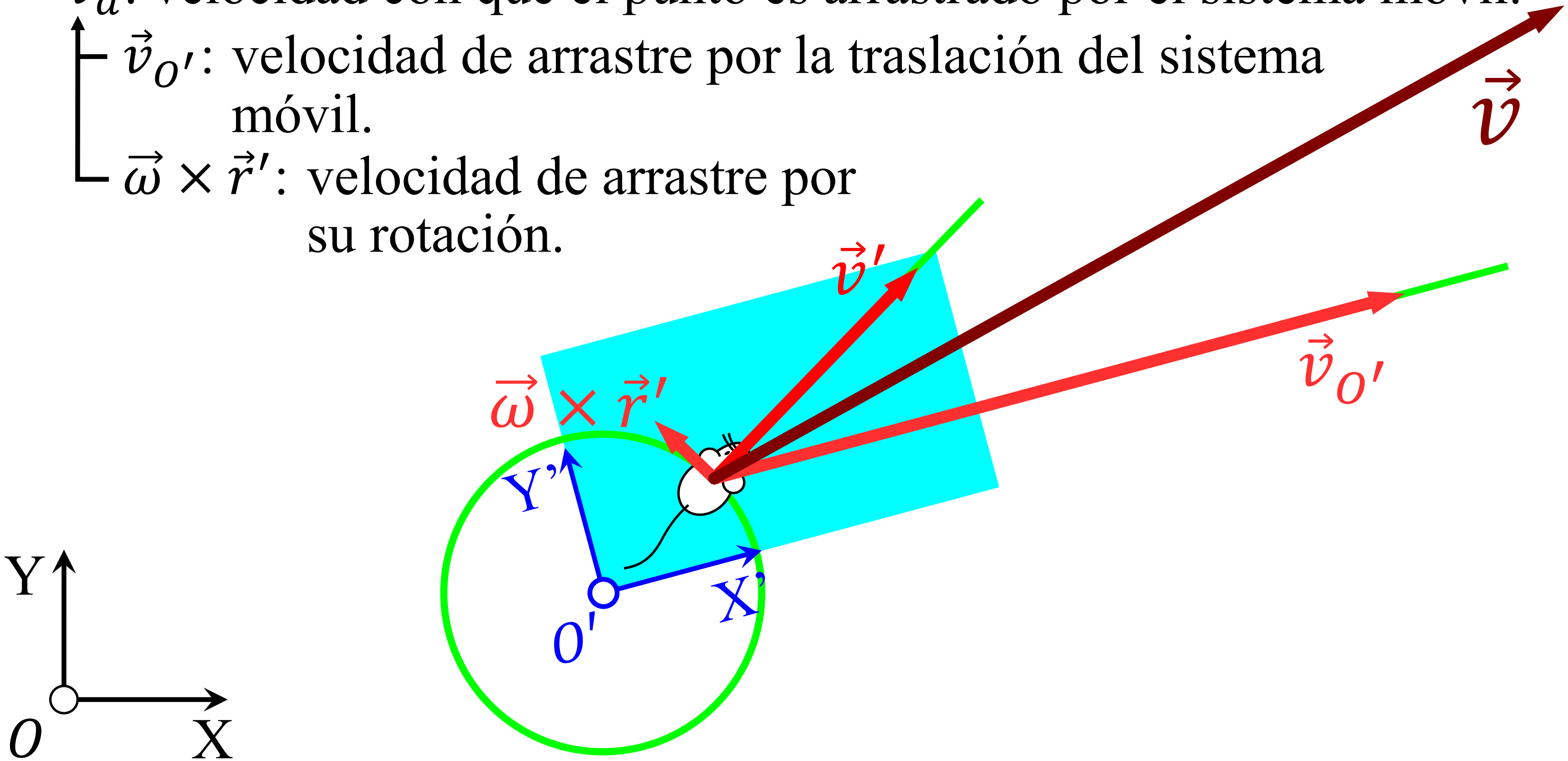


Análisis de la relación entre velocidades

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_a \; ; \; \vec{v}_a = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

$\vec{v}$: velocidad, respecto al sistema fijo, del punto observado.

- $\vec{v}\,'$: velocidad, respecto al sistema móvil, del punto observado.
- $\vec{v}_a$: velocidad con que el punto es arrastrado por el sistema móvil.
  - $\vec{v}_{O'}$: velocidad de arrastre por la traslación del sistema móvil.
  - $\vec{\omega} \times \vec{r}\,'$: velocidad de arrastre por su rotación.



Relación entre aceleraciones

Para obtener la relación entre las aceleraciones real y relativa, vamos a partir de la relación entre velocidades,

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

y a utilizar la expresión de la derivada del vector de posición relativa,

$$d\vec{r}'/dt = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

También se va a necesitar la expresión de la derivada de la velocidad relativa, que se puede obtener de forma análoga a como se operó con la derivada del vector de posición relativa, y que es

$$d\vec{v}'/dt = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Relación entre aceleraciones

La aceleración real es

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}' + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt} =$$

$$= \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt} =$$

$$= \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Relación entre aceleraciones

A partir de aquí,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} =$$

$$= \overbrace{\vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'} + \overbrace{\vec{a}_{O'}} + \overbrace{\vec{\alpha}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \overbrace{(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}')} =$$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' +$$

$$+ \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') =$$

$$= \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Relación entre aceleraciones

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}' + \vec{a}_a + \vec{a}_c \\ \vec{a}_a &= \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ \vec{a}_c &= 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'\end{aligned}}$$

$\vec{a}$: aceleración, respecto al sistema fijo, del punto observado.

$\vec{a}'$: aceleración relativa (aceleración, respecto al sistema móvil, del punto observado).

$\vec{a}_a$: aceleración de arrastre (aceleración con que el punto es arrastrado por el sistema móvil).

$\vec{a}_c$: aceleración complementaria o aceleración de Coriolis.

Relación entre aceleraciones

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_a + \vec{a}_c$$
$$\vec{a}_a = \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$
$$\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$\vec{a}_{O'}$: aceleración del origen de coordenadas del sistema móvil.

$\vec{\omega}$: velocidad angular del sistema móvil.

$\vec{\alpha}$: aceleración angular del sistema móvil.

$\vec{r}'$: vector de posición, respecto al sistema móvil, del punto observado.

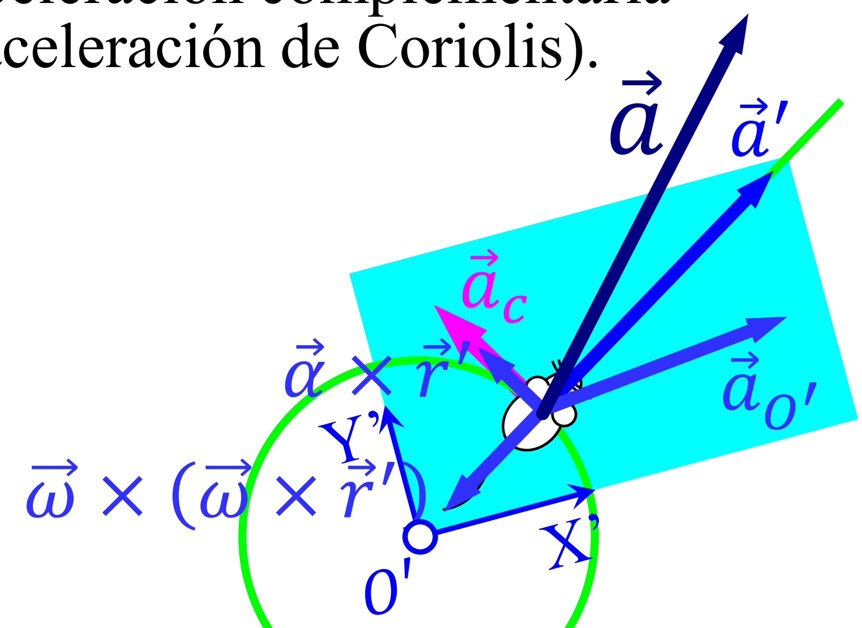
$\vec{v}'$: velocidad relativa (velocidad, respecto al sistema móvil, del punto observado).

Análisis de la relación entre aceleraciones

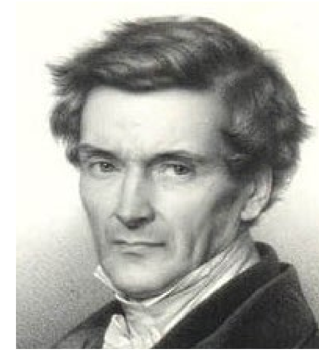
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_a \boxed{+ \vec{a}_c}; \ \vec{a}_a = \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$\vec{a}$: aceleración, respecto al sistema fijo, del punto observado.

- $\vec{a}'$: aceleración, respecto al sistema móvil, del punto observado.
- $\vec{a}_a$: aceleración con que el punto es arrastrado por el sistema móvil.
  - $\vec{a}_{O'}$: aceleración de arrastre por la traslación del sistema móvil.
  - $\vec{\alpha} \times \vec{r}'$: aceleración tangencial de arrastre por su rotación.
  - $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$: aceleración normal de arrastre por su rotación.
- $\vec{a}_c$: aceleración complementaria (aceleración de Coriolis).



Aceleración de Coriolis



Fuente: gravure de Zéphyrin Belliard d'après le tableau de Roller (1812-1866), Public domain, via Wikimedia Commons

¿Qué es la aceleración de Coriolis,
$\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$?

Obviamente, no es aceleración relativa.

Puesto que no la hay si el punto observado no se mueve respecto al sistema móvil (por ser entonces $\vec{v}\,' = \vec{0}$), tampoco es aceleración de arrastre.

Se trata por tanto de una aceleración complementaria.

Para que la aceleración de Coriolis no sea nula:

- el sistema móvil ha de tener rotación ($\vec{\omega} \neq \vec{0}$);
- el objeto ha de tener movimiento relativo ($\vec{v}\,' \neq \vec{0}$);
- ese movimiento relativo no debe ser paralelo al eje de la rotación del sistema móvil ($\vec{v}\,' \nparallel \vec{\omega}$).

Aceleración de Coriolis

Ejemplo. Un disco gira en sentido antihorario con velocidad angular $\vec{\omega}$ constante. Un punto se desplaza sobre un diámetro del disco con velocidad relativa $\vec{v}'$ de módulo constante.

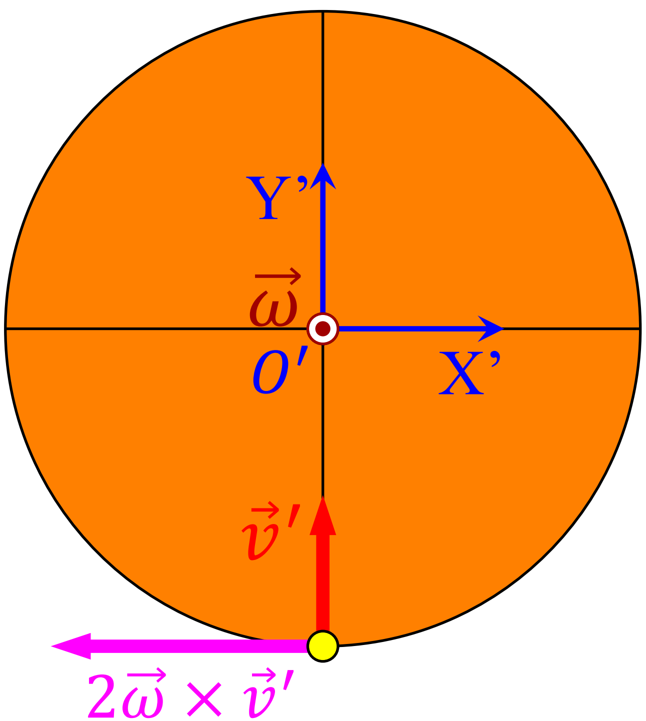
Es: $\vec{a}' = \vec{0}$

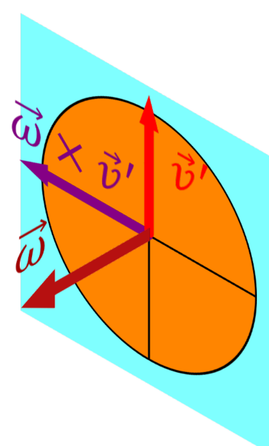
$$\vec{a}_{O'} = \vec{0}$$

$$\vec{\alpha} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_a = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

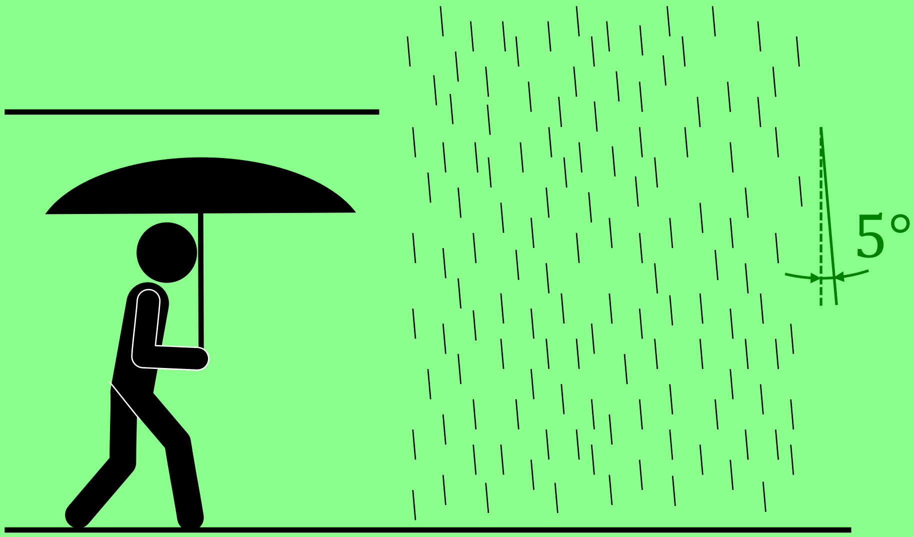
$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

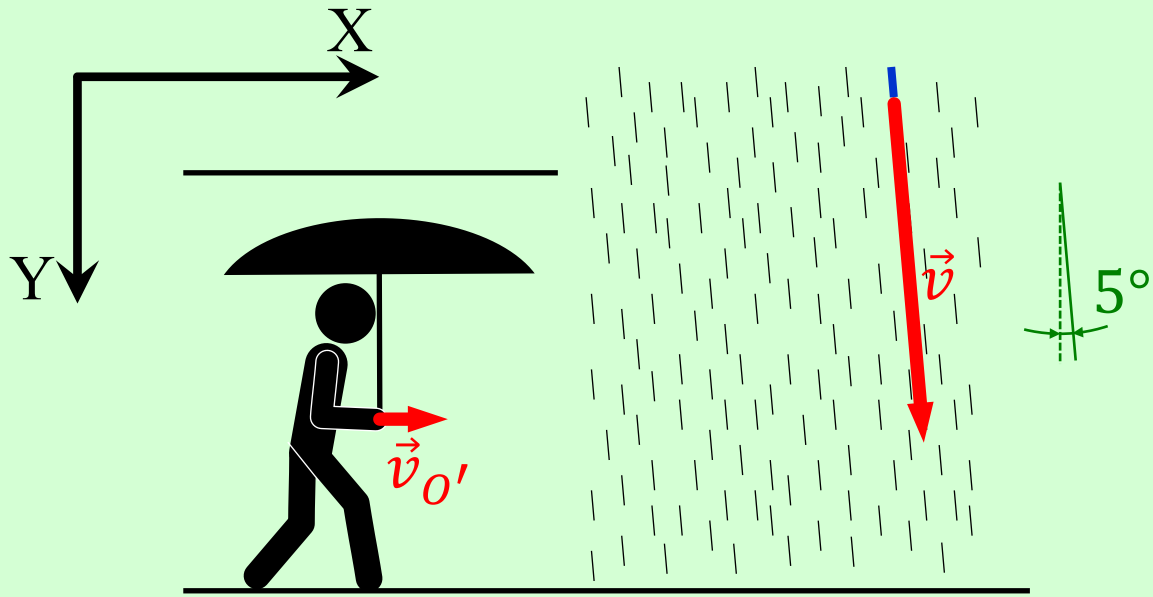




Ejercicio 8

Una persona que camina a $1{,}1\ \mathrm{m/s}$ va a salir de debajo de una marquesina y se prepara para encontrarse bajo una lluvia que cae a $4{,}5\ \mathrm{m/s}$ con la inclinación de 5° que se muestra en la figura. ¿Qué ángulo ha de inclinar el paraguas respecto a la vertical? ¿Cuál es el módulo de la velocidad con la que sentirá que las gotas impactan con el paraguas?





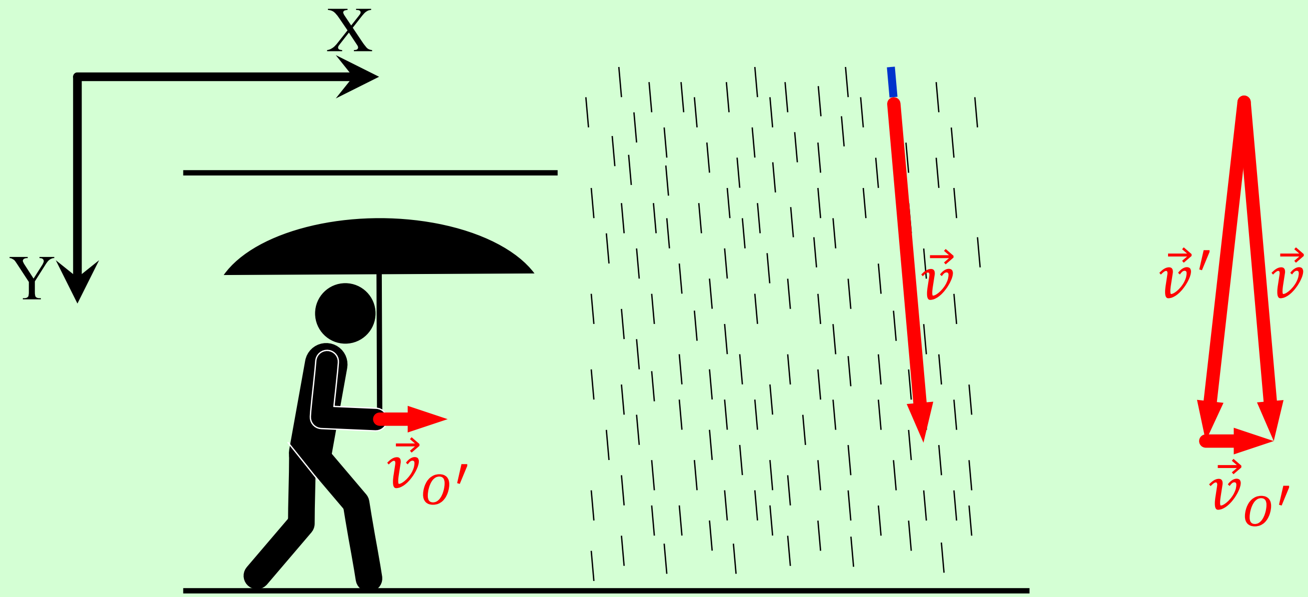
El primer paso es definir un sistema de referencia, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.

En este sistema de referencia, la velocidad de una gota de agua es

$$\vec{v} = (4{,}5 \operatorname{sen} 5°\,; 4{,}5 \cos 5°) = (0{,}3922; 4{,}483)\ \mathrm{m/s}$$

El observador, la persona, gira con $\vec{\omega} = \vec{0}$ rad/s y se desplaza con

$$\vec{v}_{O'} = (1{,}1; 0)\ \mathrm{m/s}$$

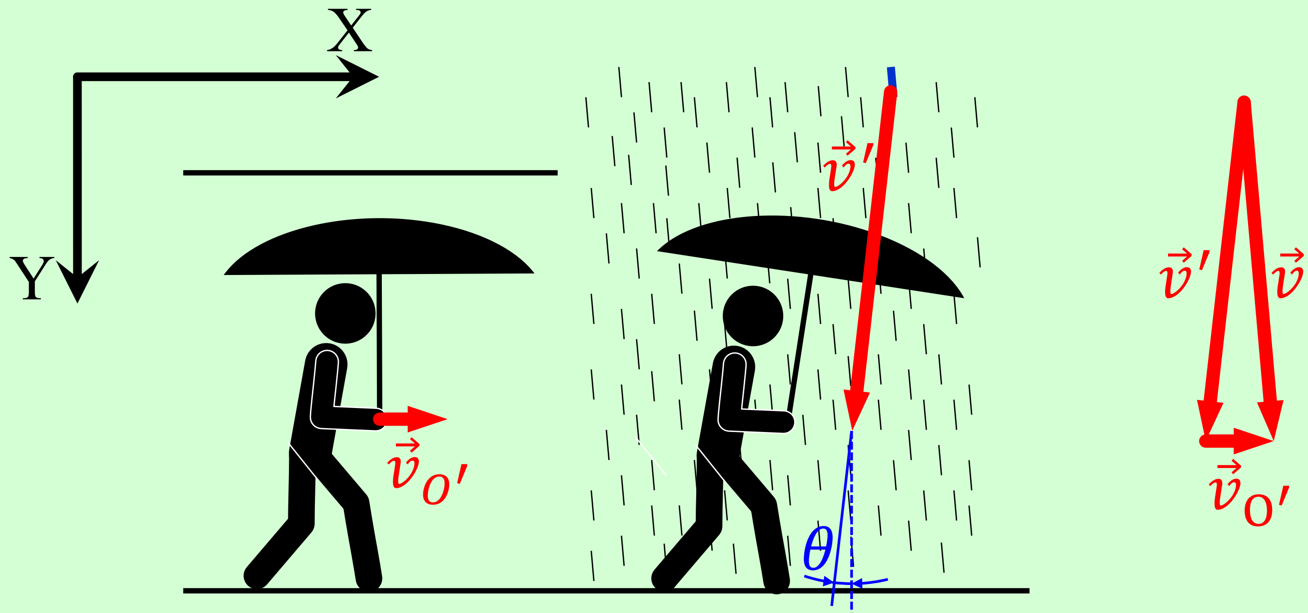


Por tanto,

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_a = \vec{v}' + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}' + \vec{v}_{O'} + \vec{0} \times \vec{r}' = \vec{v}' + \vec{v}_{O'}$$

$$(0{,}3922; 4{,}483) = \vec{v}' + (1{,}1; 0)$$

$$\vec{v}' = (0{,}3922; 4{,}483) - (1{,}1; 0) = (-0{,}7078; 4{,}483)\,\mathrm{m/s}$$



El ángulo θ que la persona ha de inclinar el paraguas respecto a la vertical es

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{0{,}7078}{4{,}483} = 8{,}97° \quad \text{hacia adelante}$$

El módulo de la velocidad con la que sentirá que las gotas impactan con el paraguas es

$$v' = \sqrt{(-0{,}7078)^2 + 4{,}483^2} = 4{,}539\,\mathrm{m/s}$$

Ejemplos de aceleraciones aparentes

Sea un objeto sobre el que la fuerza neta actuante es nula, y que inicialmente está inmóvil junto con el vehículo en el que se encuentra. ¿Qué ocurre si el vehículo arranca?

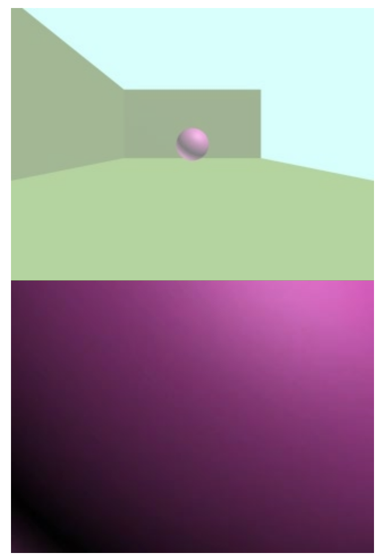
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{0} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \vec{0} \times \vec{r}' + \vec{0} \times \left(\vec{0} \times \vec{r}'\right) + 2\,\vec{0} \times \vec{v}'$$

$\vec{a}' = -\vec{a}_{O'}$ Se percibe una aceleración hacia atrás.

Observador externo

Observador en el vehículo



Fuente: Giménez, M.H., Riera, J., Vidaurre, A., y Carratalá, J.V. (2001). *Experiencias virtuales 3D de fundamentos físicos*. ISBN 84-9705-084-3.Editorial UPV.

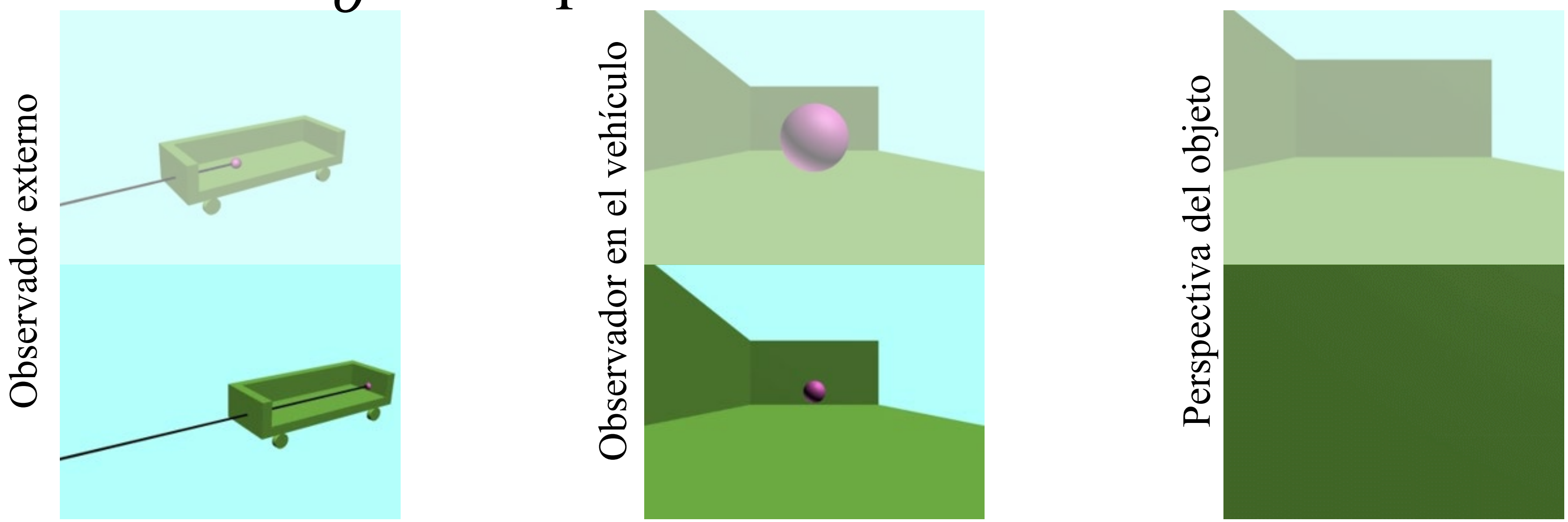
Ejemplos de aceleraciones aparentes

Sea un objeto sobre el que la fuerza neta actuante es nula, y que inicialmente se mueve junto con el vehículo en el que se encuentra. ¿Qué ocurre si el vehículo frena?

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{0} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \vec{0} \times \vec{r}' + \vec{0} \times \left(\vec{0} \times \vec{r}'\right) + 2\,\vec{0} \times \vec{v}'$$

$\vec{a}' = -\vec{a}_{O'}$ Se percibe una aceleración hacia adelante.



Fuente: Giménez, M.H., Riera, J., Vidaurre, A., y Carratalá, J.V. (2001). *Experiencias virtuales 3D de fundamentos físicos*. ISBN 84-9705-084-3. Editorial UPV.

Ejemplos de aceleraciones aparentes

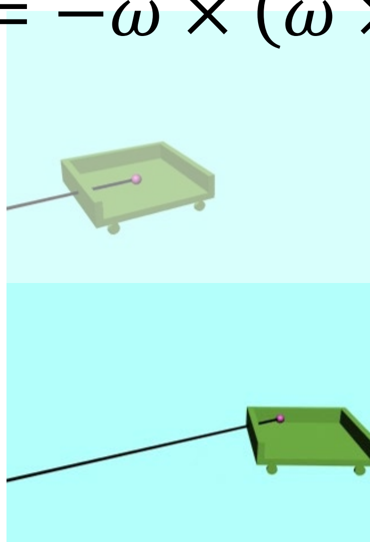
Sea un objeto sobre el que la fuerza neta actuante es nula, y que inicialmente se mueve junto con el vehículo en el que se encuentra. ¿Qué ocurre si el vehículo gira sin cambiar el módulo de su velocidad?

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

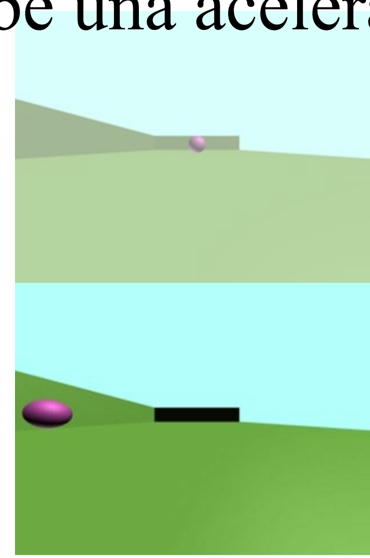
$$\vec{0} = \vec{a}' + \vec{0} + \vec{0} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{0}$$

$\vec{a}' = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ Se percibe una aceleración hacia fuera.

Observador externo



Observador en el vehículo



Fuente: Giménez, M.H., Riera, J., Vidaurre, A., y Carratalá, J.V. (2001). *Experiencias virtuales 3D de fundamentos físicos*. ISBN 84-9705-084-3. Editorial UPV.

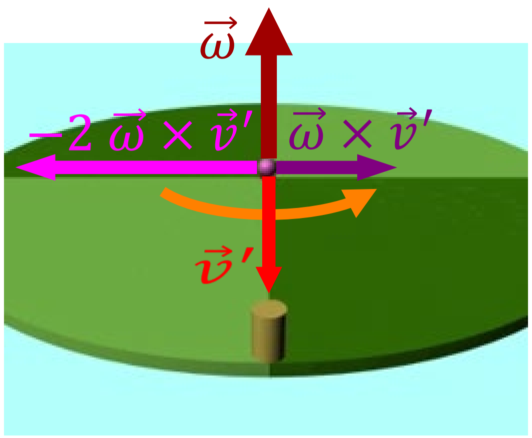
Ejemplos de aceleraciones aparentes

Sea un objeto sobre el que la fuerza neta actuante es nula, y que se encuentra en el centro de una plataforma giratoria. ¿Qué ocurre si se lanza el objeto hacia el borde?

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{0} = \vec{a}' + \vec{0} + \vec{0} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{a}' = \left(-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')\right) + (-2\,\vec{\omega} \times \vec{v}') \quad \text{Efecto Coriolis}$$



Fuente, imagen de fondo: Giménez, M.H., Riera, J., Vidaurre, A. y Carratalá, J.V. (2001). *Experiencias virtuales 3D de fundamentos físicos*. ISBN 84-9705-084-3. Editorial UPV.0

El objeto se va a mover en línea recta mientras la plataforma gira en sentido antihorario.

Respecto al sistema móvil, por efecto del término $-2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$, el objeto se desviará hacia la derecha de su trayectoria.

Ejemplos de aceleraciones aparentes

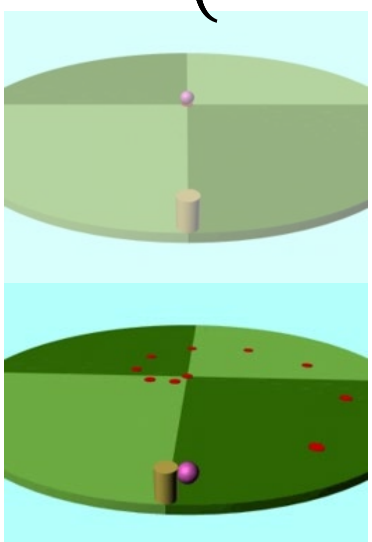
Sea un objeto sobre el que la fuerza neta actuante es nula, y que se encuentra en el centro de una plataforma giratoria. ¿Qué ocurre si se lanza el objeto hacia el borde?

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

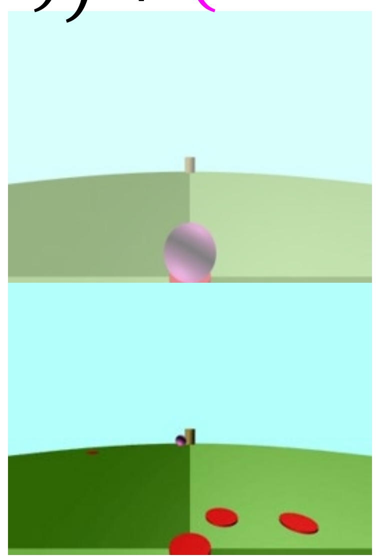
$$\vec{0} = \vec{a}' + \vec{0} + \vec{0} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{a}' = \left(-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')\right) + (-2\,\vec{\omega} \times \vec{v}')$$ Efecto Coriolis

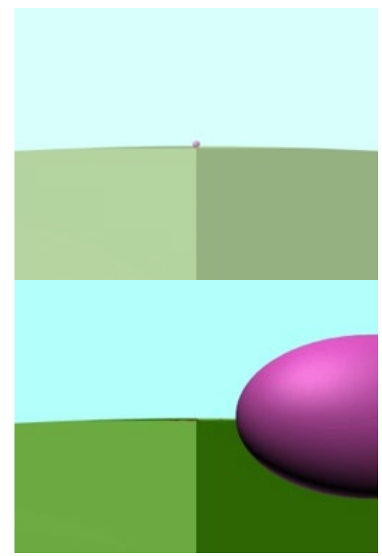
Observador externo



Perspectiva del lanzador



Perspectiva del poste



Fuente: Giménez, M.H., Riera, J., Vidaurre, A., y Carratalá, J.V. (2001). *Experiencias virtuales 3D de fundamentos físicos*. ISBN 84-9705-084-3. Editorial UPV.

Ejemplos de aceleraciones aparentes

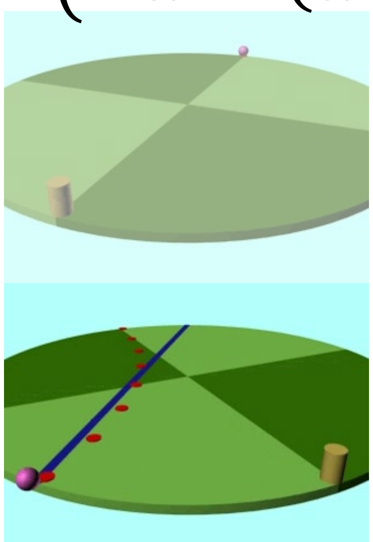
Sea un objeto sobre el que la fuerza neta actuante es nula, y que se encuentra en el borde de una plataforma giratoria. ¿Qué ocurre si se lanza el objeto hacia el centro?

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

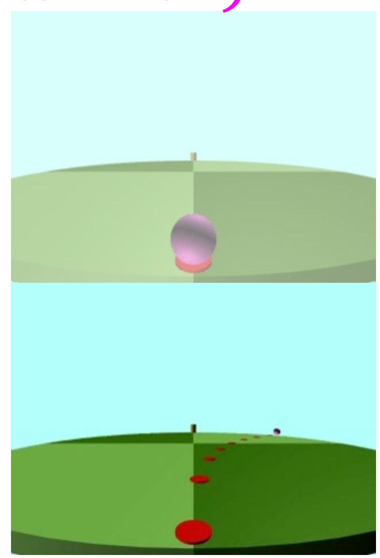
$$\vec{0} = \vec{a}' + \vec{0} + \vec{0} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{a}' = \big(-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')\big) + (-2\,\vec{\omega} \times \vec{v}')$$ Efecto Coriolis

Observador externo



Perspectiva del lanzador



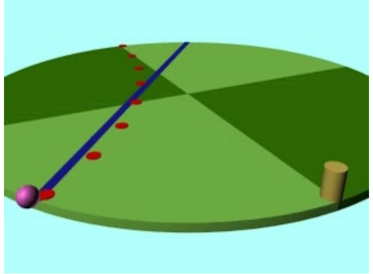
Fuente: Giménez, M.H., Riera, J., Vidaurre, A., y Carratalá, J.V. (2001). *Experiencias virtuales 3D de fundamentos físicos*. ISBN 84-9705-084-3. Editorial UPV.

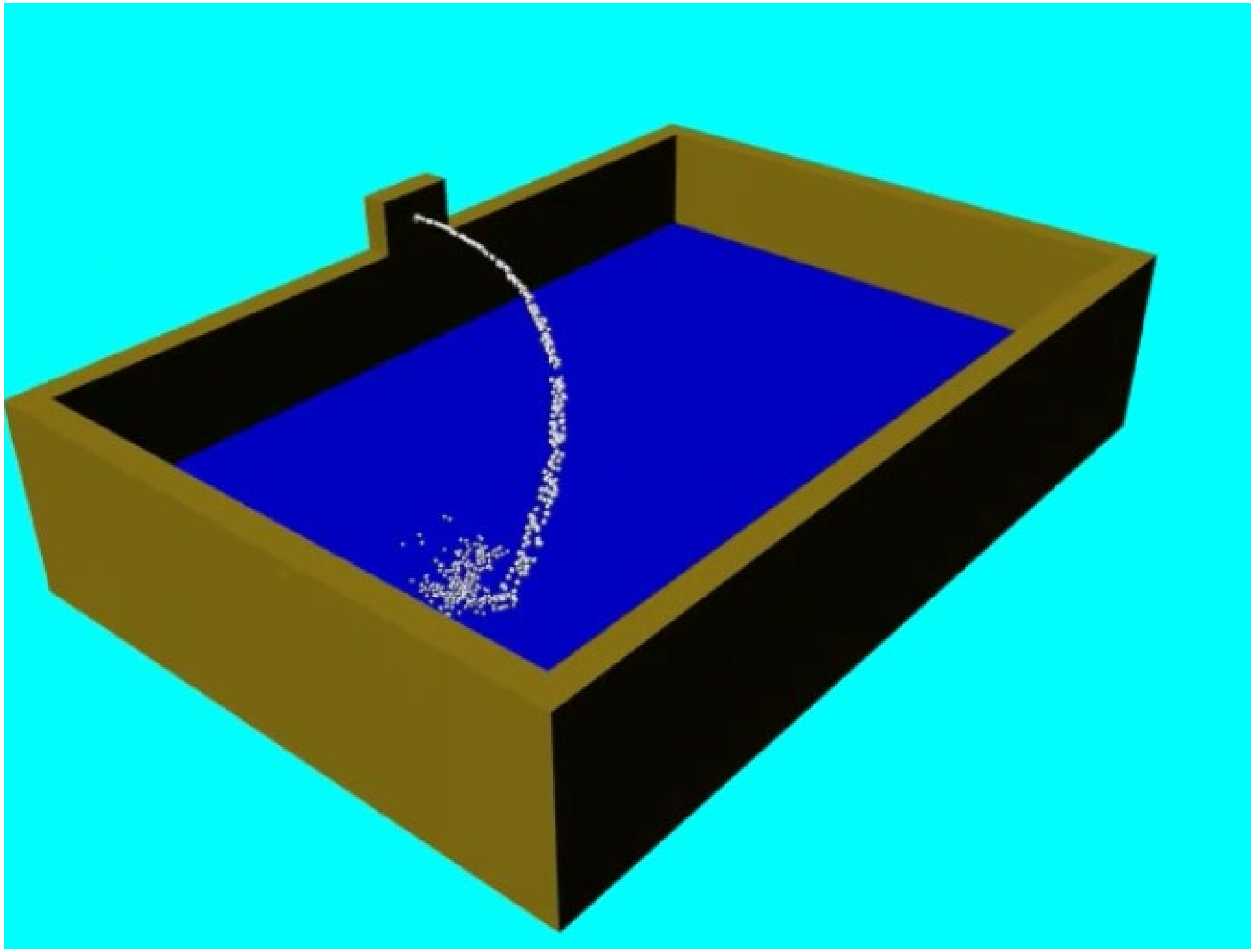
Efecto Coriolis

Puesto que su contribución a la aceleración relativa es $-2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$, el efecto Coriolis desvía la trayectoria aparente (por ser perpendicular a $\vec{v}'$) sobre un plano perpendicular al eje de rotación (por ser perpendicular a $\vec{\omega}$).

Efecto Coriolis

En el caso del chorro aquí mostrado, cada gota de agua se mueve de forma análoga a la del objeto del ejemplo anterior.

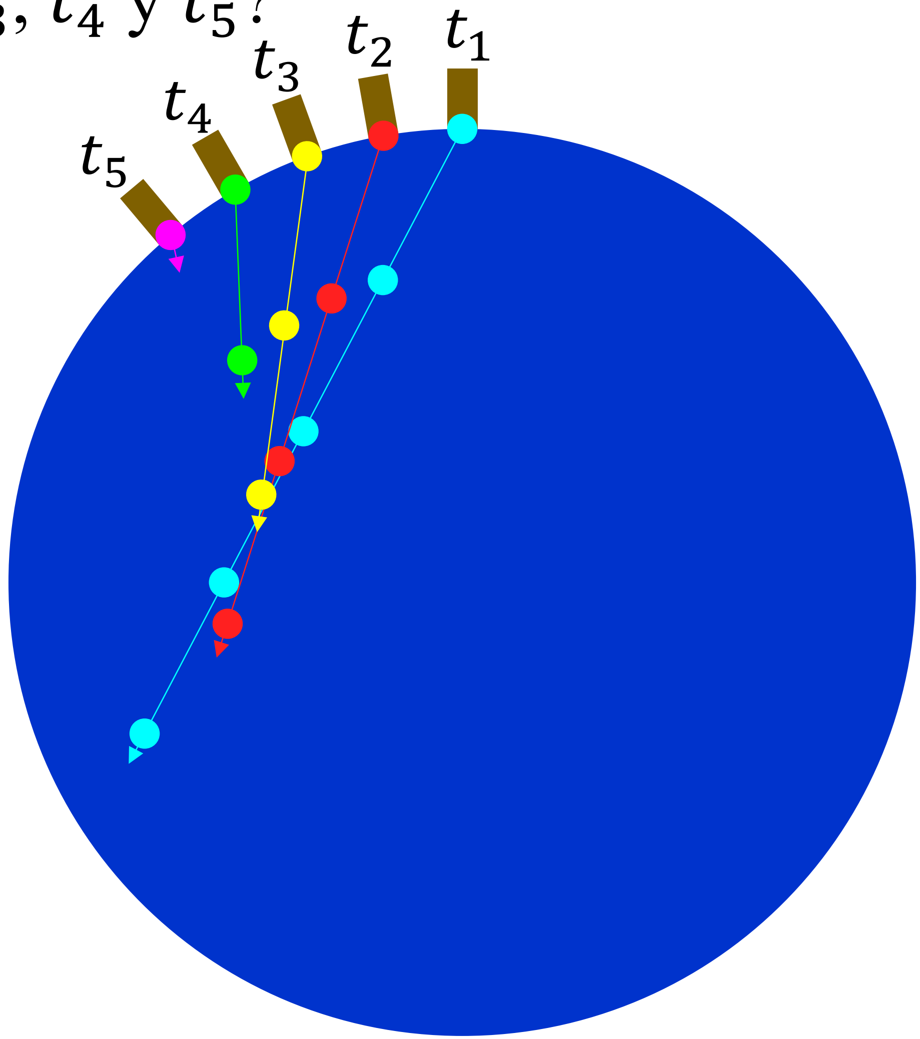




Fuente: Giménez, M.H., Riera, J., Vidaurre, A., y Carratalá, J.V. (2001). *Experiencias virtuales 3D de fundamentos físicos*. ISBN 84-9705-084-3. Editorial UPV.

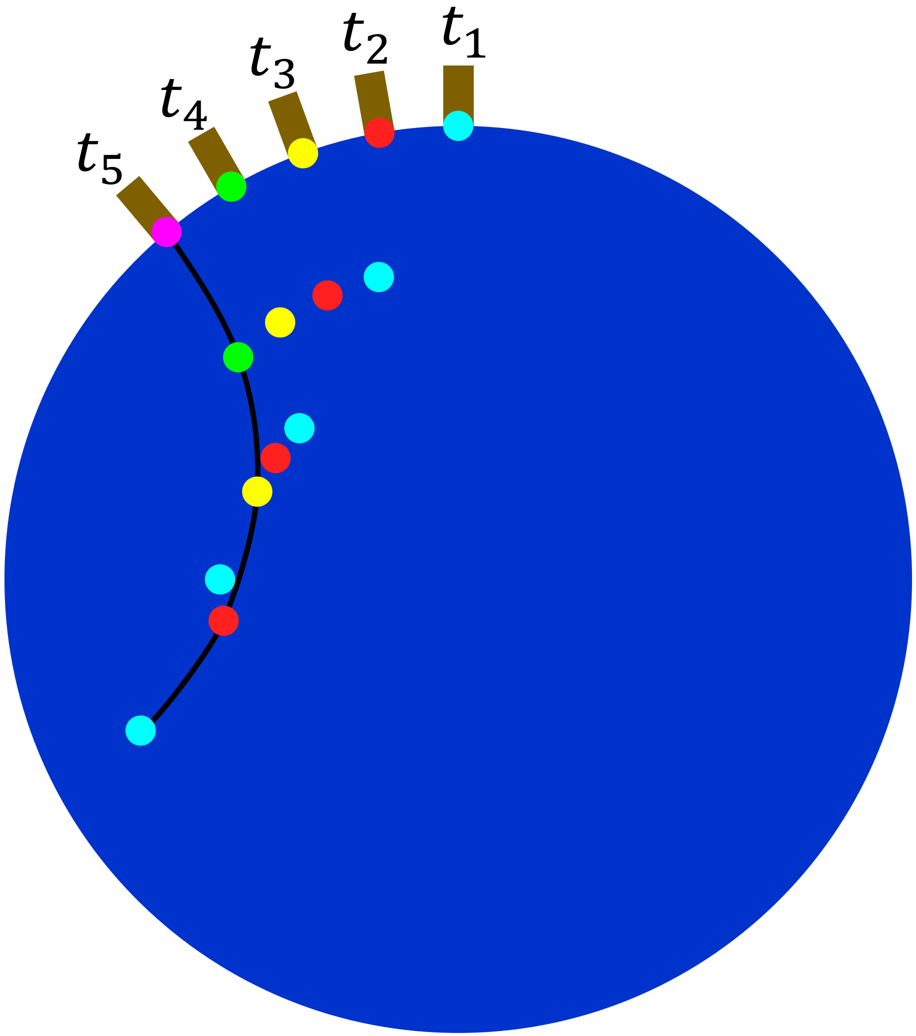
Efecto Coriolis

¿Qué trayectoria siguen las gotas emitidas en diferentes instantes t_1, t_2, t_3, t_4 y t_5?



Efecto Coriolis

¿Qué forma tiene el chorro en cada uno de esos instantes?



Efecto Coriolis en la Tierra

Sea un objeto que se desplaza hacia el norte sobre la superficie terrestre, con velocidad relativa de módulo constante. Admitiremos que $\vec{a}_{O'} \cong \vec{0}$ y $\vec{\alpha} \cong \vec{0}$.

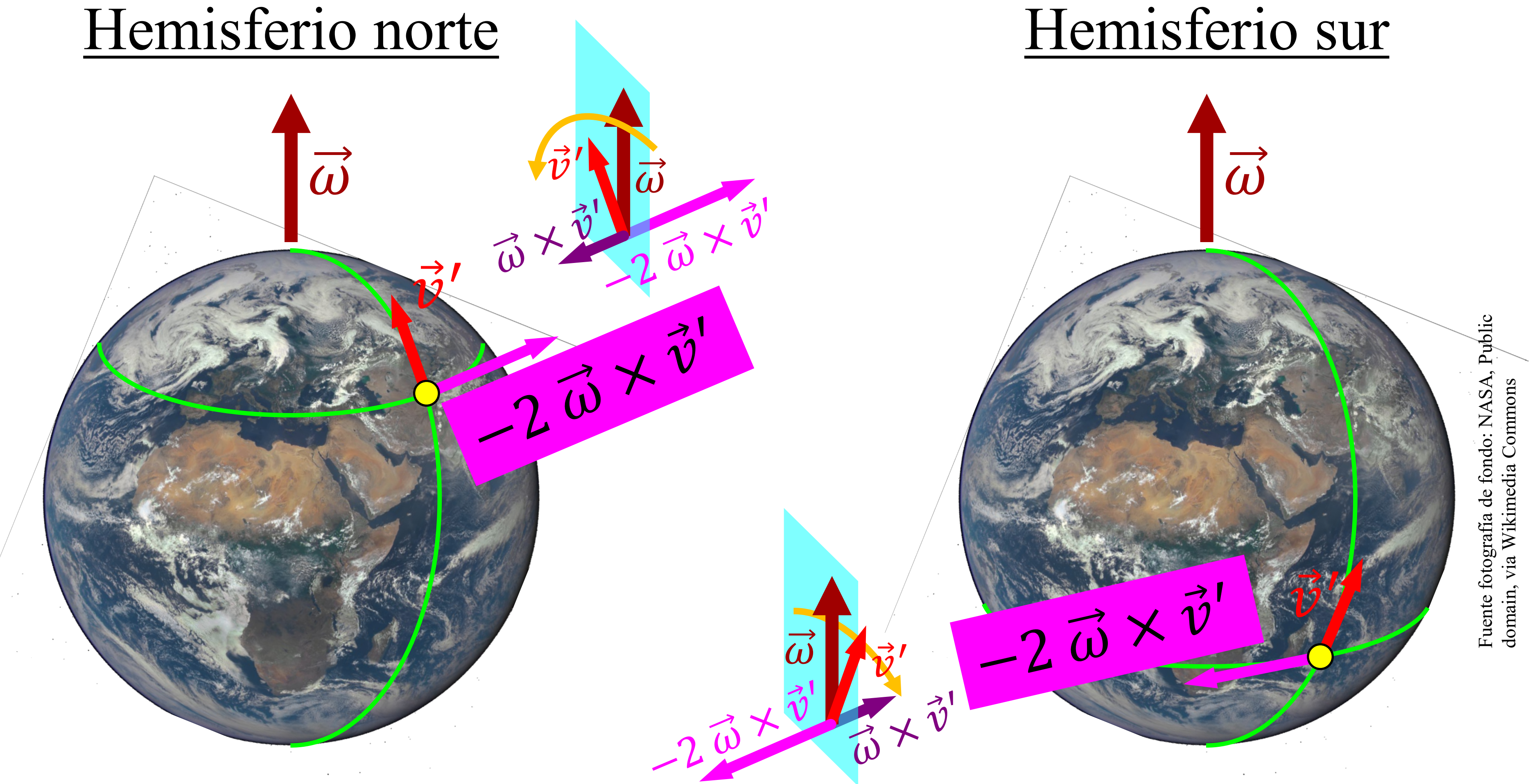
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}' =$$

$$= \vec{a}' + \vec{0} + \vec{0} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{a}' = \vec{a} + \big(-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')\big) + (-2\,\vec{\omega} \times \vec{v}')$$

¿Cuál es la contribución del término $(-2\,\vec{\omega} \times \vec{v}')$ a la aceleración relativa?

Efecto Coriolis en la Tierra



De igual formase puede comprobar que, sea cual sea la orientación de la velocidad sobre la superficie, las trayectorias aparentes se desvían hacia la derecha en el hemisferio norte, y hacia la izquierda en el sur.

Sistemas inerciales

Se denomina sistema inercial al que está dotado de movimiento de traslación uniforme.

$$\vec{a} = \vec{a}' + \underset{\vec{0}}{\vec{a}_{O'}} + \underset{\vec{0}}{\vec{\alpha}} \times \vec{r}' + \underset{\vec{0}}{\vec{\omega}} \times (\underset{\vec{0}}{\vec{\omega}} \times \vec{r}') + 2\,\underset{\vec{0}}{\vec{\omega}} \times \vec{v}'$$

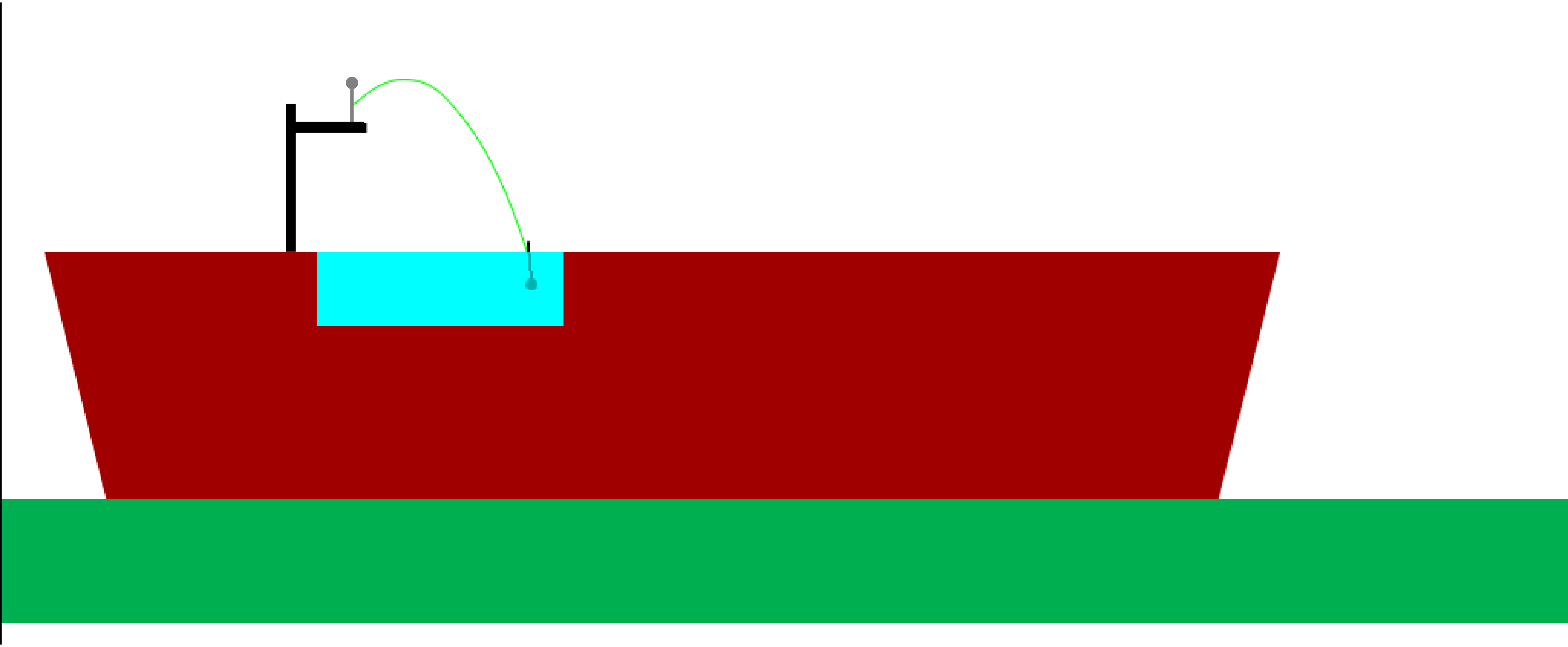
Traslación
uniforme

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}'}$$

Por tanto, en un sistema inercial, la aceleración percibida por un observador ligado al mismo coincide con la real.

Sistemas inerciales

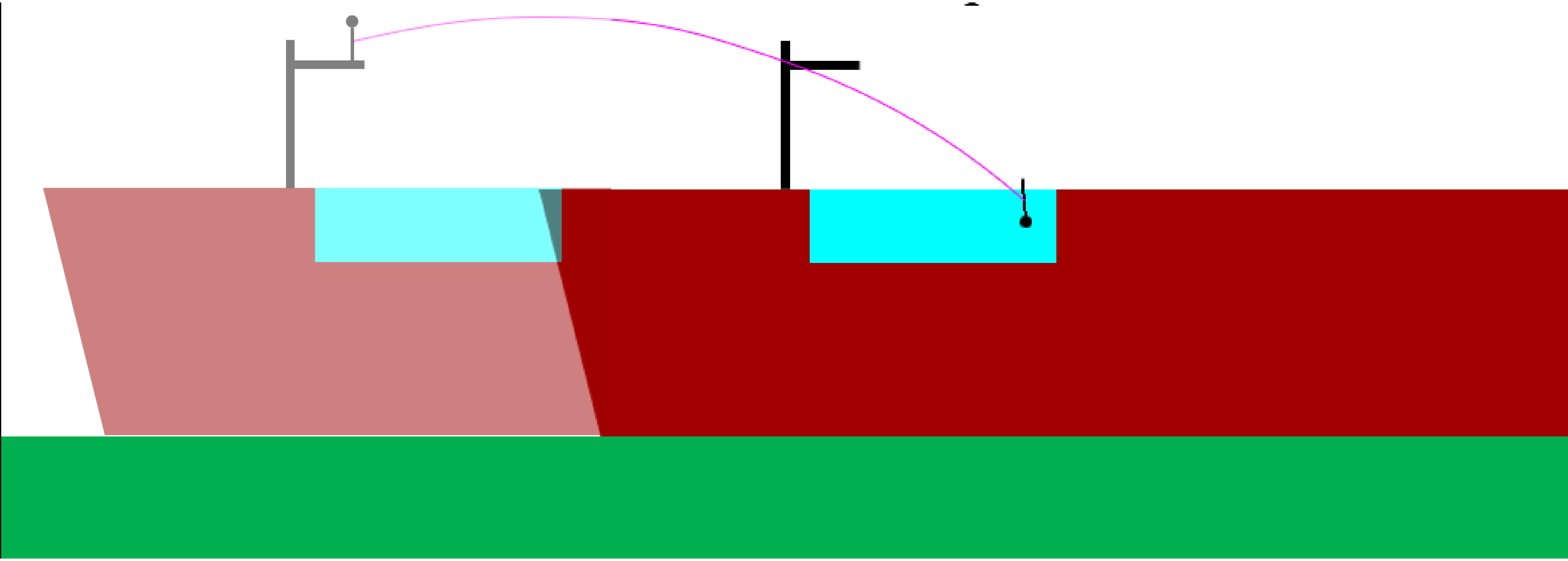
Sea un bañista que se propulsa y salta desde un trampolín a una piscina en un barco inmóvil.



Sistemas inerciales

Sea un bañista que hace lo mismo en un barco que navega con velocidad constante (sistema inercial, por tanto).

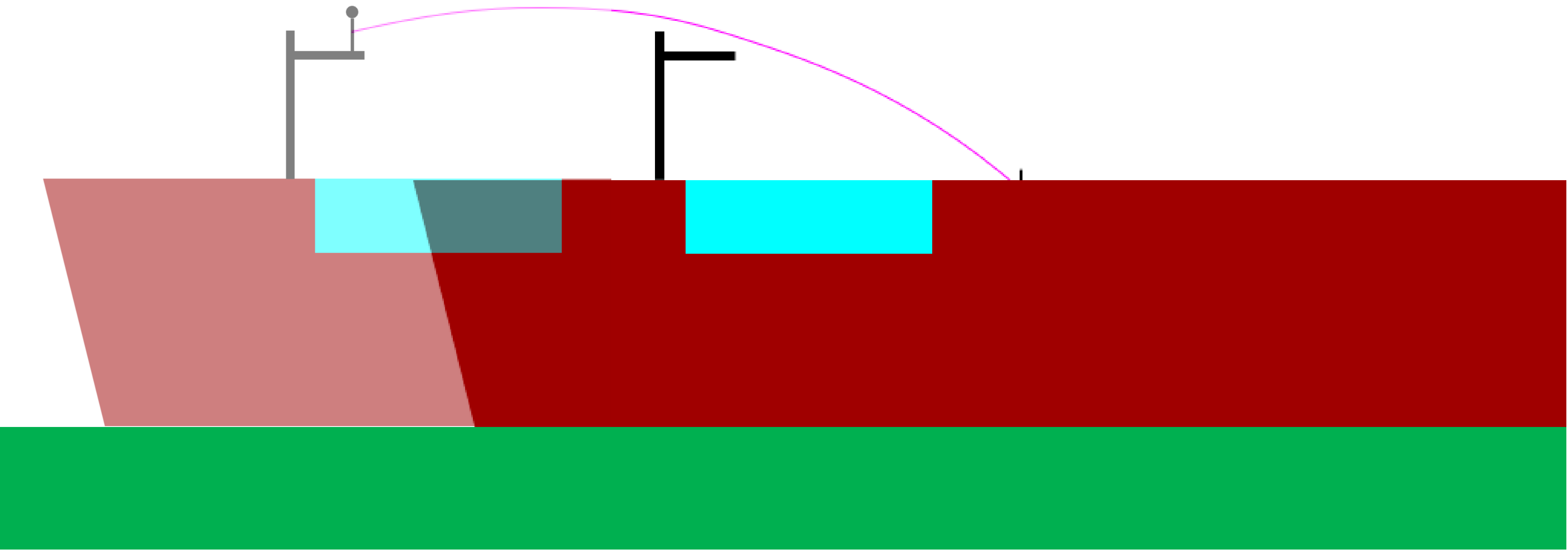
Antes de saltar, el bañista tiene la misma velocidad que el barco. La trayectoria real es más larga, pero desde su punto de vista su movimiento es el mismo que en el caso anterior.



Sistemas no inerciales

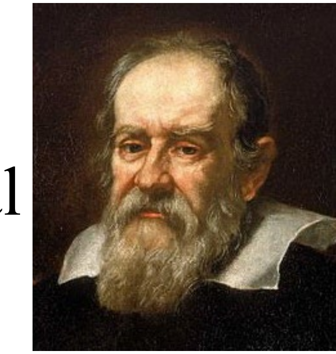
¿Y si el barco frena después de que el bañista salte, de modo que el sistema no es inercial?

La trayectoria real es la misma que en el caso anterior, pero…



Principio de relatividad

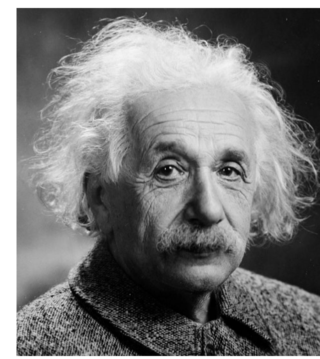
Principio de relatividad de Galileo.



Fuente: Justus Sustermans, Public domain, via Wikimedia Commons

- Mecánicamente es imposible determinar, de dos cuerpos que se mueven uno respecto al otro, cuál de los dos está en reposo y cuál en movimiento de traslación rectilíneo y uniforme.

Einstein.



Fuente: Photograph by Orren Jack Turner, Princeton, N.J. Modified with Photoshop by PM_Poon and later by Dantadd., Public domain, via Wikimedia Commons

- Es imposible determinar, de dos cuerpos que se mueven uno respecto al otro, cuál de los dos está en reposo y cuál en movimiento de traslación rectilíneo y uniforme.

Entonces, ¿cómo distinguirlos? No hay forma.

¿Y qué más da? Si son indistinguibles, ¿en qué afecta?

¿Es la Tierra un sistema inercial?

El movimiento de la Tierra no es de traslación uniforme: gira sobre sí misma; gira alrededor del Sol; y ni siquiera es constante el módulo de su velocidad, ya que es mayor en el perihelio de su órbita (posición más cercana al Sol) y menor en el afelio (posición más lejana).

En resumen: no es un sistema inercial.

Esto hace que sea $\vec{a} \neq \vec{a}'$. No obstante, ¿cuál es la magnitud de la diferencia?

¿Es la Tierra un sistema inercial?

Comencemos con varios datos relevantes para el análisis.

- Radio de la Tierra en el Ecuador: $R_{ec} = 6{,}378 \times 10^6$ m
- Radio medio de la órbita terrestre: $r_o = 1{,}496 \times 10^{11}$ m
- Media del módulo de la velocidad orbital: $v_o = 2{,}978 \times 10^4$ m/s
- Módulo de la velocidad en el perihelio: $v_p = 3{,}075 \times 10^4$ m/s
- Módulo de la velocidad en el afelio: $v_a = 2{,}876 \times 10^4$ m/s
- Período de la rotación alrededor del Sol: $T_o = 365{,}2425\ \mathrm{d} =$
  $= 3{,}156 \times 10^7\ \mathrm{s}$
- Período de la rotación alrededor de su eje*: $T_e = 0{,}99727\ \mathrm{d} =$
  $= 8{,}616 \times 10^4\ \mathrm{s}$
- Módulo velocidad angular de rotación: $\omega = 2\pi/T_e =$
  $= 7{,}292 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad/s}$

* Un día no es el período de rotación alrededor del eje, sino el tiempo que transcurre desde que el Sol está en su cénit hasta que vuelve a alcanzarlo, que es de 24 h. En un año, la Tierra da una vuelta más sobre su eje que el número de días, por lo que $T_e = [365{,}2425/(365{,}2425 + 1)] \times 24\ \mathrm{h} = 23{,}93447\ \mathrm{h}$ (23 h 56 min 4,1 s).

¿Es la Tierra un sistema inercial?

Ahora obtendremos las aceleraciones debidas al hecho de que la Tierra no es un sistema inercial.

- Módulo de la aceleración tangencial media en el movimiento orbital:

$$a_{t_o} = \frac{v_p - v_a}{T_o/2} = 1{,}261 \times 10^{-4}\,\mathrm{m/s^2}$$

- Módulo de la aceleración normal media en el movimiento orbital:

$$a_{n_o} = \frac{v_o^2}{r_o} = 5{,}928 \times 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$$

- Módulo de la aceleración normal por rotación en el Ecuador, donde es máximo:

$$a_{n_r} = \omega^2 R_{ec} = 0{,}03391\,\mathrm{m/s^2}$$

¿Es la Tierra un sistema inercial?

Ahora obtendremos las aceleraciones debidas al hecho de que la Tierra no es un sistema inercial.

- Módulo de la aceleración de Coriolis en un polo, donde es máximo:

  $a_c = 2\omega v' = 1{,}458 \times 10^{-4} v'$ (SI)

  Por ejemplo, para un avión que se desplace a Mach 1 (unos $340\,\mathrm{m/s}$) resulta

  $a_c = 2\omega v' = 0{,}04957\,\mathrm{m/s^2}$

A la vista de la magnitud de estos valores, se puede considerar la Tierra como un sistema inercial salvo para movimientos a gran escala (corrientes oceánicas, vientos, aviones, …) o que requieran una gran precisión.