# FÍSICA TÉCNICA

## Trabajo y energía

V. 1.00.00


Marcos H. Giménez

Isabel Salinas

Vanesa P. Cuenca

Juan A. Monsoriu

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

ETSI Aeroespacial y Diseño Industrial

# Créditos

Título:
Física Técnica

Subtítulo:
Trabajo y energía

Autores:
Marcos H. Giménez, Isabel Salinas, Vanesa P. Cuenca y  Juan A. Monsoriu

Editorial:
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial y Diseño Industrial



Valencia 2024

ISBN: 978-84-09-58858-9
Versión digital

# Índice

Pulsando sobre el número de página de una diapositiva, se regresa a este índice.

# Índice (2)

# Índice (ejercicios)

## Ejercicio 1

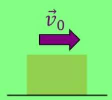
El campo de fuerzas que ejerce la corriente de un río sobre una cierta partícula es $\vec{F} = (2 + y; 0; 0)$ (SI). El fondo del río está situado en $y = 0$ m, y su superficie en $y = 3$ m. La partícula se desplaza del punto $A(0; 3; 0)$ m al $B(4; 3; 0)$ m. Obténgase el trabajo realizado por $\vec{F}$ si dicho desplazamiento tiene lugar: a) en línea recta por la superficie; b) siguiendo la trayectoria parabólica de ecuaciones $y = x^2/4 - x + 3\,; z = 0$ (SI).

## Ejercicio 2

El trabajo realizado por un motor evoluciona de acuerdo a la expresión $W = 80(t - 1 + \mathrm{e}^{-0,2t})$ (SI). ¿Qué potencia desarrolla el motor 1 s después de arrancar? ¿Cuál es la potencia que acaba desarrollando en régimen permanente?

## Ejercicio 3

Un bloque de masa $m = 3$ kg se mueve inicialmente a $v_0 = 4$ m/s sobre una superficie horizontal, que ejerce sobre él una fuerza de rozamiento de módulo 6 N.




a) ¿Cuál será el módulo de su velocidad tras recorrer 2 m?

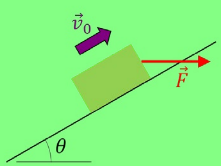
b) ¿Qué distancia recorrerá antes de detenerse?

## Ejercicio 4

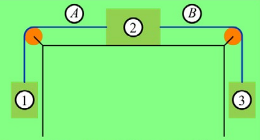
La energía potencial asociada a una cierta fuerza conservativa es $E_p = x^3 z^2 + x\cos(yz)$ (SI). ¿Cuál es la expresión de esa fuerza? ¿Qué trabajo realiza la fuerza actuando sobre una partícula que se mueve en línea recta del punto $A(1; 0; 1)$ m al $B(2; -1; 1)$ m?

## Ejercicio 5

Un bloque de masa $m = 3$ kg asciende inicialmente a $v_0 = 2$ m/s a lo largo de un plano inclinado un ángulo $\theta = 27°$, con el que tiene un coeficiente de rozamiento $\mu = 0,2$. Del bloque tira una fuerza horizontal de módulo $F = 30$ N. ¿Cuál es el módulo de la velocidad del bloque después de recorrer 10 m?



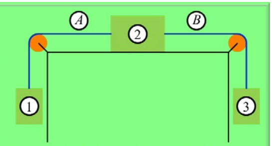

## Ejercicio 6




El sistema de la figura se halla inicialmente en reposo. Las masas de los bloques son $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 20$ kg y $m_3 = 20$ kg. El coeficiente de rozamiento entre el bloque 2 y el suelo es $\mu_2 = 0,2$. Los hilos y poleas son ideales.

Obténgase los módulos de las tensiones en los dos hilos, $A$ y $B$, y la distancia que debe recorrer el bloque 3 para que el módulo de su velocidad sea 1,4 m/s.

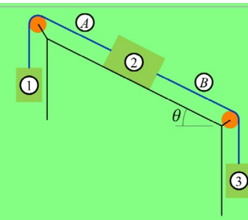
## Ejercicio 7




El sistema de la figura se halla inicialmente en reposo. Las masas de los bloques son $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 20$ kg y $m_3 = 20$ kg. El coeficiente de rozamiento entre el bloque 2 y el suelo es $\mu_2 = 0,8$. Los hilos y poleas son ideales.

Obténgase los módulos de las tensiones en los dos hilos, $A$ y $B$, y la distancia que debe recorrer el bloque 3 para que el módulo de su velocidad sea 1,4 m/s.

## Ejercicio 8

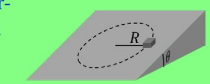



El sistema de la figura se halla inicialmente en reposo. Las masas de los bloques son $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 20$ kg y $m_3 = 20$ kg. El coeficiente de rozamiento entre el bloque 2 y el suelo es $\mu_2 = 0,2$. En el plano inclinado, es $\theta = 26°$. Los hilos y poleas son ideales.

Obténgase los módulos de las tensiones en los dos hilos, $A$ y $B$, y la distancia que debe recorrer el bloque 3 para que el módulo de su velocidad sea 1,4 m/s.

## Ejercicio 9

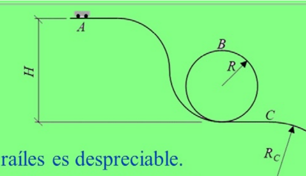
Un bloque de 2 kg está sujeto por una cuerda ideal al centro de un plano inclinado un ángulo $\theta = 30°$ con respecto a la horizontal, y describe una trayectoria circular de radio $R = 1$ m sobre dicho plano.




Calcúlese la energía cinética perdida por el bloque al pasar del punto más bajo al más alto, si el coeficiente de rozamiento es $\mu = 0,25$.

## Ejercicio 10

Una vagoneta de masa $m$, que asumimos puntual, tras partir del reposo sigue el perfil de la montaña rusa de la figura. La fricción entre la vagoneta y los raíles es despreciable.



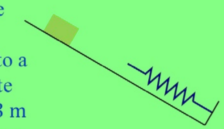

a) Determínese la altura mínima $H$ para que la vagoneta sobrepase el punto $B$, superior del tramo circular de radio $R = 5$ m. Hállese también el módulo de la velocidad de la vagoneta al llegar al punto $B$ en esta situación.

b) Si $H = 15$ m, determínese el módulo de la velocidad de la vagoneta en el punto $B$ y en el punto $C$.

c) Determínese el radio $R_C$ mínimo de la parte curva final para que la vagoneta no pierda contacto con los raíles en el punto $C$, inicio de la curva.

## Ejercicio 11

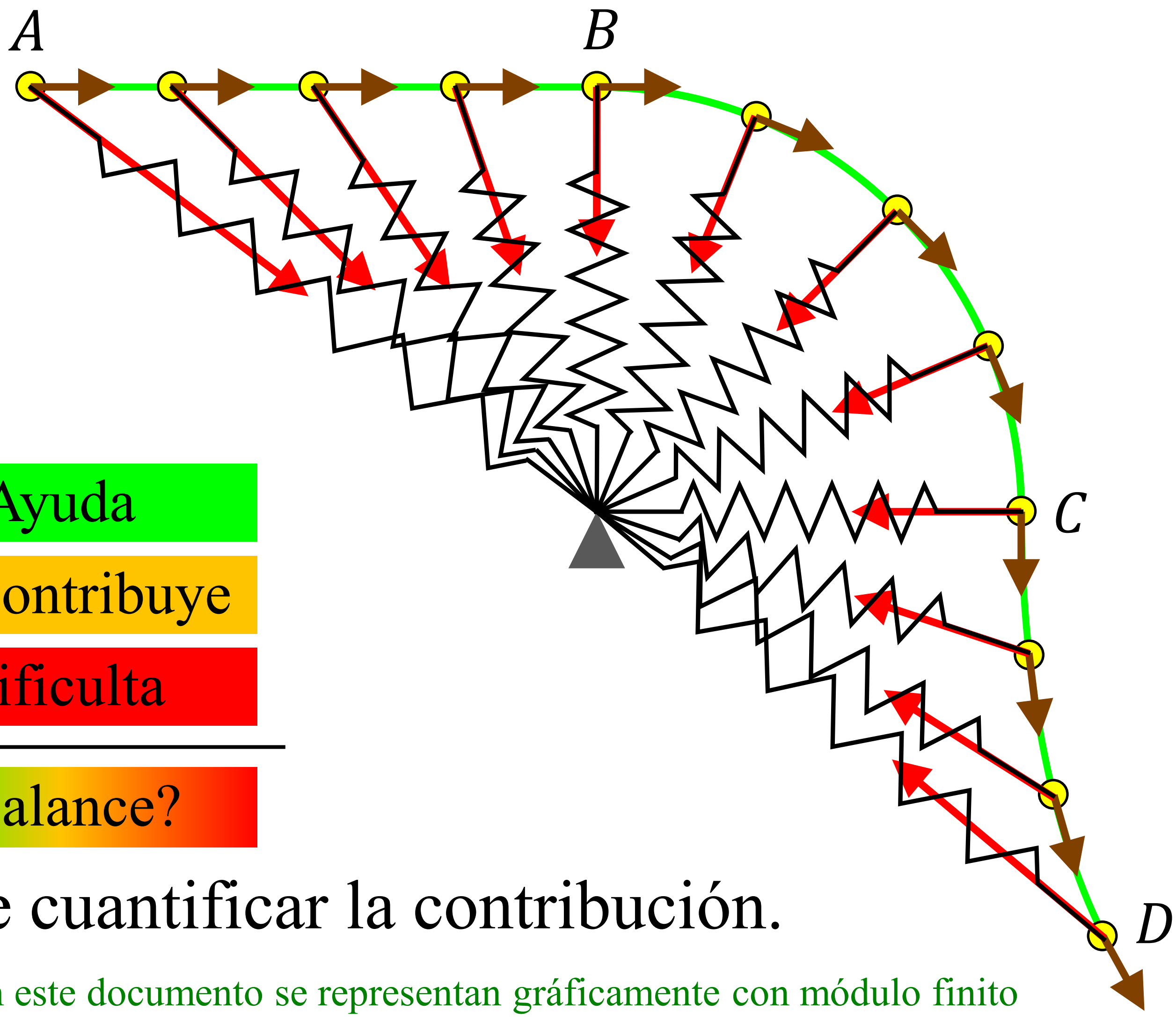
Un bloque de masa $m = 2$ kg, inicialmente en reposo, comienza a descender por un plano inclinado un ángulo $\theta = 30°$ respecto a la horizontal, con el que tiene un coeficiente de rozamiento $\mu = 0,2$. Después recorrer 3 m entra en contacto con un muelle de constante elástica $k = 2000$ N/m. ¿Cuánto llegará a contraerse dicho muelle?



# Contribución de una fuerza al desplazamiento

¿Cómo contribuye una fuerza al desplazamiento de una partícula?

- Partícula
- Muelle
- Trayectoria
- Fuerza
- Diferencial de desplazamiento*




- Tramo $AB$: Ayuda
- Tramo $BC$: No contribuye
- Tramo $CD$: Dificulta

---

- Tramo $AD$: ¿Balance?

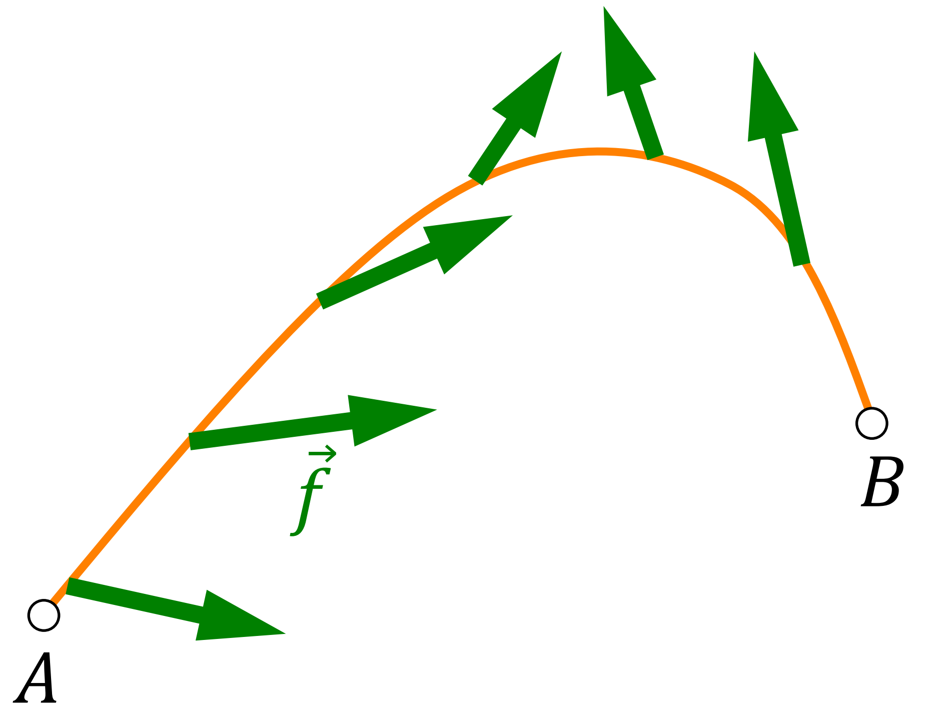
⇨ Necesidad de cuantificar la contribución.

* Aun siendo diferenciales, en este documento se representan gráficamente con módulo finito para visualizar su orientación.

# Definición de integral curvilínea

Se denomina integral curvilínea (también integral de línea o integral de curva), $\Gamma$, de un campo vectorial $\vec{f}$ a lo largo de una curva $AB$, a

$$\boxed{\Gamma = \int_{AB} \vec{f} \cdot d\vec{r}}$$




Por tanto,

$$\dim \Gamma = \dim f \cdot \mathsf{L}$$

Recuérdese que $d\vec{r}$, igual que en la definición de velocidad $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, es el vector diferencial de desplazamiento que corresponde a cada segmento infinitesimal de la curva.

# Unidades de la integral curvilínea

Puesto que $\dim \Gamma = \dim f \cdot \mathsf{L}$, la unidad SI coherente de una integral curvilínea es la del campo multiplicada por metro.

| | Unidad SI campo | Unidad SI integral curv. |
|---|---|---|
| Campo de fuerzas $\vec{F}$ | $\mathrm{N}$ | $\mathrm{J} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$ |
| Campo eléctrico $\vec{E}$ | $\mathrm{N/C}$ | $\mathrm{V} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m/C}$ |
| Densidad de flujo magnético $\vec{B}$ | $\mathrm{T}$ | $\mathrm{T} \cdot \mathrm{m}$ |
| Campo gravitatorio $\vec{g}$ | $\mathrm{m/s^2}$ | $\mathrm{m^2/s^2}$ |
| Campo de velocidades $\vec{v}$ | $\mathrm{m/s}$ | $\mathrm{m^2/s}$ |

# Importancia de la integral curvilínea

¿Por qué este concepto es relevante para nosotros?

- El trabajo es la integral curvilínea de la fuerza.
- La caída de potencial eléctrico es la integral curvilínea del campo eléctrico.
- La integral curvilínea de la densidad de flujo magnético aparece en el teorema de Ampère.

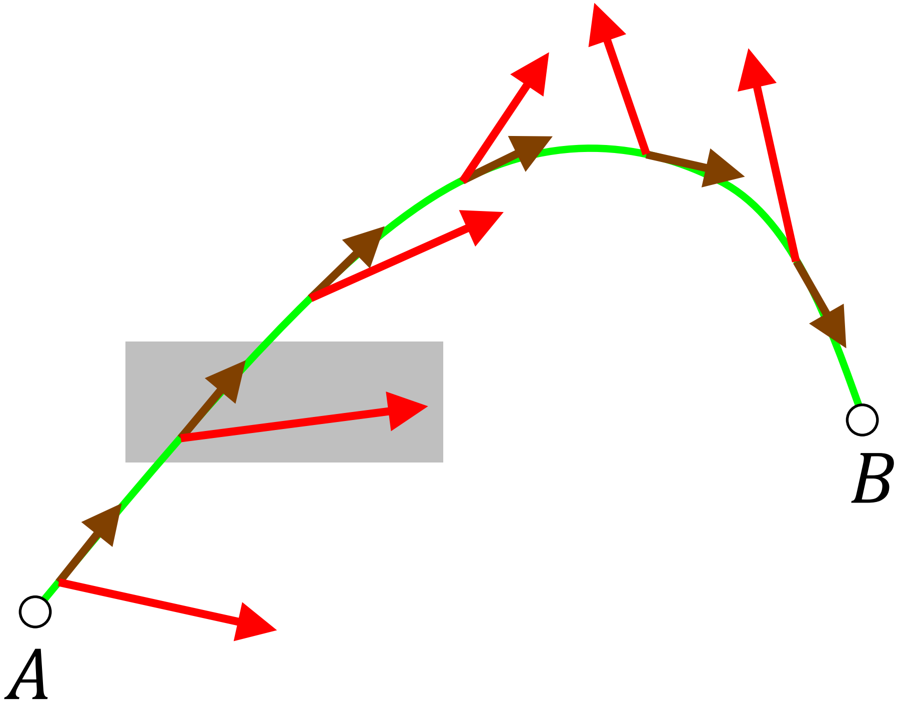
# Trabajo

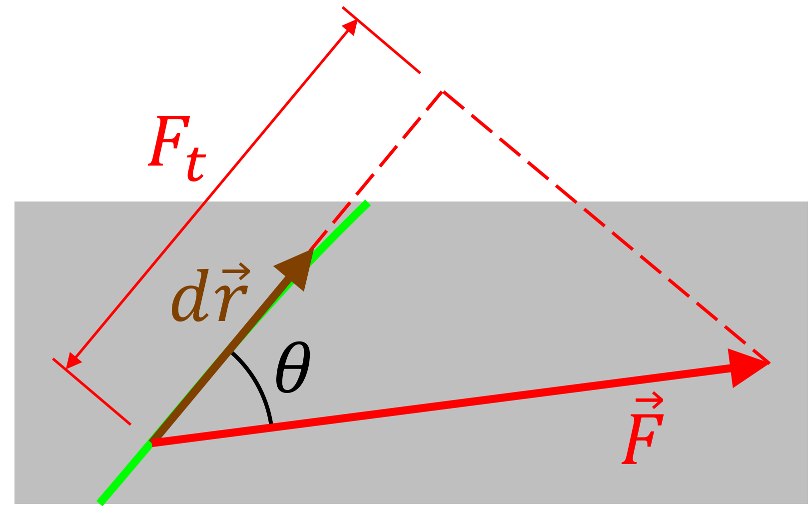
Se denomina trabajo de una fuerza $\vec{F}$ a lo largo de un camino $AB$ entre dos puntos $A$ y $B$, a la correspondiente integral curvilínea.

$$\boxed{W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

¿Y qué es este tipo de integral?

# El trabajo como integral curvilínea



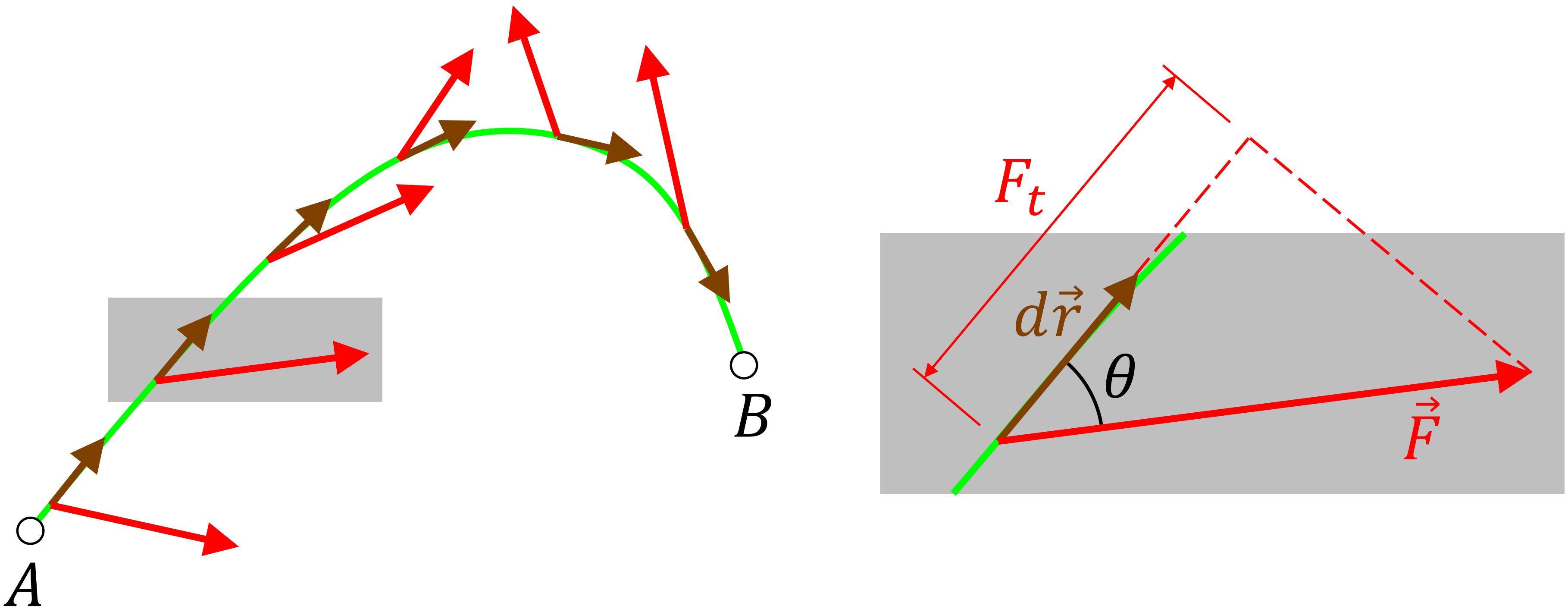

Se descompone la curva en infinitos segmentos diferenciales.

Cada uno de ellos se puede considerar recto y con una fuerza concreta. El trabajo a lo largo de un segmento es

$$dW = F_t dr = (F\cos\theta)dr = F dr\cos\theta = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Por claridad, la figura solo representa algunos de los infinitos diferenciales de desplazamiento, con la correspondiente fuerza.

# El trabajo como integral curvilínea




El trabajo total es la suma de los infinitos trabajos diferenciales,

$$W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Por tanto, el trabajo es la integral curvilínea de la fuerza.

# Cálculo del trabajo

1) Se expresa la curva en forma paramétrica.

2) Se escribe $\vec{F}$ y $d\vec{r}$ en función del parámetro.

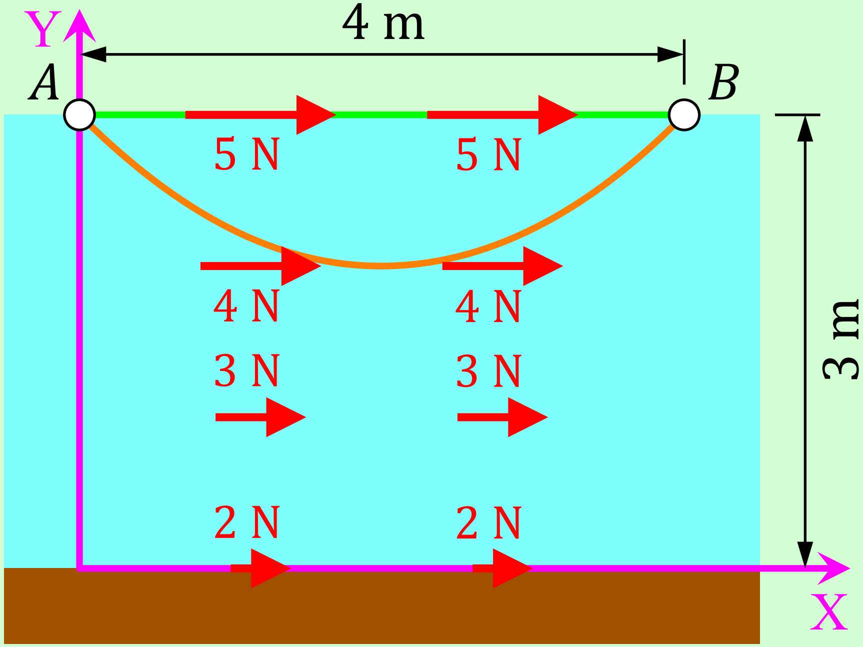
3) Se realiza la integración de su producto escalar.

A continuación se resuelve, como muestra, un ejercicio de aplicación. Se recomienda estudiarlo únicamente si ya se tiene la base matemática para el cálculo de integrales curvilíneas.

Los demás ejercicios del presente tema no requieren estas mecánicas, ya que pueden ser resueltos a partir de los casos particulares que estudiaremos posteriormente.

## Ejercicio 1

El campo de fuerzas que ejerce la corriente de un río sobre una cierta partícula es $\vec{F} = (2 + y; 0; 0)$ (SI). El fondo del río está situado en $y = 0$ m, y su superficie en $y = 3$ m. La partícula se desplaza del punto $A(0; 3; 0)$ m al $B(4; 3; 0)$ m. Obténgase el trabajo realizado por $\vec{F}$ si dicho desplazamiento tiene lugar: a) en línea recta por la superficie; b) siguiendo la trayectoria parabólica de ecuaciones $y = x^2/4 - x + 3\,; z = 0$ (SI).




La figura muestra el patrón del campo $\vec{F} = (2 + y; 0; 0)$ (SI).

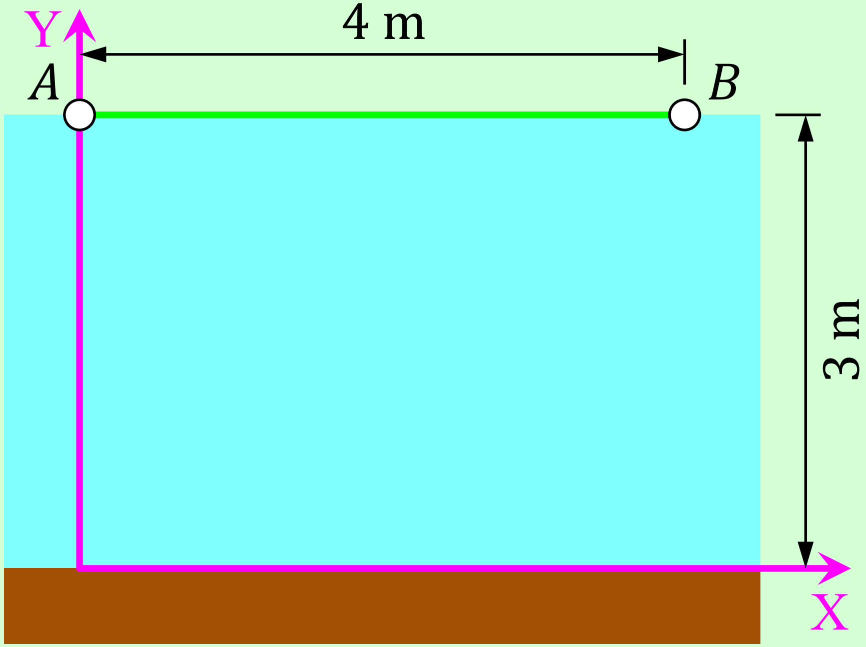
La fuerza es más débil en el fondo, $y = 0$ m, donde

$$\vec{F} = (2 + 0; 0; 0) = (2; 0; 0) \text{ N}$$

y más intensa en la superficie, $y = 3$ m, donde

$$\vec{F} = (2 + 3; 0; 0) = (5; 0; 0) \text{ N}$$

A la vista del patrón, puede intuirse que la contribución de la fuerza al desplazamiento de la partícula entre $A$ y $B$ es mayor si se sigue la trayectoria rectilínea $AB$ que la parabólica $AB$.




a) Se puede expresar la recta $AB$ en forma paramétrica a partir de la posición del punto $A$ y del vector $\overrightarrow{AB}$ (téngase en cuenta que no es la única forma).

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \lambda\overrightarrow{AB} =$$
$$= (0; 3; 0) + \lambda(4; 0; 0) =$$
$$= (4\lambda; 3; 0)\ (\mathrm{SI})$$

Puede comprobarse que los valores del parámetro para los puntos $A$ y $B$ son $\lambda_A = 0$ y $\lambda_B = 1$, respectivamente.

La fuerza, evaluada para los puntos de la recta ($x = 4\lambda\,;\ y = 3$ (SI)), es

$$\vec{F} = (2 + y; 0; 0) = (2 + 3; 0; 0) = (5; 0; 0)\ \mathrm{N}$$

La expresión del diferencial de desplazamiento se obtiene como sigue.

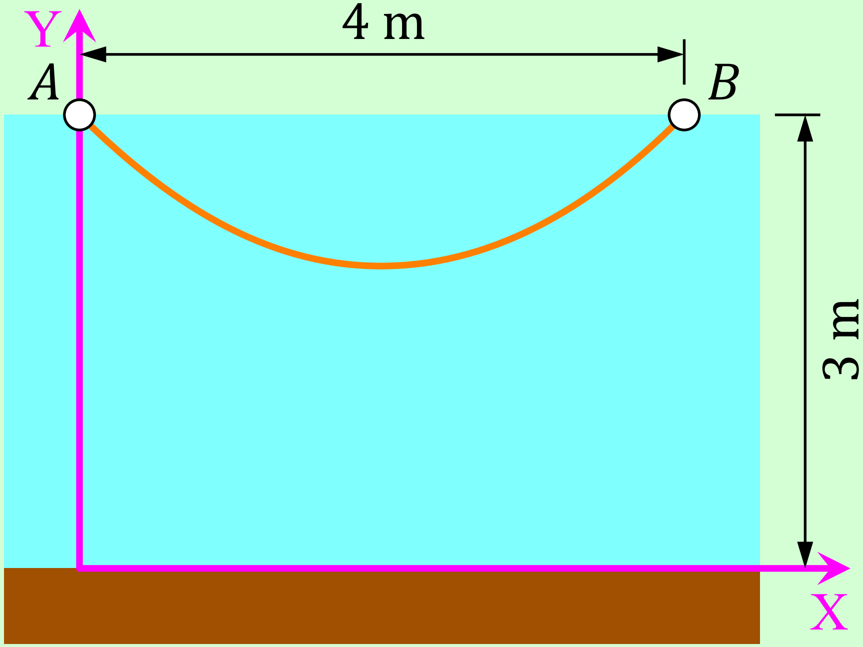
$$d\vec{r}/d\lambda = (4; 0; 0)\ (\mathrm{SI}) \Rightarrow d\vec{r} = (4; 0; 0)d\lambda\ (\mathrm{SI})$$

Por tanto,

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (5; 0; 0) \cdot (4; 0; 0) d\lambda = [20 + 0 + 0] d\lambda = 20 d\lambda \text{ (SI)}$$

$$W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 20 d\lambda = [20\lambda]_0^1 = (20 \times 1) - (20 \times 0) =$$

$$= 20 - 0 = 20 \text{ J}$$




b) Se puede expresar la parábola $AB$, $y = x^2/4 - x + 3\,;z = 0$ (SI), utilizando $x$ como parámetro $\lambda$ (téngase en cuenta que no es la única forma). Así,

$$\vec{r} = (\lambda; \lambda^2/4 - \lambda + 3; 0) \text{ (SI)}$$

Puede comprobarse que los valores del parámetro para los puntos $A$ y $B$ son $\lambda_A = 0$ y $\lambda_B = 4$, respectivamente.

La fuerza, evaluada para los puntos de la parábola ($x = \lambda$; $y = \lambda^2/4 - \lambda + 3$ (SI)), es

$$\vec{F} = (2 + y; 0; 0) = (2 + (\lambda^2/4 - \lambda + 3); 0; 0) =$$
$$= (\lambda^2/4 - \lambda + 5; 0; 0) \text{ (SI)}$$

La expresión del diferencial de desplazamiento se obtiene como sigue.

$$d\vec{r}/d\lambda = (1; \lambda/2 - 1; 0) \text{ (SI)} \Rightarrow d\vec{r} = (1; \lambda/2 - 1; 0)d\lambda \text{ (SI)}$$

Por tanto,

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = (\lambda^2/4 - \lambda + 5; 0; 0)\cdot(1; \lambda/2 - 1; 0)d\lambda =$$

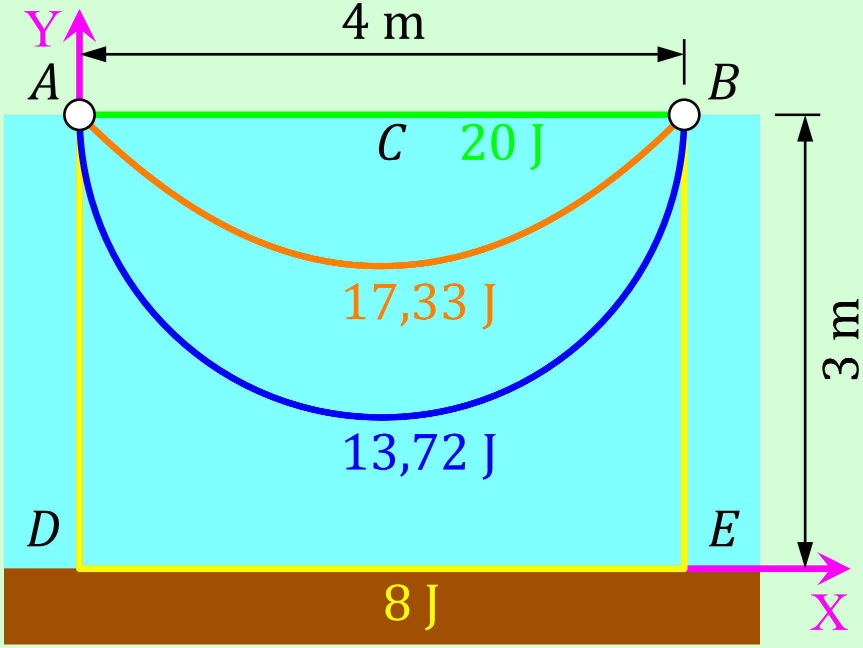
$$= [(\lambda^2/4 - \lambda + 5) + 0 + 0]d\lambda = (\lambda^2/4 - \lambda + 5)d\lambda \ (\mathrm{SI})$$

$$W = \int_{AB} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^4 (\lambda^2/4 - \lambda + 5)d\lambda = [\lambda^3/12 - \lambda^2/2 + 5\lambda]_0^4 =$$

$$= (4^3/12 - 4^2/2 + 5\times 4) - (0^3/12 - 0^2/2 + 5\times 0) =$$

$$= 17{,}33 - 0 = 17{,}33\ \mathrm{J}$$

**Tarea:** Obténgase el trabajo si el desplazamiento tiene lugar siguiendo: c) la trayectoria semicircular de centro $C(2;\ 3;0)$ m y radio 2 m; d) la ruta constituida por los segmentos rectilíneos $AD$, $DE$ y $EB$, donde $D(0;0;0)$ m y $C(4;0;0)$ m.




Se sugiere utilizar las ecuaciones paramétricas que siguen.

$AB$: $\vec{r} = (2 - 2\cos\lambda\,; 3 - 2\,\mathrm{sen}\,\lambda\,; 0)$ (SI)

$AD$: $\vec{r} = (0; 3 - 3\lambda; 0)$ (SI)

$DE$: $\vec{r} = (4\lambda; 0; 0)$ (SI)

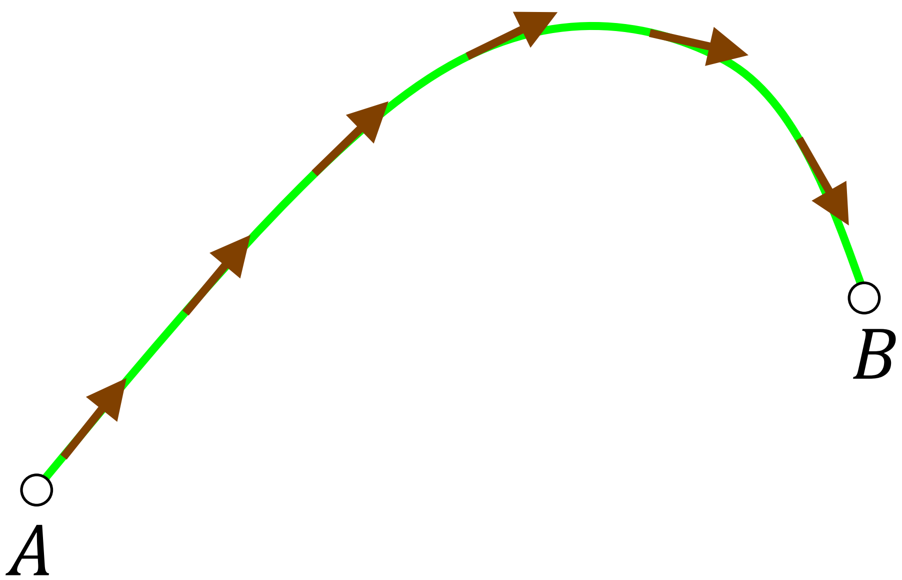
$EB$: $\vec{r} = (4;\ 3\lambda; 0)$ (SI)

La figura incluye los trabajos correspondientes a todas las trayectorias analizadas. Nótese que, como cabía esperar, los valores son menores cuanto más próximas al fondo del río son dichas trayectorias.

# Casos particulares de cálculo del trabajo

## Fuerza nula en la curva

$$W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} \vec{0} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} 0 \, dr$$

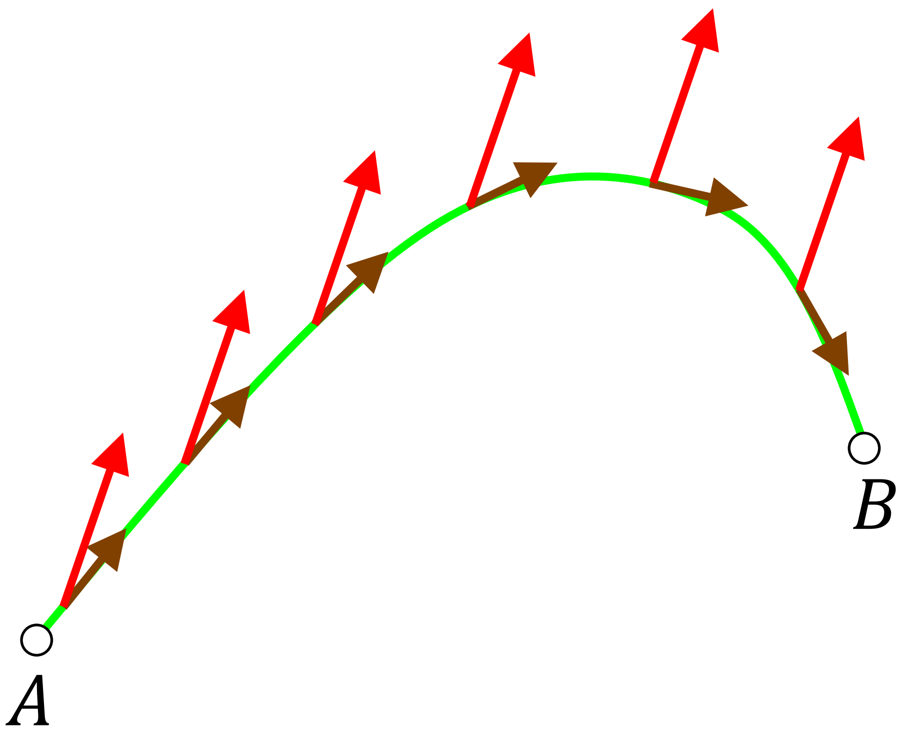



$$\boxed{W = 0}$$

# Casos particulares de cálculo del trabajo

## Fuerza constante a lo largo de la curva

$$W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_{AB} d\vec{r} = \vec{F} \cdot [\vec{r}]_A^B = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

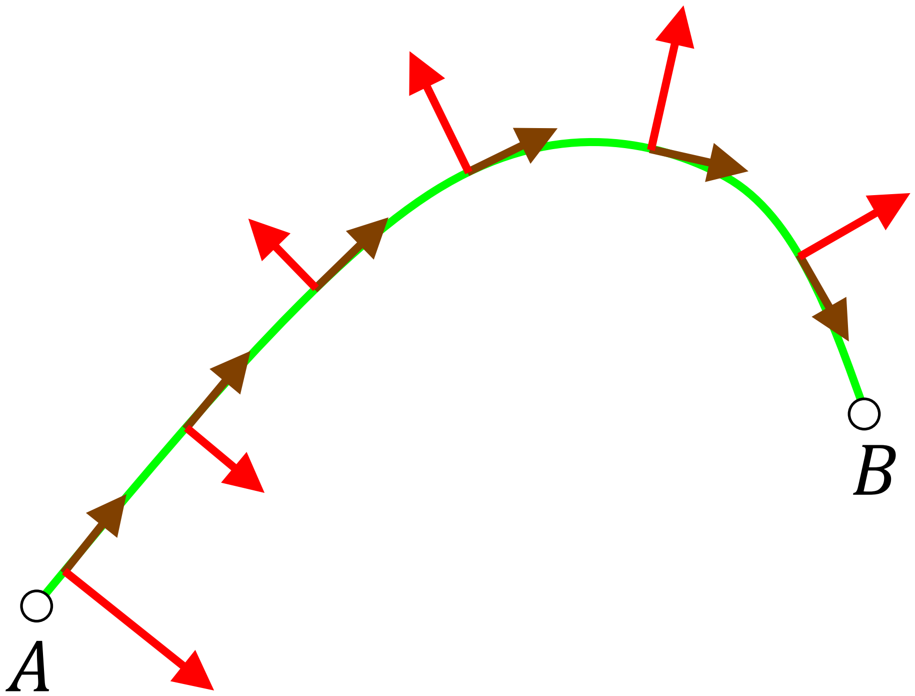



$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

# Casos particulares de cálculo del trabajo

## Fuerza normal a la curva

$$W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} F\, dr \cos {}^{\pi}\!/_{2} = \int_{AB} 0\, dr$$

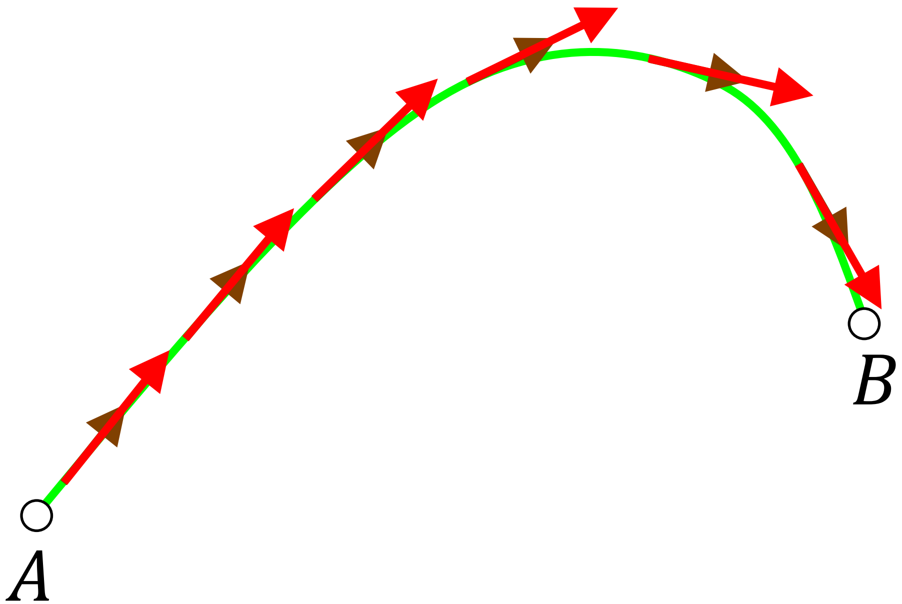



$$\boxed{W = 0}$$

# Casos particulares de cálculo del trabajo

## Fuerza de módulo constante y tangente a la curva en el mismo sentido

$$W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} F\, dr \cos 0 = F \int_{AB} dr$$



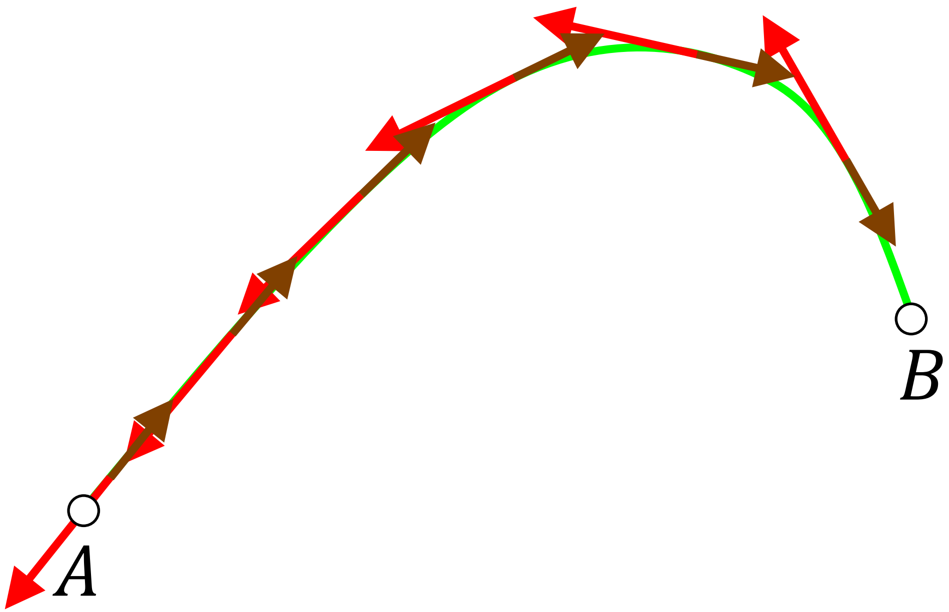

$$\boxed{W = FL}$$

$L$: longitud de la curva.

# Casos particulares de cálculo del trabajo

Fuerza de módulo constante y tangente a la curva en sentido contrario

$$W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} F\, dr \cos \pi = -F \int_{AB} dr$$




$$\boxed{W = -FL}$$

$L$: longitud de la curva.

# Casos particulares de cálculo del trabajo

## Fuerza constante a lo largo de línea recta

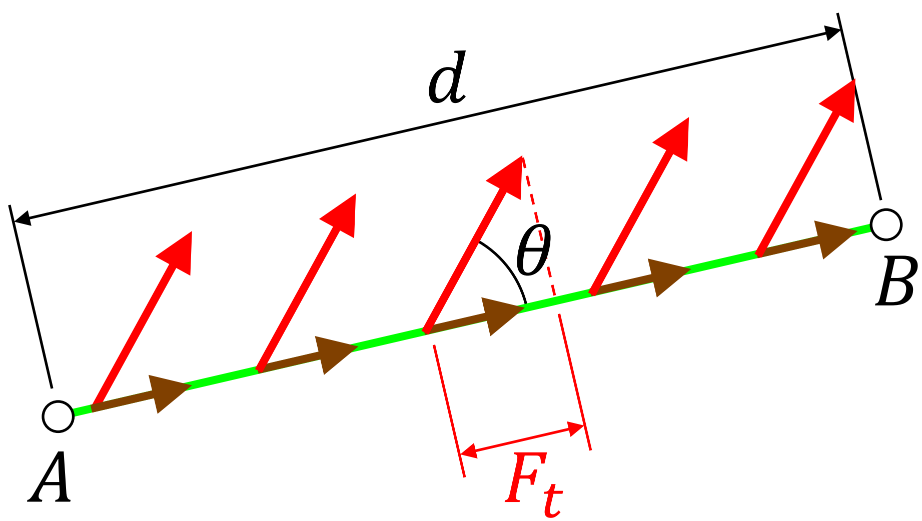
Es un caso particular de "fuerza constante a lo largo de la curva".

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = Fd\cos\theta$$

$$W = (F\cos\theta)d = F_t d$$

$$\boxed{\begin{aligned} W &= Fd\cos\theta \\ W &= F_t d \end{aligned}}$$

Criterio de signos:
$F_t$ es positivo si tiene el sentido del recorrido; negativo en caso contrario.




Casos aún más particulares

$$\boxed{\begin{aligned} \theta = 0 &\Rightarrow W = Fd \\ \theta = \pi &\Rightarrow W = -Fd \end{aligned}}$$

# Unidad del trabajo

De acuerdo con su definición, el trabajo es una magnitud escalar, y su producto dimensional es

$$\dim W = \dim F \cdot \mathsf{L} = (\mathsf{T}^{-2}\mathsf{LM})\mathsf{L} = \mathsf{T}^{-2}\mathsf{L}^{2}\mathsf{M}$$

La unidad SI coherente de trabajo se define a partir de la expresión $W = Fd$, correspondiente a un caso particular.

Definición: el julio (símbolo J) es el trabajo realizado por una fuerza de módulo 1 N, que actúa en el sentido del movimiento sobre un móvil que se desplaza 1 m en línea recta.

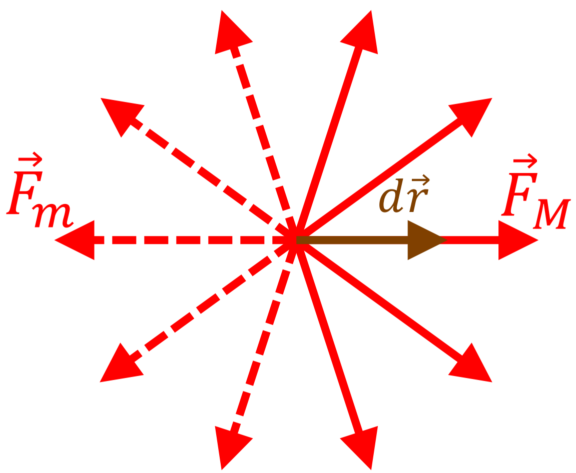
Por tanto, $\mathrm{J} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$.

El producto dimensional del trabajo es el mismo que el del momento de una fuerza. Sin embargo, para dicho momento debe utilizarse el N · m, y jamás el J.

# Propiedades de la integral curvilínea

- Los tramos en que el campo vectorial forma un ángulo agudo con el desplazamiento, contribuyen positivamente a la integral curvilínea; los tramos en que el ángulo es obtuso, contribuyen negativamente.

Aplicado a fuerzas implica que, para un mismo módulo $F$,




$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F dr \cos\theta$$

$\longrightarrow$ $dW > 0$

$\dashrightarrow$ $dW < 0$

$\vec{F}_M$ $dW$ máximo

$\vec{F}_m$ $dW$ mínimo

# Propiedades de la integral curvilínea

- Si se subdivide una curva $AZ$ en partes $AB$, $BC$, …, la integral curvilínea se puede descomponer como suma de las de estas partes.

$$\int_{AZ} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} \vec{f} \cdot d\vec{r} + \int_{BC} \vec{f} \cdot d\vec{r} + \cdots$$

Aplicado a fuerzas, implica que

$$W_{AZ} = W_{AB} + W_{BC} + \cdots$$

# Potencia media

La potencia media en un intervalo de tiempo es el cociente entre el correspondiente trabajo realizado, y la duración de dicho intervalo.

$$P_{med} = \frac{W}{\Delta t}$$

Si se trata de un incremento infinitesimal de tiempo, $dt$, el trabajo realizado será infinitesimal, $dW$.

La potencia media en ese intervalo será $dW/dt$.

Esa es, precisamente, la definición de potencia.

# Potencia

Se denomina potencia a la derivada del trabajo respecto al tiempo.

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$

Por tanto, la potencia es el ritmo al que se efectúa un trabajo.

De esta definición se deduce que el trabajo realizado entre dos instantes $t_1$ y $t_2$ es

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

# Potencia constante

Si la potencia es constante, el trabajo realizado entre dos instantes $t_1$ y $t_2$ es

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P dt = P \int_{t_1}^{t_2} dt = P[t]_{t_1}^{t_2} = P(t_2 - t_1) = P\Delta t$$

# Unidad de la potencia

De acuerdo con su definición, la potencia es una magnitud escalar, y su producto dimensional es

$$\dim P = \dim W \cdot \mathsf{T}^{-1} = (\mathsf{T}^{-2}\mathsf{L}^{2}\mathsf{M})\mathsf{T}^{-1} = \mathsf{T}^{-3}\mathsf{L}^{2}\mathsf{M}$$

La unidad SI coherente de potencia se define a partir de la expresión $W = P\Delta t$, correspondiente a un caso particular.

Definición: el vatio (símbolo W) es la potencia desarrollada al efectuar a ritmo constante un trabajo de 1 J en 1 s.

Por tanto, $\mathrm{W} = \mathrm{J/s}$.

# Potencia desarrollada por una fuerza

En el caso de la potencia desarrollada por una fuerza, es

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Por tanto,

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

## Ejercicio 2

El trabajo realizado por un motor evoluciona de acuerdo a la expresión $W = 80(t - 1 + \mathrm{e}^{-0,2t})$ (SI). ¿Qué potencia desarrolla el motor 1 s después de arrancar? ¿Cuál es la potencia que acaba desarrollando en régimen permanente?

Es $$P = \frac{dW}{dt} = 80(1 - 0,2\mathrm{e}^{-0,2t})\ \text{(SI)}$$

$$P(1) = 80(1 - 0,2\mathrm{e}^{-0,2\times 1}) = 66,90\ \mathrm{W}$$

Conforme transcurre el tiempo, $\mathrm{e}^{-0,2t}$ tiende asintóticamente a 0. Por tanto, la potencia tiende asintóticamente a

$$P_f = 80(1 - 0,2 \times 0) = 80\ \mathrm{W}$$

# Energía

Se denomina energía a la capacidad de efectuar un trabajo.

Su valor es el del trabajo que puede desarrollar, y por tanto:

- como el trabajo, es una magnitud escalar;
- como el trabajo, su producto dimensional es $\mathsf{T}^{-2}\mathsf{L}^{2}\mathsf{M}$;
- como el trabajo, su unidad SI coherente es el J.

# Energía

Para evitar confusiones, conviene recalcar diversos aspectos conceptuales muy relevantes que diferencian energía y trabajo.

- La energía está asociada a sistemas, y el trabajo a fuerzas.

  Ejemplo: bloque que desciende por un plano inclinado.

  Se puede hablar de la energía del bloque, y del trabajo del peso, de la reacción normal, o de la fuerza de rozamiento. No existe tal cosa como el trabajo del bloque.

- La energía es una magnitud instantánea, y el trabajo de intervalo.

  Se puede hablar de la energía de un bloque al comienzo o al final de un plano inclinado (instantes), y del trabajo del peso a lo largo del recorrido (intervalo).

# Energía

Puede verse que la relación entre energía y trabajo es, en muchos aspectos, análoga a la que existe entre momento lineal e impulso.

Sin embargo, energía y trabajo son magnitudes escalares y con la misma unidad SI coherente, J. En cambio, momento lineal e impulso son vectoriales, y sus unidades, $\mathrm{kg \cdot m/s}$ y $\mathrm{N \cdot s}$ respectivamente, aunque equivalentes, son diferentes.

# Energía

Como ejemplo, si una batería tiene una energía de 100 J, significa que tiene la capacidad para efectuar un trabajo de 100 J.

Si esa batería efectúa un trabajo de 20 J, le queda la capacidad de efectuar otros 80 J. Por tanto, su energía ha pasado a ser de 80 J.

En resumen, la energía de un sistema es igual al trabajo que puede efectuar hasta agotarla.

A la inversa, si se realiza un trabajo sobre un sistema que inicialmente carece de energía, su energía final es igual a ese trabajo.

Para facilitar la comprensión del concepto, aquí estamos realizando un buen número de simplificaciones. Más adelante se tratará la relación entre trabajo y energía con mayor profundidad.

# Energía cinética

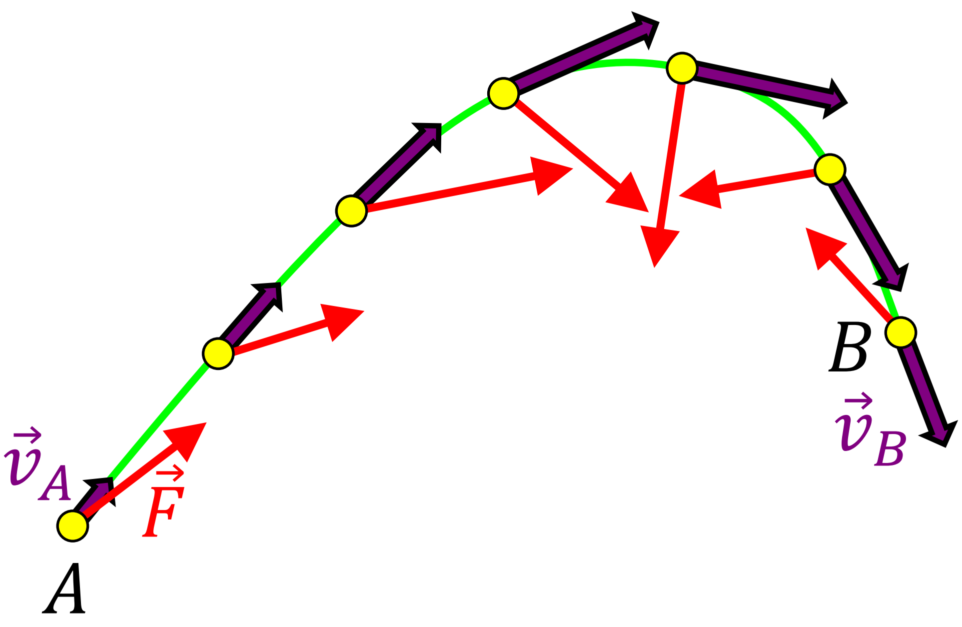
Se denomina energía cinética de un sistema de puntos materiales, a la que tiene por el hecho de estar en movimiento.

De acuerdo con esta definición, la energía cinética de un sistema inmóvil es cero.

Por tanto, la energía cinética de un sistema es igual al trabajo que ha habido que realizar sobre él para, partiendo del reposo, llevarlo a su estado actual de movimiento.

# Energía cinética de un punto material

Sea un punto material de masa $m$, que tiene inicialmente una velocidad $\vec{v}_A$. Como consecuencia de la aplicación de una fuerza $\vec{F}$, el punto se desplaza a lo largo de una trayectoria $AB$, pasando a tener una velocidad $\vec{v}_B$.




¿Existe alguna relación entre el cambio de la velocidad y el trabajo realizado por $\vec{F}$ a lo largo de la trayectoria $AB$?

# Energía cinética de un punto material

Utilizando la definición de trabajo y la segunda ley de Newton, resulta que

$$W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} =$$

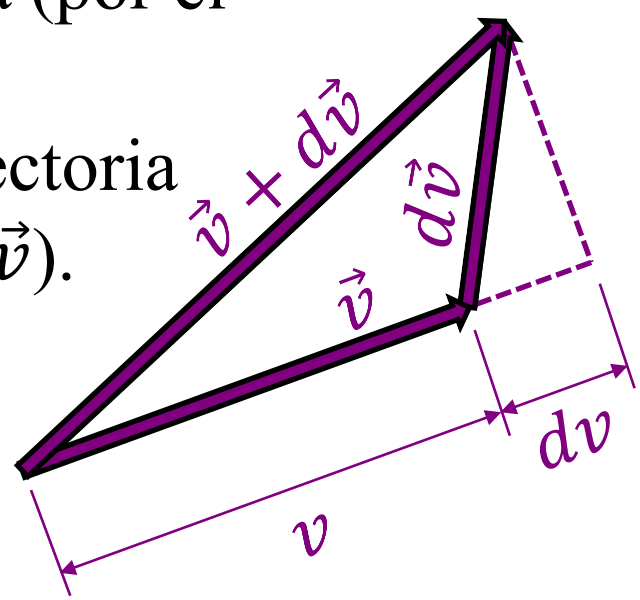
$$= \int_{AB} m \, d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \int_{AB} m \, d\vec{v} \cdot \vec{v} = \int_{AB} m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

# Energía cinética de un punto material

Sean $\vec{v}$ la velocidad en un cierto instante, y $\vec{v} + d\vec{v}$ la que se tiene un $dt$ más tarde.

En base a los conceptos de aceleración tangencial y aceleración normal, sabemos que el cambio $d\vec{v}$ en un $dt$ se puede descomponer en:

- una parte tangente a la trayectoria (por el cambio de módulo de $\vec{v}$);
- otra parte perpendicular a la trayectoria (por el cambio de orientación de $\vec{v}$).



# Energía cinética de un punto material

Nótese que el módulo $|d\vec{v}|$ del diferencial de velocidad no es igual al diferencial del módulo, $dv$.*

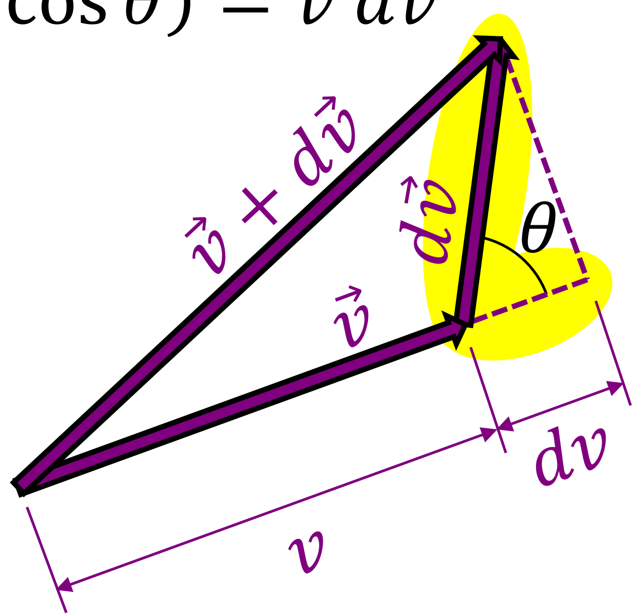
La relación entre ellos es $dv = |d\vec{v}|\cos\theta$.

Por definición de producto escalar,

$$\vec{v}\cdot d\vec{v} = |\vec{v}||d\vec{v}|\cos\theta = v(|d\vec{v}|\cos\theta) = v\,dv$$

Por tanto,

$$W = \int_{AB} m\vec{v}\cdot d\vec{v} = \int_{AB} mv\,dv$$




* El módulo de una resta de vectores, no es igual en general a la resta de sus módulos. Y eso también es así si el resultado de esa resta es diferencial.

# Energía cinética de un punto material

Resolviendo esta integral, se obtiene

$$W = \int_{AB} mv\,dv = \left[\frac{mv^2}{2}\right]_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Esta relación permite extraer diversas consecuencias.

1) La energía cinética, esto es, el trabajo necesario para que el punto material pase del reposo ($\vec{v}_A = \vec{0}$) a una velocidad cualquiera $\vec{v}$ ($\vec{v}_B = \vec{v}$), es

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m0^2$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

# Energía cinética de un punto material

Resolviendo esta integral, se obtiene

$$W = \int_{AB} mv\,dv = \left[\frac{mv^2}{2}\right]_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Esta relación permite extraer diversas consecuencias.

2) El trabajo realizado por la fuerza entre dos posiciones cualesquiera del punto material, es igual al incremento de su energía cinética.

$$W = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{c_B} - E_{c_A}$$

$$\boxed{W = \Delta E_c}$$

# Energía cinética de un punto material

Nótese que la relación $W = \Delta E_c$ da, por fin, respuesta a la pregunta inicial del tema: ¿cómo contribuye una fuerza al desplazamiento de una partícula?

El trabajo mide el valor de esa contribución, en concreto a la energía cinética del punto material, esto es, la que tiene por estar en movimiento. Además:

- si el trabajo es positivo (por tanto, en balance la fuerza ayuda al movimiento), entonces el incremento de energía cinética es positivo, y por tanto esta es mayor al final;
- si el trabajo es negativo (por tanto, en balance la fuerza dificulta el movimiento), entonces el incremento de energía cinetica es negativo, y por tanto esta es menor al final;
- si el trabajo es cero, entonces el incremento de energía cinetica es cero, y por tanto esta es igual al final.

# Energía cinética de un sistema

Sea un sistema de puntos materiales. Para uno cualquiera de ellos, el trabajo del conjunto de las fuerzas (tanto exteriores como interiores) que actúan sobre él entre una situación $A$ y otra $B$, es igual al incremento de su energía cinética.

$$W_i = E_{c_{B_i}} - E_{c_{A_i}}$$

Aplicando esta relación a todos los puntos del sistema, y sumando todas esas ecuaciones, resulta

$$\sum W_i = \sum \left(E_{c_{B_i}} - E_{c_{A_i}}\right) = \sum E_{c_{B_i}} - \sum E_{c_{A_i}}$$

Aquí, $\sum W_i$ es el trabajo total $W_{tot}$ de las fuerzas (tanto exteriores como interiores) que actúan sobre el sistema.

# Energía cinética de un sistema

Por tanto,

$$W_{tot} = \sum E_{c_{B_i}} - \sum E_{c_{A_i}}$$

Esta relación permite extraer diversas consecuencias.

1) La energía cinética del sistema, esto es, el trabajo necesario para que pase del reposo ($E_{c_{A_i}} = 0 \;\; \forall i$) a una situación cualquiera, es

$$E_c = \sum E_{c_i} - \sum 0$$

$$\boxed{E_c = \sum E_{c_i} = \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right)}$$

# Energía cinética de un sistema

Por tanto,

$$W_{tot} = \sum E_{c_{B_i}} - \sum E_{c_{A_i}}$$

Esta relación permite extraer diversas consecuencias.

2) El trabajo realizado por las fuerzas entre dos posiciones cualesquiera del sistema, es igual al incremento de su energía cinética.

$$W_{tot} = \sum E_{c_{B_i}} - \sum E_{c_{A_i}} = E_{c_B} - E_{c_A}$$

$$\boxed{W_{tot} = \Delta E_c}$$

# Energía cinética de un sistema

La energía cinética de un sistema de puntos materiales es igual a la suma de las energías cinéticas de todos los puntos del sistema. La energía cinética de cada punto es la mitad del producto de su masa por el cuadrado del módulo de su velocidad.

$$E_c = \sum E_{c_i} = \sum \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$$

Teorema de la energía cinética.

El trabajo total de las fuerzas, exteriores e interiores, que actúan sobre un sistema de puntos materiales, es igual al incremento de su energía cinética.

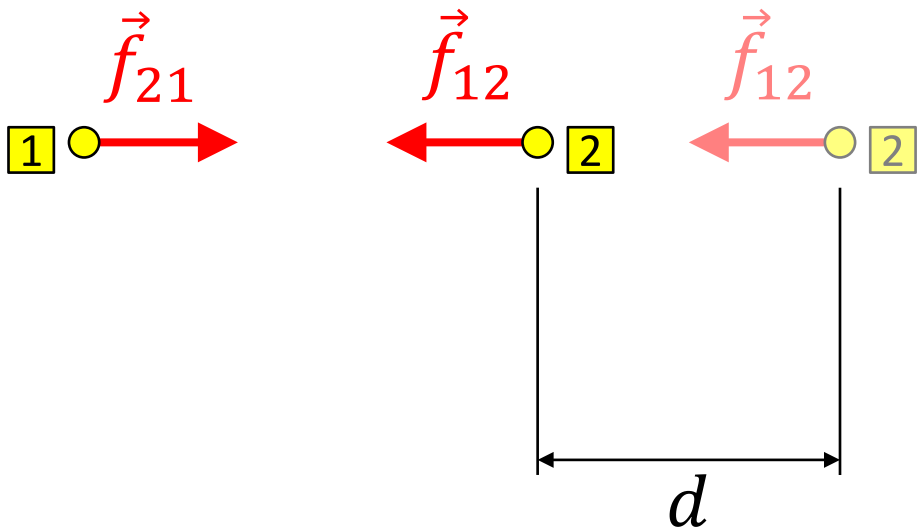
$$W_{tot} = \Delta E_c$$

# Trabajo de las fuerzas interiores

Considérese el conjunto de todas las fuerzas interiores que los puntos materiales de un sistema se ejercen entre sí.

Puesto que la resultante de ese conjunto es nula, puede pensarse, erróneamente, que su trabajo total es cero.

Veamos un ejemplo con un sistema de dos puntos que se acercan entre sí.




Es

$$\vec{f}_{21} + \vec{f}_{12} = \vec{0}$$

$$W_{\vec{f}_{21}} + W_{\vec{f}_{12}} =$$

$$= 0 + f_{12} d \neq 0$$

# Caso particular: cuerpo indeformable

En un cuerpo indeformable, la distancia entre cualquier par de puntos es invariable, y no puede darse la situación anterior.

En consecuencia, en tal caso el trabajo de las fuerzas interiores es cero.

Por tanto, se tiene el siguiente resultado particular.

Teorema de la energía cinética para cuerpos indeformables. El trabajo total de las fuerzas exteriores que actúan sobre un cuerpo indeformable (o, al menos, que no se está deformando), es igual al incremento de su energía cinética.

# Caso particular: cuerpo en traslación

En un cuerpo en traslación, todos los puntos materiales tienen, en cualquier instante, la misma velocidad.

Por tanto,

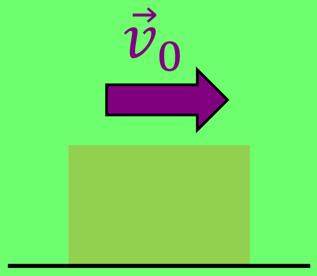
$$E_c = \sum\left(\frac{1}{2}m_i v^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sum m_i\right)v^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

La energía cinética de un sistema de puntos materiales dotado de un movimiento de traslación, es la misma que tendría un punto material con toda la masa del sistema e idéntico movimiento.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

# Ejercicio 3

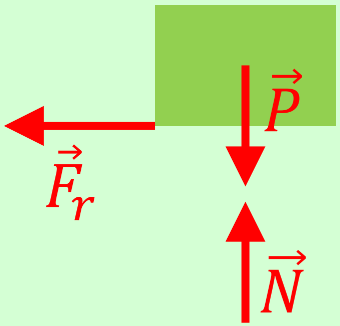
Un bloque de masa $m = 3$ kg se mueve inicialmente a $v_0 = 4\ \mathrm{m/s}$ sobre una superficie horizontal, que ejerce sobre él una fuerza de rozamiento de módulo 6 N.




a) ¿Cuál será el módulo de su velocidad tras recorrer 2 m?

b) ¿Qué distancia recorrerá antes de detenerse?

a) El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, el bloque en este caso.




Las fuerzas que actúan sobre el bloque son:

$\vec{P}$: peso.
$\vec{N}$: reacción normal.
$\vec{F}_r$: fuerza de rozamiento.

Aplicando el teorema de la energía cinética a este cuerpo, supuesto indeformable, entre la situación inicial y tras haber recorrido 2 m, es:

$$\Delta E_c = W_{\vec{P}} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{F}_r} \longrightarrow 1{,}5v^2 - 24 = 0 + 0 + (-12)$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}3v^2 - \frac{1}{2}3 \times 4^2 = $$
$$= 1{,}5v^2 - 24 \text{ (SI)}$$

$$W_{\vec{P}} = 0 \text{ J}$$

$$W_{\vec{N}} = 0 \text{ J}$$

$$W_{\vec{F}_r} = -F_r d = -6 \times 2 = -12 \text{ J}$$

$$1{,}5v^2 = 12$$

$$v = 2{,}828 \text{ m/s}$$

Ejemplo de procedimiento incorrecto

$$E_{c_{ini}} = E_{c_{fin}} + W_{\vec{F}_r} \longrightarrow 24 = 1{,}5v^2 + 12$$

$$E_{c_{ini}} = \frac{1}{2} 3 \times 4^2 = 24\ \mathrm{J}$$

$$1{,}5v^2 = 12$$

$$v = 2{,}828\ \mathrm{m/s}$$

$$E_{c_{fin}} = \frac{1}{2} 3 \times v^2 = 1{,}5v^2\ \mathrm{(SI)}$$

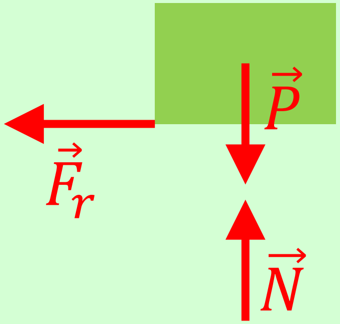
$$W_{\vec{F}_r} = F_r d = 6 \times 2 = 12\ \mathrm{J}$$

- ¿Y qué pasa con los trabajos del peso y de la reacción normal? Aunque sean cero, hay que indicarlo.
- ¿Trabajo de rozamiento positivo? ¡Premio Nobel ya!
- Es $\Delta E_c = W_{\vec{P}} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{F}_r} \Rightarrow E_{c_{fin}} - E_{c_{ini}} = 0 + 0 + W_{\vec{F}_r} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_{c_{ini}} = E_{c_{fin}} - W_{\vec{F}_r} \Rightarrow \cancel{E_{c_{ini}} = E_{c_{fin}} + W_{\vec{F}_r}}$$

Uno de estos errores graves hace que salga $1{,}5v^2 = -12$. Dos errores graves que se compensan no son cero errores; son dos.

b) El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, el bloque en este caso.




Las fuerzas que actúan sobre el bloque son:

$\vec{P}$: peso.
$\vec{N}$: reacción normal.
$\vec{F}_r$: fuerza de rozamiento.

Aplicando ahora el teorema de la energía cinética entre la situación inicial y el punto en el que el bloque se detiene, es:

$$\Delta E_c = W_{\vec{P}} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{F}_r}$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} 3 \times 0^2 - \frac{1}{2} 3 \times 4^2 = $$
$$= -24 \text{ J}$$

$$W_{\vec{P}} = 0 \text{ J}$$

$$W_{\vec{N}} = 0 \text{ J}$$

$$W_{\vec{F}_r} = -F_r d = -6d \text{ (SI)}$$

$$-24 = 0 + 0 + (-6d)$$

$$6d = 24$$

$$d = 4 \text{ m}$$

# Fuerzas conservativas y no conservativas

Se dice que un campo vectorial es conservativo si su integral curvilínea entre dos puntos cualesquiera es independiente del camino.

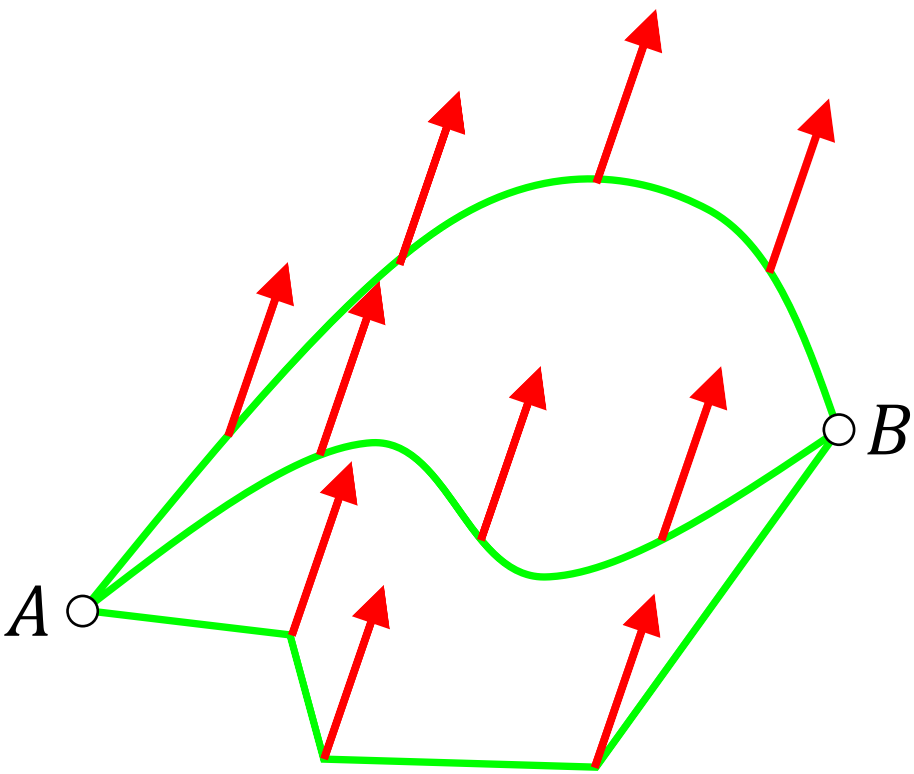
¿Cómo se aplica esto al caso de fuerzas?

- Se dice que una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza entre dos puntos cualesquiera es independiente del camino.
- Se dice que una fuerza es no conservativa si no es conser-vativa, esto es, existe al menos un par de caminos con igual origen y destino, para los que el trabajo que realiza es diferente.

# Fuerzas conservativas y no conservativas

Sean una fuerza $\vec{F}$, constante en todo el espacio, y dos puntos cualesquiera $A$ y $B$. Para cualquier camino seguido del primero al segundo, es

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

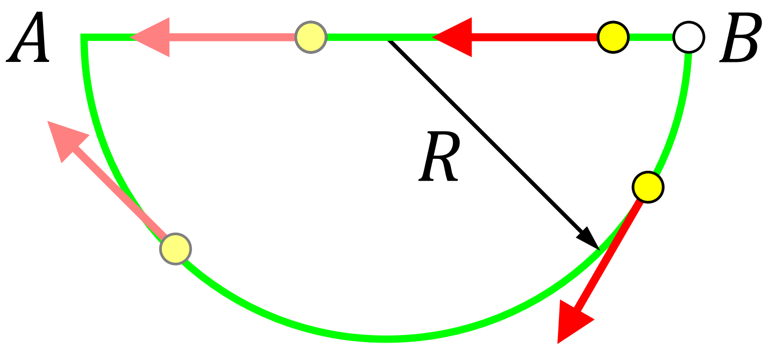



Por tanto, depende de los puntos $A$ y $B$, pero no del camino seguido entre ellos.

Así pues, una fuerza constante es conservativa.

# Fuerzas conservativas y no conservativas

Considérese la fuerza de rozamiento que actúa, con módulo constante, sobre un cuerpo que se mueve de un punto $A$ a otro $B$.




Si lo hace en línea recta,

$$W_{rec} = -F(2R)$$

Si lo hace siguiendo una semicircunferencia,

$$W_{sem} = -F(\pi R) \neq W_{rec}$$

Se trata de una fuerza no conservativa.

# Propiedades de las fuerzas conservativas

Los campos conservativos tienen una serie de propiedades que no se demostrarán aquí. Aplicadas al caso de fuerzas, son las que se indican a continuación.

- Una fuerza $\vec{F}$ es conservativa si, y solo si, su trabajo a lo largo de cualquier camino cerrado es cero.
- Una fuerza $\vec{F}$ es conservativa si, y solo si, existe una función $V$ tal que $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$.

Aquí, $\vec{\nabla}$ es el operador gradiente. Por tanto, la segunda propiedad significa que

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}; \frac{\partial V}{\partial y}; \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

# Propiedades de las fuerzas conservativas

La existencia de la función $V$ permite el siguiente desarrollo.

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x};\frac{\partial V}{\partial y};\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cdot(dx;dy;dz) =$$

$$= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) = -dV$$

Por tanto,

$$W = \int_{AB}\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{AB} dV = -[V]_A^B = -(V_B - V_A)$$

$$W = V_A - V_B$$

# Energía potencial

Vamos a analizar la expresión $W = V_A - V_B$.

En primer lugar, véase que el trabajo depende de los valores de $V$ en los puntos $A$ y $B$, pero no del camino seguido entre ellos. Esto demuestra que en efecto, si la función $V$ existe, la fuerza es conservativa.

En segundo lugar, nótese que el trabajo es igual a la pérdida de valor de la función $V$.

Así pues, $V$ representa la capacidad de efectuar un trabajo.

Por tanto, $V$ es una energía, y recibe el nombre de energía potencial asociada a la fuerza.

# Energía potencial

En conclusión, una fuerza $\vec{F}$, si y solo si es conservativa, tiene asociada una energía potencial $E_p$ tal que $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$.

Además, el trabajo de una fuerza conservativa entre dos puntos es igual a la pérdida de su energía potencial asociada.

$$\boxed{W = -\Delta E_p}$$

## Ejercicio 4

La energía potencial asociada a una cierta fuerza conservativa es $E_p = x^3z^2 + x\cos(yz)$ (SI). ¿Cuál es la expresión de esa fuerza? ¿Qué trabajo realiza la fuerza actuando sobre una partícula que se mueve en línea recta del punto $A(1;0;1)$ m al $B(2;-1;1)$ m?

Es $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}; \frac{\partial E_p}{\partial y}; \frac{\partial E_p}{\partial z}\right) =$

$$= -(3x^2z^2 + \cos(yz)\,; -xz\,\mathrm{sen}(yz)\,; 2x^3z - xy\,\mathrm{sen}(yz)) =$$

$$= (-3x^2z^2 - \cos(yz)\,;\ xz\,\mathrm{sen}(yz)\,; -2x^3z + xy\,\mathrm{sen}(yz))\ \text{(SI)}$$

Las energías potenciales en los puntos $A$ y $B$ son:

$$E_{p_A} = 1^3 \times 1^2 + 1\cos(0 \times 1) = 2\ \text{J}$$

$$E_{p_B} = 2^3 \times 1^2 + 2\cos\big((-1) \times 1\big) = 9{,}081\ \text{J}$$

Que la trayectoria sea recta o cualquier otra es irrelevante, ya que la fuerza es conservativa. El trabajo que realiza es

$$W = -\Delta E_p = E_{p_A} - E_{p_B} = 2 - 9{,}081 = -7{,}081\ \text{J}$$

# Energía potencial del peso

En sistemas no extensos, en los que se puede admitir que la aceleración de la gravedad es constante, el peso de un punto material también es constante.

En este caso,* el peso es una fuerza conservativa, y su energía potencial asociada es

$$\boxed{E_p = mgh}$$

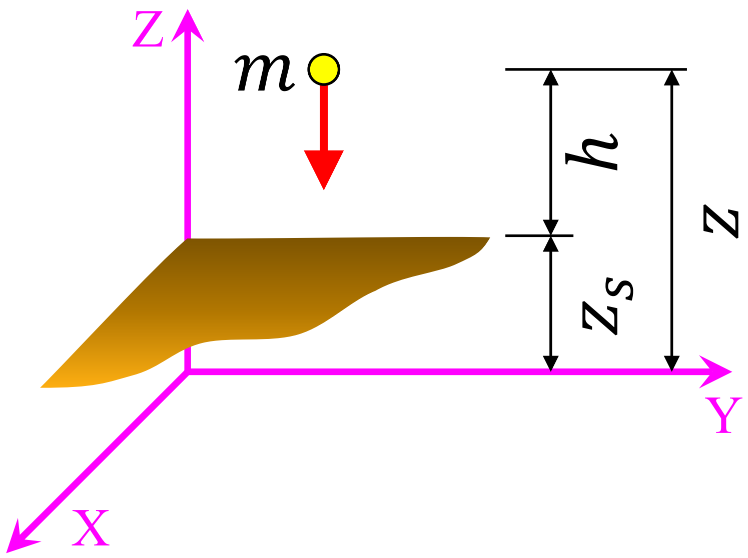
$m$: masa del punto material.

$g$: módulo de la aceleración de la gravedad.

$h$: altura respecto a un nivel de referencia.

* Aunque no trataremos aquí esta cuestión, el peso siempre es una fuerza conservativa. Sin embargo, la expresión de su energía potencial solo es la aquí indicada si la aceleración de la gravedad es constante.

# Energía potencial del peso




Nótese que

$$E_p = mgh = mg(z - z_s)$$

$$\vec{\nabla} E_p = \left( \frac{\partial E_p}{\partial x}; \frac{\partial E_p}{\partial y}; \frac{\partial E_p}{\partial z} \right) =$$

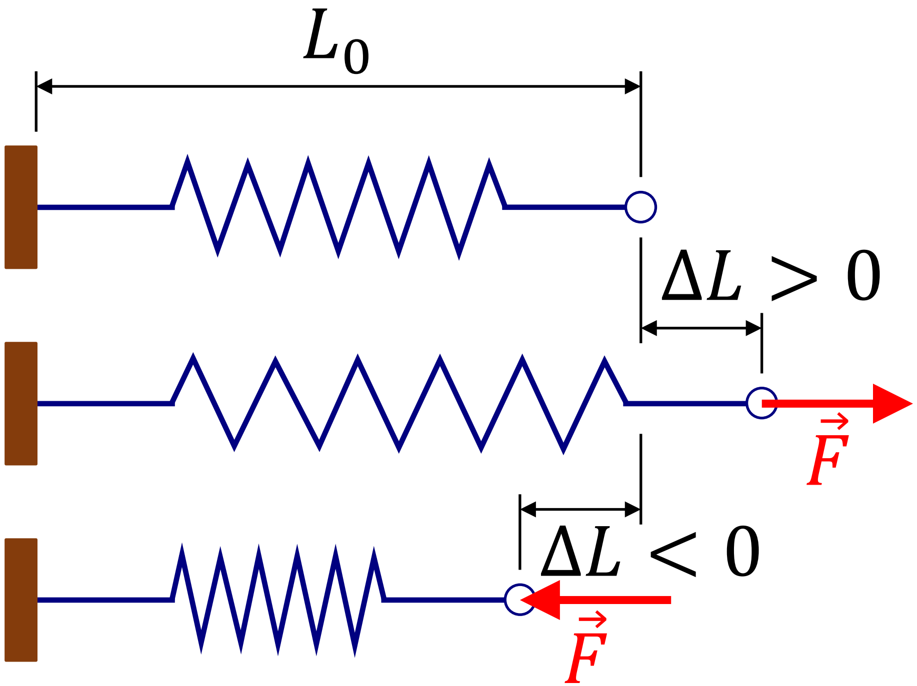
$$= (0; 0; mg) = -\vec{P}$$

$$\vec{P} = -\vec{\nabla} E_p$$

Queda así demostrado que, en efecto, el peso es una fuerza conservativa, y que su energía potencial es $E_p = mgh$.

Para sistemas de puntos materiales es $E_p = mgh_G$, donde $h_G$ es la altura de su centro de gravedad respecto a un nivel de referencia.

# Deformación de un muelle




Sea un muelle cuya longitud natural (esto es, la que tiene cuando no actúa sobre él ninguna fuerza) es $L_0$. Fijamos un extremo, y dejamos libre el otro.

Si se tira del extremo libre con una fuerza de módulo $F$, el muelle se alarga una longitud proporcional $\Delta L > 0$.

Si se oprime el extremo libre con una fuerza de módulo $F$, el muelle se alarga una longitud proporcional $\Delta L < 0$ (por tanto, se acorta).

# Deformación de un muelle

La relación entre el módulo de la fuerza que actúa sobre el muelle, y el valor absoluto de su alargamiento, recibe el nombre de constante elástica del muelle.

Por tanto, la constante elástica $k$ cumple que

$$F = k|\Delta L|$$

De acuerdo con su definición, la constante elástica es una magnitud escalar, y su producto dimensional es

$$\dim k = \dim F \cdot \mathsf{L}^{-1} = (\mathsf{T}^{-2}\mathsf{L}\mathsf{M})\mathsf{L}^{-1} = \mathsf{T}^{-2}\mathsf{M}$$

La unidad SI coherente de la constante elástica es el $\mathrm{N/m}$.

# Fuerza ejercida por un muelle

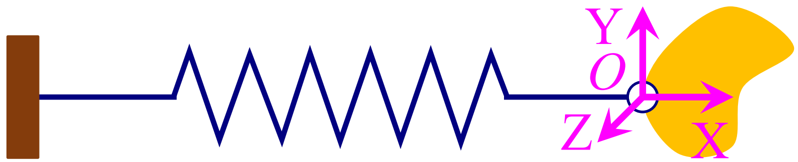
Nuestro objetivo no es analizar la fuerza que actúa sobre un muelle, sino la fuerza $\vec{F}_m$ que el muelle ejerce sobre otro cuerpo, cuyo comportamiento es el que queremos estudiar.

De acuerdo, con la tercera ley de Newton, las dos fuerzas mencionadas son opuestas. Por tanto,

$$F_m = k|\Delta L|$$

Sin embargo, el sentido de $\vec{F}_m$ es el opuesto: aquel en el que el muelle recuperaría su longitud natural.

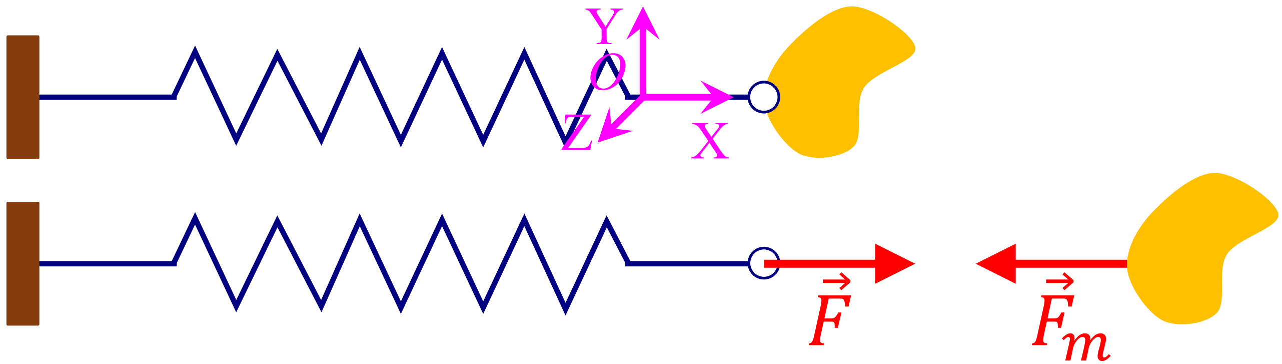
# Fuerza ejercida por un muelle




Sea el sistema de referencia de la figura, en el que:

- el origen de coordenadas se encuentra en la posición del extremo libre cuando el muelle tiene su longitud natural;
- el eje X tiene la orientación de los alargamientos.

# Fuerza ejercida por un muelle




Si el extremo libre pasa a una posición $x > 0$, la fuerza que ejerce el muelle es

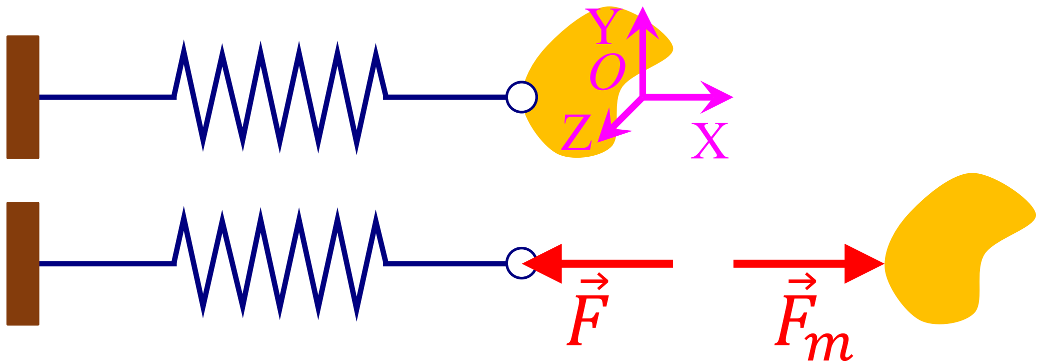
$$\vec{F}_m = (-kx; 0; 0)$$

Puede comprobarse que, en efecto, su módulo es

$$F_m = k|x| = k|\Delta L|$$

y que su componente X es negativa.

# Fuerza ejercida por un muelle




Si el extremo libre pasa a una posición $x < 0$, la fuerza que ejerce el muelle también es

$$\vec{F}_m = (-kx; 0; 0)$$

Puede comprobarse que, en efecto, su módulo es

$$F_m = k|x| = k|\Delta L|$$

y que su componente X es positiva (recuérdese que ahora es $x < 0$).

Por tanto, la expresión $\vec{F}_m = (-kx; 0; 0)$ es válida en los dos casos.

# Energía potencial elástica

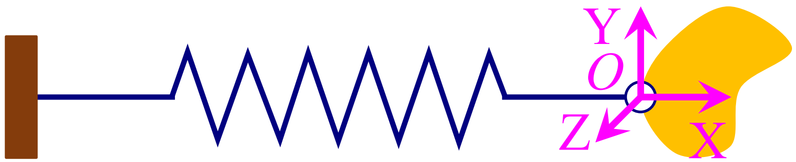
La fuerza ejercida por un muelle es conservativa, y su energía potencial asociada es

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2}$$

$k$: constante elástica del muelle.

$\Delta L$: alargamiento del muelle.

# Energía potencial elástica




Nótese que, utilizando el sistema de referencia de la figura,

$$E_p = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

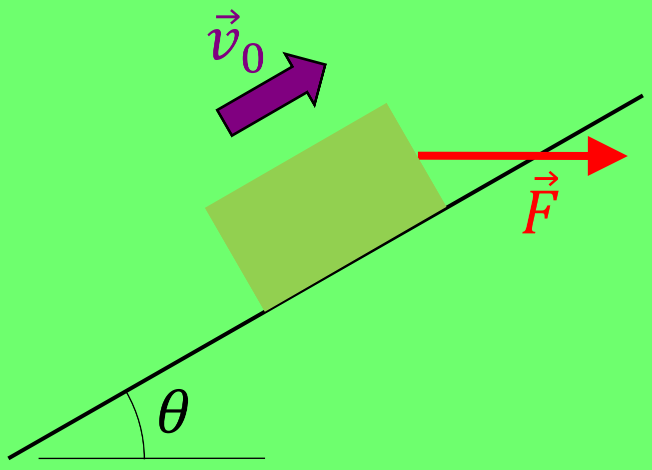
$$\vec{\nabla}E_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}; \frac{\partial E_p}{\partial y}; \frac{\partial E_p}{\partial z}\right) = (kx; 0; 0) = -\vec{F}_m$$

$$\vec{F}_m = -\vec{\nabla}E_p$$

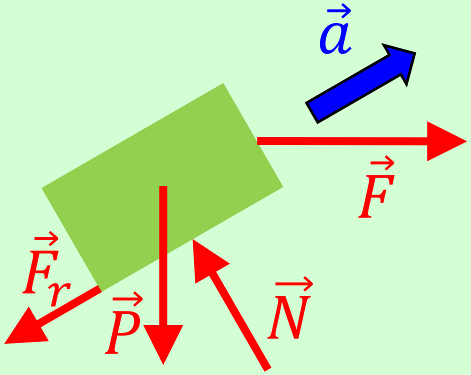
Queda así demostrado que, en efecto, la fuerza ejercida por un muelle es conservativa, y que su energía potencial es $E_p = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2$.

# Ejercicio 5

Un bloque de masa $m = 3$ kg asciende inicialmente a $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$ a lo largo de un plano inclinado un ángulo $\theta = 27°$, con el que tiene un coeficiente de rozamiento $\mu = 0{,}2$. Del bloque tira una fuerza horizontal de módulo $F = 30$ N. ¿Cuál es el módulo de la velocidad del bloque después de recorrer 10 m?



El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, el bloque en este caso.



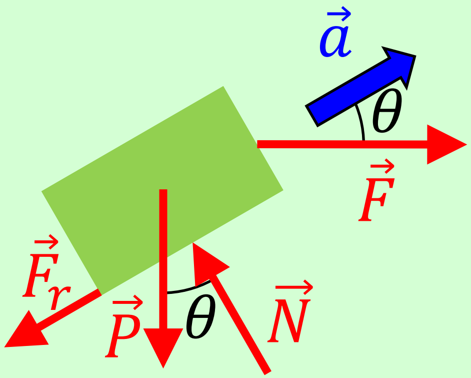

Las fuerzas que actúan sobre el bloque son:

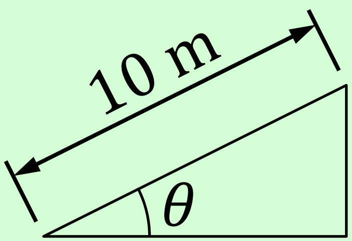
- $\vec{F}$: mencionada en el enunciado.
- $\vec{P}$: peso.
- $\vec{N}$: reacción normal.
- $\vec{F}_r$: fuerza de rozamiento.

Aplicando el teorema de la energía cinética a este cuerpo, supuesto indeformable, entre la situación inicial y tras haber recorrido 10 m, es

$$\Delta E_c = W_{\vec{F}} + W_{\vec{P}} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{F}_r}$$

Vamos a desarrollar los términos de esa expresión.




$$\Delta E_c = \frac{1}{2}3v^2 - \frac{1}{2}3 \times 2^2 = 1{,}5v^2 - 6 \text{ (SI)}$$

$$W_{\vec{F}} = (+F\cos\theta)d = 30\cos 27° \times 10 =$$
$$= 267{,}3 \text{ J}$$

$$W_{\vec{P}} = -\Delta E_{p_p} = -mg\Delta h =$$
$$= -3 \times 9{,}8(+10 \operatorname{sen} 27°) = -133{,}5 \text{ J}$$

$$W_{\vec{N}} = 0 \text{ J}$$

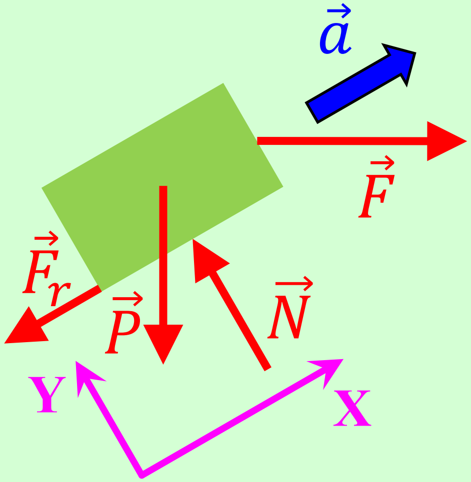
$$W_{\vec{F}_r} = -F_r d$$

Como el bloque está deslizando, $F_r = F_{r_{máx}} = \mu N$

Por tanto, es necesario conocer el módulo de la reacción normal.

Aplicando el teorema del centro de masas,

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r = m\vec{a}$$




Utilizando únicamente la componente Y de la ecuación anterior,

$$F_y + P_y + N_y + F_{r_y} = m a_y$$

$$(-30 \operatorname{sen} 27°) + (-3 \times 9{,}8 \cos 27°) + N + 0 = \\ = m0$$

Por tanto: $N = 39{,}82 \text{ N}$

$$F_r = \mu N = 0{,}2 \times 39{,}82 = 7{,}964 \text{ N}$$

$$W_{\vec{F}_r} = -F_r d = -7{,}964 \times 10 = -79{,}64 \text{ J}$$

Recapitulando:

$$\Delta E_c = W_{\vec{F}} + W_{\vec{P}} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{F}_r}$$

$$\Delta E_c = 1{,}5v^2 - 6 \text{ (SI)}$$

$$W_{\vec{F}} = 267{,}3 \text{ J}$$

$$W_{\vec{P}} = -133{,}5 \text{ J}$$

$$W_{\vec{N}} = 0 \text{ J}$$

$$W_{\vec{F}_r} = -79{,}64 \text{ J}$$

$$1{,}5v^2 - 6 = 267{,}3 + (-133{,}5) +$$
$$+0 + (-79{,}64)$$

$$1{,}5v^2 = 60{,}16$$

$$v = 6{,}332 \text{ m/s}$$

Tarea:

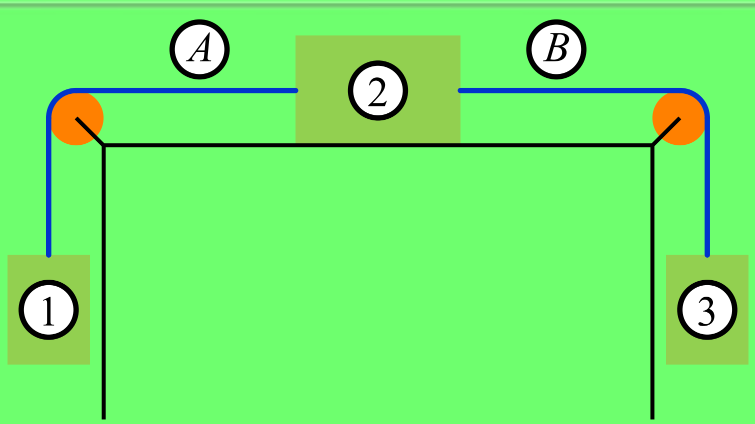
Resuélvase el ejercicio con $F = 22{,}5\ \mathrm{N}$, y compruébese que en tal caso es $v = 0{,}3464\ \mathrm{m/s}$.

Obténgase también:

a) el módulo de la velocidad del bloque tras recorrer $11\ \mathrm{m}$ (resulta $v = \sqrt{-0{,}2667}\ \mathrm{m/s}$, lo que indica que no le es posible llegar allí);

b) la distancia que recorre el bloque hasta detenerse (resultado: $d = 10{,}31\ \mathrm{m}$)

## Ejercicio 6



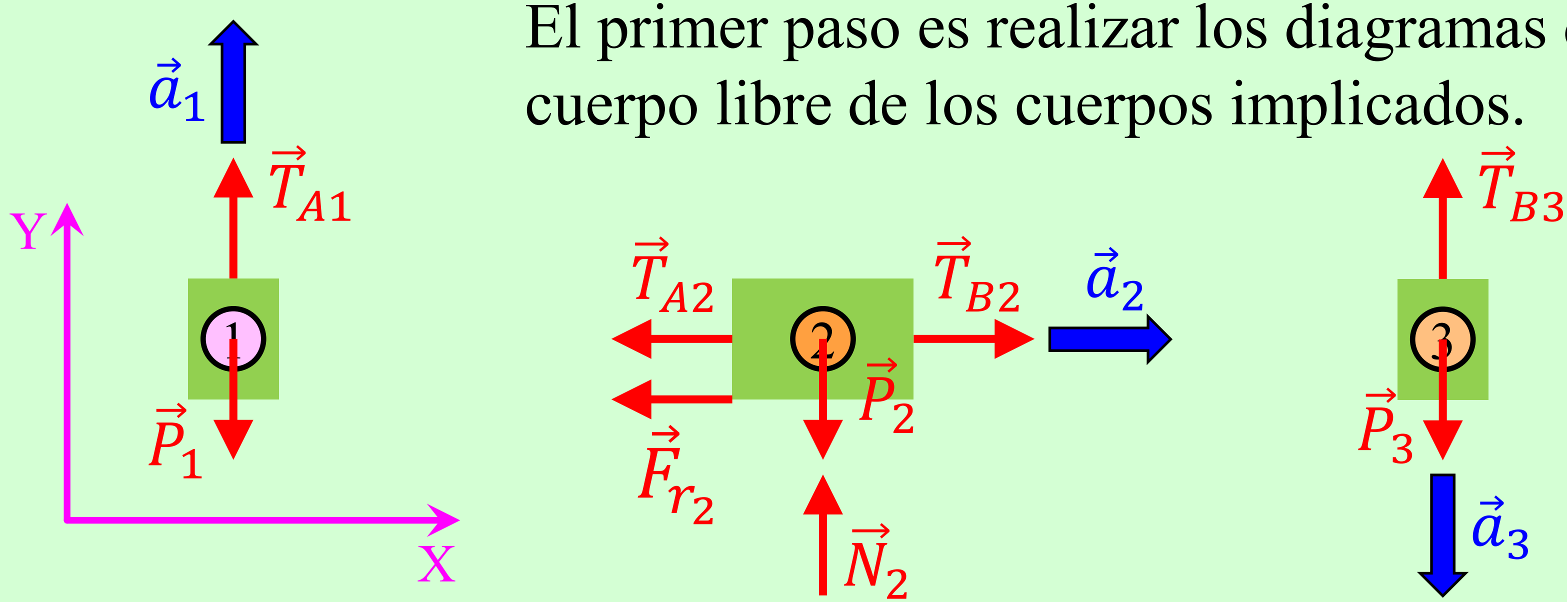

El sistema de la figura se halla inicialmente en reposo. Las masas de los bloques son $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 20$ kg y $m_3 = 20$ kg. El coeficiente de rozamiento entre el bloque 2 y el suelo es $\mu_2 = 0{,}2$. Los hilos y poleas son ideales.

Obténgase los módulos de las tensiones en los dos hilos, $A$ y $B$, y la distancia que debe recorrer el bloque 3 para que el módulo de su velocidad sea $1{,}4\ \mathrm{m/s}$.

Dado que la masa del bloque 3 es mayor que la del bloque 1, hay dos posibilidades: el bloque 3 desciende arrastrando a los otros dos; o el sistema permanece en reposo. Supongamos que se da la primera.

Hipótesis: el bloque 3 desciende.

El primer paso es realizar los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos implicados.




$\vec{P}_1$: peso del bloque 1.

$\vec{T}_{A1}$: fuerza ejercida por el hilo *A* sobre el bloque 1.

$\vec{P}_2$: peso del bloque 2.

$\vec{N}_2$: reacción normal del suelo sobre el bloque 2.

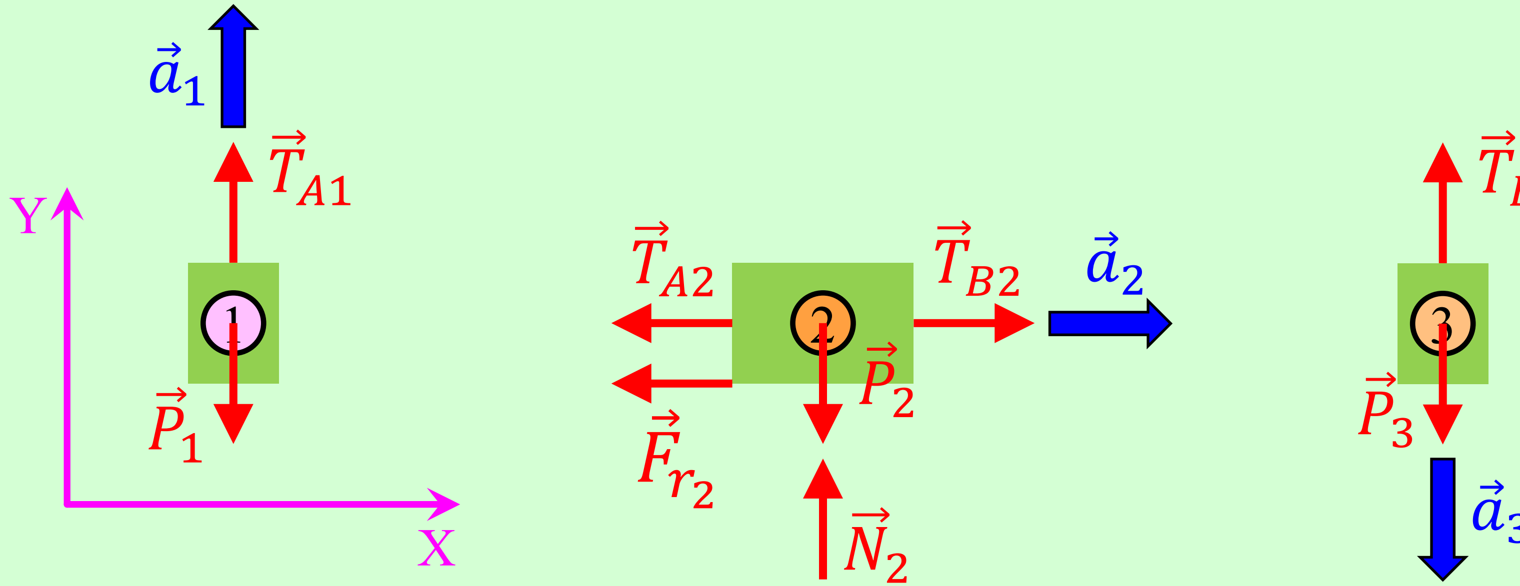
$\vec{F}_{r_2}$: fuerza de rozamiento del suelo sobre el bloque 2.

$\vec{T}_{A2}$: fuerza ejercida por el hilo *A* sobre el bloque 2.

$\vec{T}_{B2}$: fuerza ejercida por el hilo *B* sobre el bloque 2.

$\vec{P}_3$: peso del bloque 3.

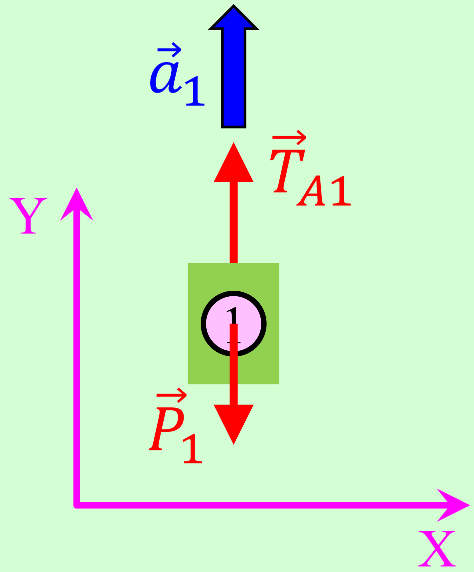
$\vec{T}_{B3}$: fuerza ejercida por el hilo *B* sobre el bloque 3.




Por ser las cuerdas ideales, cuando el módulo de la velocidad del bloque 3 sea $1{,}4\ \mathrm{m/s}$, ese será también el de los otros dos. Además, en ese instante los tres bloques habrán recorrido la misma distancia $d$ por ser los hilos ideales.

Se trata de obtener el valor de $d$, así como los de los módulos $T_A$ (común a $\vec{T}_{A1}$ y $\vec{T}_{A2}$ por ser hilo y polea ideales) y $T_B$ (común a $\vec{T}_{B2}$ y $\vec{T}_{B3}$ por ser hilo y polea ideales).

Para ello, vamos a aplicar el teorema de la energía cinética a cada uno de los tres bloques.




Aplicando el teorema de la energía cinética al bloque 1, supuesto indeformable, entre la situación inicial y tras haber recorrido la distancia $d$, es

$$\Delta E_{c_1} = W_{\vec{P}_1} + W_{\vec{T}_{A1}}$$

Vamos a desarrollar los términos de esa expresión.

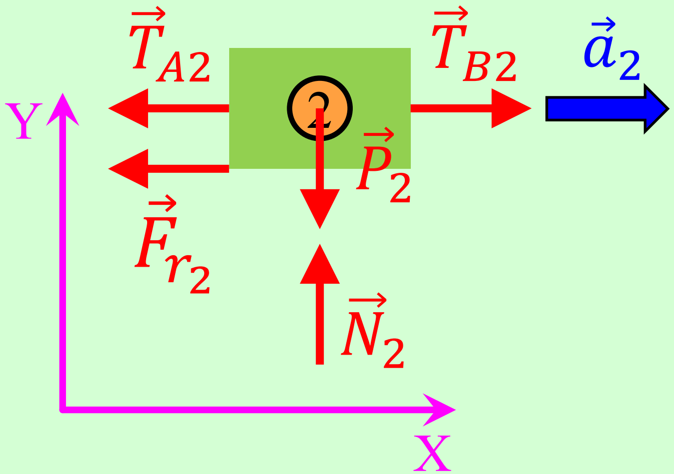
$$\Delta E_{c_1} = \frac{1}{2}8 \times 1{,}4^2 - \frac{1}{2}8 \times 0^2 = 7{,}84 \text{ J}$$

$$W_{\vec{P}_1} = -\Delta E_{p_{P_1}} = -m_1 g \Delta h_1 = -8 \times 9{,}8 \times d = -78{,}4d \text{ (SI)}$$

$$W_{\vec{T}_{A1}} = T_A d$$

Por tanto,

$$\Delta E_{c_1} = W_{\vec{P}_1} + W_{\vec{T}_{A1}} \Rightarrow \boxed{7{,}84 = (-78{,}4d) + T_A d \text{ (SI)}}$$




Aplicando el teorema de la energía cinética al bloque 2, supuesto indeformable, entre las mismas situaciones, es

$$\Delta E_{c_2} = W_{\vec{P}_2} + W_{\vec{N}_2} + W_{\vec{F}_{r_2}} + \\ + W_{\vec{T}_{A2}} + W_{\vec{T}_{B2}}$$

Vamos a desarrollar los términos de esa expresión.

$$\Delta E_{c_2} = \frac{1}{2} 20 \times 1{,}4^2 - \frac{1}{2} 20 \times 0^2 = 19{,}6 \text{ J}$$

$$W_{\vec{P}_2} = -\Delta E_{p_{P_2}} = -m_2 g \Delta h_2 = -20 \times 9{,}8 \times 0 = 0 \text{ J}$$

$$W_{\vec{N}_2} = 0 \text{ J}$$

$$W_{\vec{F}_{r_2}} = -F_{r_2} d$$

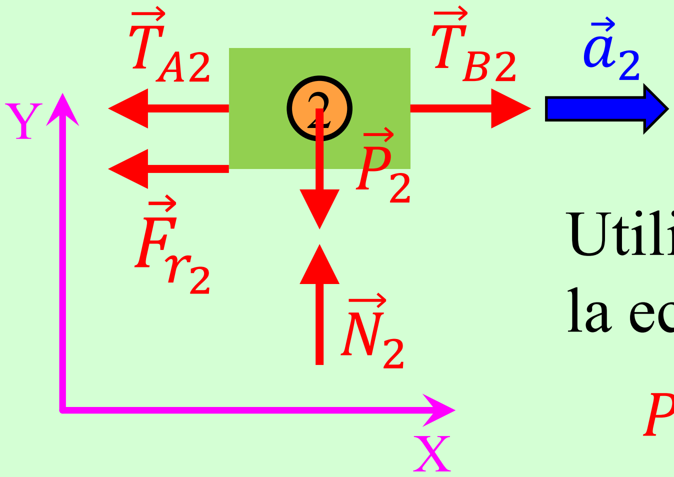
$$W_{\vec{T}_{A2}} = -T_A d$$

$$W_{\vec{T}_{B2}} = T_B d$$

Como el bloque está deslizando,

$$F_{r_2} = F_{r_{2_{máx}}} = \mu_2 N_2$$

Por tanto, es necesario conocer el módulo de la reacción normal.




Aplicando el teorema del centro de masas al bloque 2,

$$\vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{r_2} + \vec{T}_{A2} + \vec{T}_{B2} = m_2\vec{a}_2$$

Utilizando únicamente la componente Y de la ecuación anterior,

$$P_{2_y} + N_{2_y} + F_{r_{2_y}} + T_{A2_y} + T_{B2_y} = m_2 a_{2_y}$$

$$(-20 \times 9{,}8) + N_2 + 0 + 0 + 0 = 20 \times 0$$

Por tanto: $N_2 = 196\ \mathrm{N}$

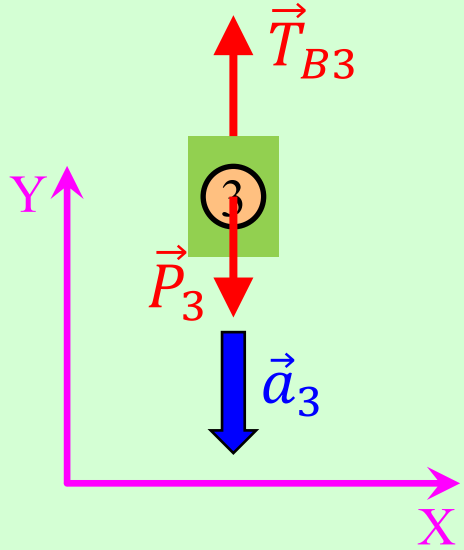
$$F_{r_2} = \mu_2 N_2 = 0{,}2 \times 196 = 39{,}2\ \mathrm{N}$$

$$W_{\vec{F}_{r_2}} = -F_{r_2} d = -39{,}2d\ (\mathrm{SI})$$

Así,

$$\Delta E_{c_2} = W_{\vec{P}_2} + W_{\vec{N}_2} + W_{\vec{F}_{r_2}} + W_{\vec{T}_{A2}} + W_{\vec{T}_{B2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{19{,}6 = 0 + 0 + (-39{,}2d) + (-T_A d) + T_B d\ (\mathrm{SI})}$$




Aplicando el teorema de la energía cinética al bloque 3, supuesto indeformable, entre las mismas situaciones, es

$$\Delta E_{c_1} = W_{\vec{P}_1} + W_{\vec{T}_{B3}}$$

Vamos a desarrollar los términos de esa expresión.

$$\Delta E_{c_3} = \frac{1}{2}20 \times 1{,}4^2 - \frac{1}{2}20 \times 0^2 = 19{,}6\ \mathrm{J}$$

$$W_{\vec{P}_3} = -\Delta E_{p_{P_3}} = -m_3 g \Delta h_3 = -20 \times 9{,}8 \times (-d) = 196d\ (\mathrm{SI})$$

$$W_{\vec{T}_{B3}} = -T_B d$$

Por tanto,

$$\Delta E_{c_3} = W_{\vec{P}_3} + W_{\vec{T}_{B3}} \Rightarrow \boxed{19{,}6 = 196d + (-T_B d)\ (\mathrm{SI})}$$

Recapitulando:

$$7{,}84 = -78{,}4d + T_A d$$

$$19{,}6 = -39{,}2d - T_A d + T_B d$$

$$19{,}6 = 196d - T_B d$$

Tenemos por tanto un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Sumando estas ecuaciones, resulta

$$7{,}84 + 19{,}6 + 19{,}6 = -78{,}4d - 39{,}2d + 196d \Rightarrow$$

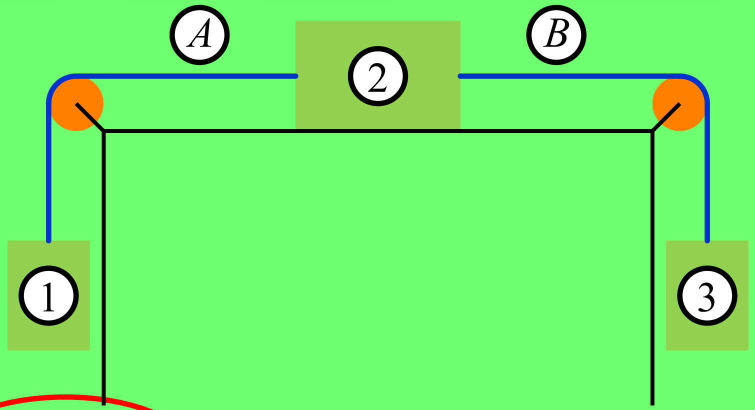
$$47{,}04 = 78{,}4d \Rightarrow d = 0{,}6\ \mathrm{m}$$

A partir de las ecuaciones primera y tercera, se obtiene

$$7{,}84 = -78{,}4 \times 0{,}6 + T_A \times 0{,}6 \Rightarrow T_A = 91{,}47\ \mathrm{N}$$

$$19{,}6 = 196 \times 0{,}6 - T_B \times 0{,}6 \Rightarrow T_B = 163{,}3\ \mathrm{N}$$

# Ejercicio 7




El sistema de la figura se halla inicialmente en reposo. Las masas de los bloques son $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 20$ kg y $m_3 = 20$ kg. El coeficiente de rozamiento entre el bloque 2 y el suelo es $\mu_2 = 0{,}8$. Los hilos y poleas son ideales.

Obténgase los módulos de las tensiones en los dos hilos, $A$ y $B$, y la distancia que debe recorrer el bloque 3 para que el módulo de su velocidad sea $1{,}4\ \mathrm{m/s}$.

Dado que la masa del bloque 3 es mayor que la del bloque 1, hay dos posibles comportamientos: el bloque 3 desciende arrastrando a los otros dos; o el sistema permanece en reposo. Supongamos que se da el primero.

Hipótesis: el bloque 3 desciende.

Repitiendo el desarrollo del ejercicio anterior, el único cambio es el del valor de $\mu_2$, lo que supone las siguientes modificaciones.

$$F_{r_2} = \mu_2 N_2 = 0{,}8 \times 196 = 156{,}8\ \mathrm{N}$$

$$W_{\vec{F}_{r_2}} = -F_{r_2} d = -156{,}8d\ (\mathrm{SI})$$

Así,

$$\Delta E_{c_2} = W_{\vec{P}_2} + W_{\vec{N}_2} + W_{\vec{F}_{r_2}} + W_{\vec{T}_{A2}} + W_{\vec{T}_{B2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 19{,}6 = 0 + 0 + (-156{,}8d) + (-T_A d) + T_B d\ (\mathrm{SI})$$

Esta expresión, junto a las correspondientes a los bloques 1 y 3, que no sufren cambios, proporciona el siguiente sistema de ecuaciones.

$$7{,}84 = -78{,}4d + T_A d$$

$$19{,}6 = -156{,}8d - T_A d + T_B d$$

$$19{,}6 = 196d - T_B d$$

Sumando estas ecuaciones, resulta

$$7{,}84 + 19{,}6 + 19{,}6 = -78{,}4d - 156{,}8d + 196d \Rightarrow$$

$$47{,}04 = -39{,}2d \Rightarrow d = -1{,}2 \text{ m} < 0 \text{ m}$$

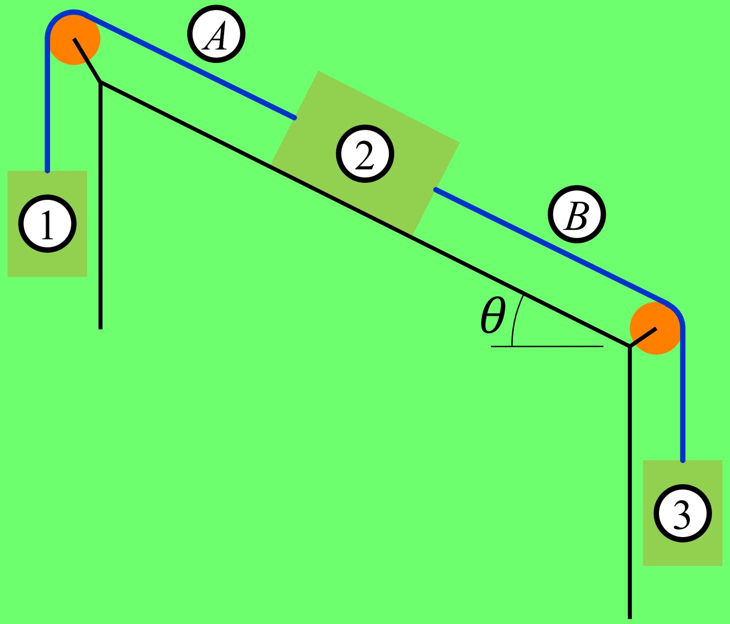
Este resultado carece de sentido.

Conclusión: la hipótesis “el bloque 3 desciende” no es correcta.

Por tanto, el sistema permanece en reposo, y la pregunta sobre la distancia que debe recorrer el bloque 3 para que el módulo de su velocidad sea de $1{,}4 \text{ m/s}$ carece de sentido.

Además, dado que no hay movimiento, no es posible obtener los módulos de las tensiones utilizando el teorema de la energía cinética. Sí es posible resolver el ejercicio utilizando el teorema del centro de masas.

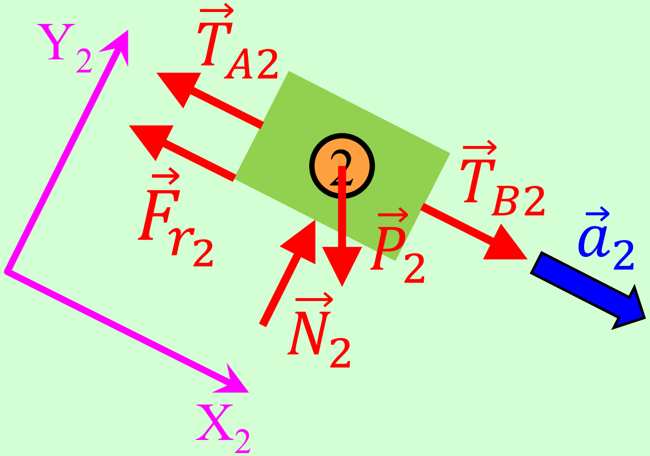
## Ejercicio 8




El sistema de la figura se halla inicialmente en reposo. Las masas de los bloques son $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 20$ kg y $m_3 = 20$ kg. El coeficiente de rozamiento entre el bloque 2 y el suelo es $\mu_2 = 0{,}2$. En el plano inclinado, es $\theta = 26°$. Los hilos y poleas son ideales.

Obténgase los módulos de las tensiones en los dos hilos, $A$ y $B$, y la distancia que debe recorrer el bloque 3 para que el módulo de su velocidad sea $1{,}4\ \mathrm{m/s}$.

El ejercicio es idéntico al 6, salvo porque el bloque 2 se apoya en un plano inclinado. Por tanto, la aplicación del teorema de la energía cinética a los bloques 1 y 3, y las ecuaciones obtenidas, siguen siendo válidas. Veamos qué ocurre con el bloque 2.




Aplicando el teorema de la energía cinética al bloque 2, supuesto indeformable, entre la situación inicial y tras haber recorrido la distancia $d$, es

$$\Delta E_{c_2} = W_{\vec{P}_2} + W_{\vec{N}_2} + W_{\vec{F}_{r_2}} + W_{\vec{T}_{A2}} + W_{\vec{T}_{B2}}$$

Vamos a desarrollar los términos de esa expresión.

$$\Delta E_{c_2} = \frac{1}{2} 20 \times 1{,}4^2 - \frac{1}{2} 20 \times 0^2 = 19{,}6 \text{ J}$$

$$W_{\vec{P}_2} = -\Delta E_{p_{P_2}} = -m_2 g \Delta h_2 = -20 \times 9{,}8(-d \operatorname{sen} 26°) =$$

$$= 85{,}92 d \text{ (SI)}$$

$$W_{\vec{N}_2} = 0 \text{ J}$$

$$W_{\vec{F}_{r_2}} = -F_{r_2} d$$

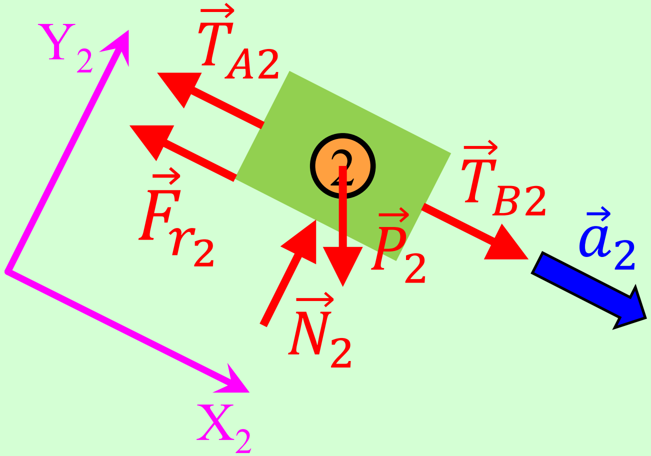
$$W_{\vec{T}_{A2}} = -T_A d$$

$$W_{\vec{T}_{B2}} = T_B d$$

Como el bloque está deslizando,

$$F_{r_2} = F_{r_{2_{máx}}} = \mu_2 N_2$$

Por tanto, es necesario conocer el módulo de la reacción normal.




Aplicando el teorema del centro de masas al bloque 2,

$$\vec{P}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{r_2} + \vec{T}_{A2} + \vec{T}_{B2} = m_2\vec{a}_2$$

Utilizando únicamente la componente Y de la ecuación anterior,

$$P_{2_y} + N_{2_y} + F_{r_{2_y}} + T_{A2_y} + T_{B2_y} = m_2 a_{2_y}$$

$$(-20 \times 9{,}8\cos 26°) + N_2 + 0 + 0 + 0 = 20 \times 0$$

Por tanto: $N_2 = 176{,}2\ \mathrm{N}$

$$F_{r_2} = \mu_2 N_2 = 0{,}2 \times 176{,}2 = 35{,}24\ \mathrm{N}$$

$$W_{\vec{F}_{r_2}} = -F_{r_2} d = -35{,}24 d\ (\mathrm{SI})$$

Así,

$$\Delta E_{c_2} = W_{\vec{P}_2} + W_{\vec{N}_2} + W_{\vec{F}_{r_2}} + W_{\vec{T}_{A2}} + W_{\vec{T}_{B2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{19{,}6 = 85{,}92d + 0 + (-35{,}24d) + (-T_A d) + T_B d\ (\mathrm{SI})}$$

Esta expresión, junto a las correspondientes a los bloques 1 y 3, que no sufren cambios, proporciona el siguiente sistema de ecuaciones.

$$7{,}84 = -78{,}4d + T_A d$$

$$19{,}6 = 85{,}92d - 35{,}24d - T_A d + T_B d$$

$$19{,}6 = 196d - T_B d$$

Sumando estas ecuaciones, resulta

$$7{,}84 + 19{,}6 + 19{,}6 = -78{,}4d + 85{,}92d - 35{,}24d + 196d \Rightarrow$$

$$47{,}04 = 168{,}3d \Rightarrow d = 0{,}2795 \text{ m}$$

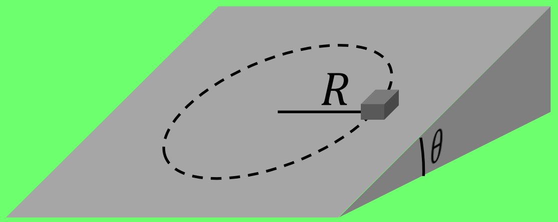
A partir de las ecuaciones primera y tercera, se obtiene

$$7{,}84 = -78{,}4 \times 0{,}2795 + T_A \times 0{,}2795 \Rightarrow T_A = 106{,}5 \text{ N}$$

$$19{,}6 = 196 \times 0{,}2795 - T_B \times 0{,}2795 \Rightarrow T_B = 125{,}9 \text{ N}$$

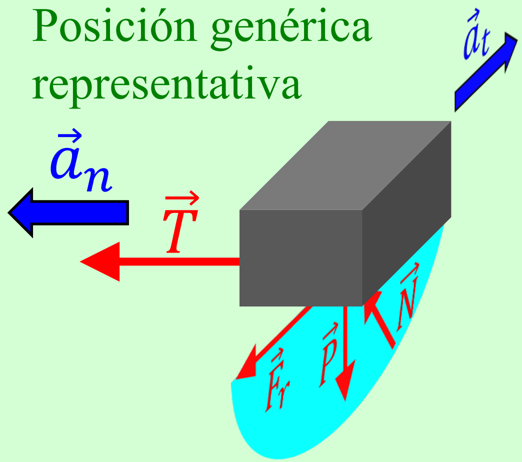
# Ejercicio 9

Un bloque de 2 kg está sujeto por una cuerda ideal al centro de un plano inclinado un ángulo $\theta = 30°$ con respecto a la horizontal, y describe una trayectoria circular de radio $R = 1$ m sobre dicho plano.




Calcúlese la energía cinética perdida por el bloque al pasar del punto más bajo al más alto, si el coeficiente de rozamiento es $\mu = 0{,}25$.

El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del bloque.




Las fuerzas que actúan sobre el bloque son:

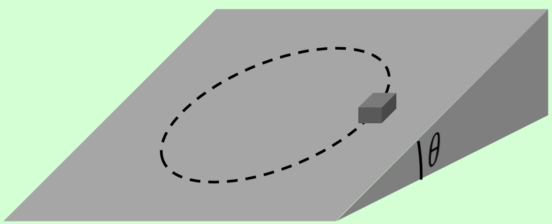
$\vec{P}$: peso.

$\vec{N}$: reacción normal.

$\vec{F}_r$: fuerza de rozamiento.

$\vec{T}$: fuerza ejercida por la cuerda.

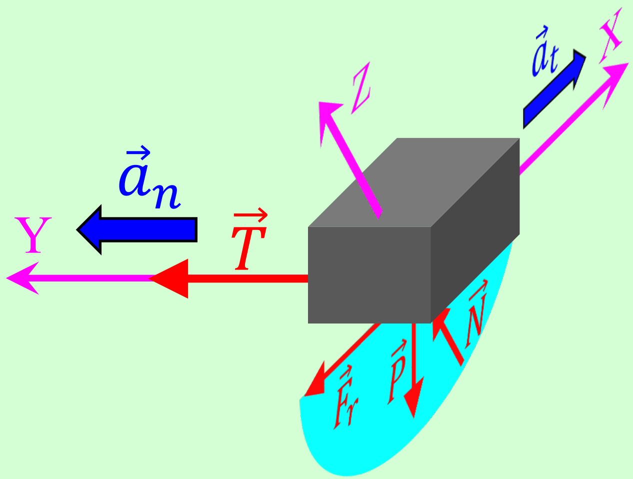
Como consecuencia de la acción de estas fuerzas, el bloque tiene una aceleración tangencial $\vec{a}_t$, y una aceleración normal $\vec{a}_n$.




Se intuye lo complejo que es analizar este movimiento mediante el teorema del centro de masas, ya que las fuerzas y las aceleraciones van cambiando de orientación, y varias de ellas también de módulo.

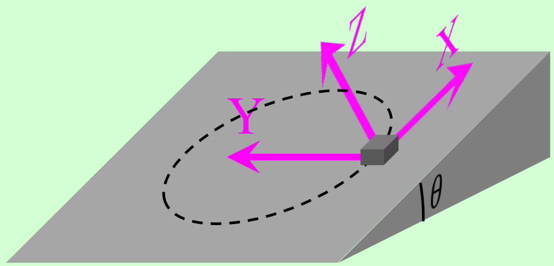
Aplicando el teorema de la energía cinética al bloque, supuesto inde-formable, entre el punto más bajo y el más alto de su trayectoria, es

$$\Delta E_c = W_{\vec{P}} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{F}_r} + W_{\vec{T}}$$




Para poder conocer el módulo de la reacción normal, necesitamos aplicar el teorema del centro de masas.

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r + \vec{T} = m\vec{a} = m(\vec{a}_t + \vec{a}_n)$$




Sea el sistema de referencia mostrado en las figuras. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación anterior,

$$P_z + N_z + F_{r_z} + T_z = m\left(a_{t_z} + a_{n_z}\right)$$

$$(-2 \times 9{,}8\cos 30°) + N + 0 + 0 = m(0 + 0)$$

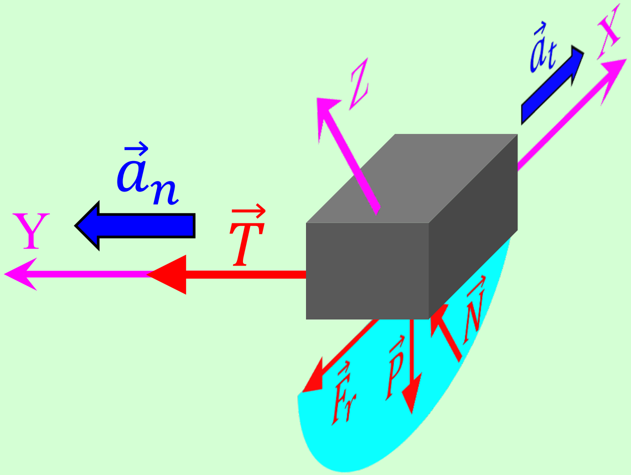
Por tanto,

$$N = 16{,}97\ \mathrm{N}$$

Como el bloque está deslizando,

$$F_r = F_{r\,máx} = \mu N = 0{,}25 \times 16{,}97 = 4{,}243\ \mathrm{N}$$

Vamos a desarrollar los términos de $\Delta E_c = W_{\vec{P}} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{F}_r} + W_{\vec{T}}$.



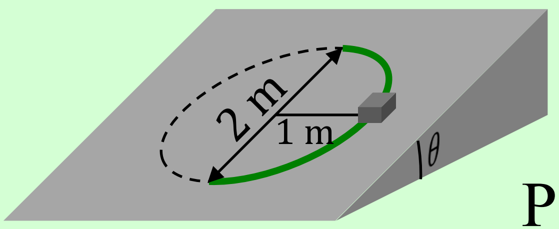

$\Delta E_c$ es lo que queremos averiguar.

$$W_{\vec{P}} = -\Delta E_{p_p} = -mg\Delta h =$$
$$= -2 \times 9{,}8(+2\,\mathrm{sen}\,30°) = -19{,}6\ \mathrm{J}$$

$$W_{\vec{N}} = 0\ \mathrm{J}$$

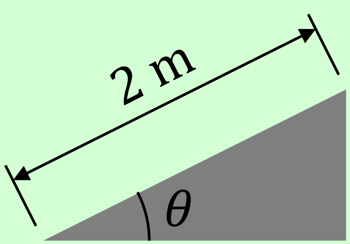
$$W_{\vec{F}_r} = -F_r L = -4{,}243(\pi \times 1) = -13{,}33\ \mathrm{J}$$

$$W_{\vec{T}} = 0\ \mathrm{J}$$



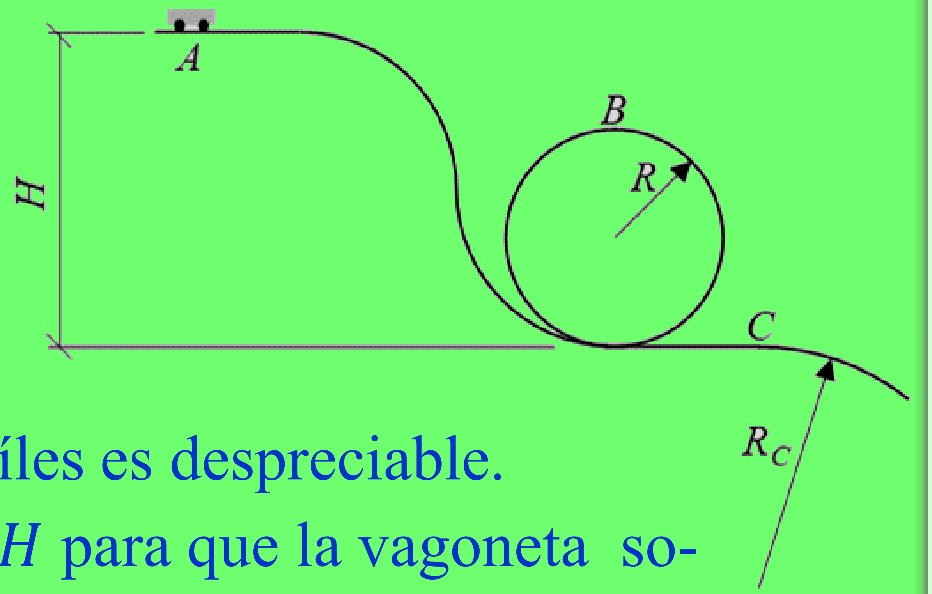

Por tanto,

$$\Delta E_c = W_{\vec{P}} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{F}_r} + W_{\vec{T}} =$$
$$= (-19{,}6) + 0 + (-13{,}33) + 0 =$$
$$= -32{,}93\ \mathrm{J}$$




La energía cinética perdida es 32,93 J.

# Ejercicio 10




Una vagoneta de masa $m$, que asumimos puntual, tras partir del reposo sigue el perfil de la montaña rusa de la figura. La fricción entre la vagoneta y los raíles es despreciable.

a) Determínese la altura mínima $H$ para que la vagoneta sobrepase el punto $B$, superior del tramo circular de radio $R = 5$ m. Hállese también el módulo de la velocidad de la vagoneta al llegar al punto $B$ en esta situación.

b) Si $H = 15$ m, determínese el módulo de la velocidad de la vagoneta en el punto $B$ y en el punto $C$.

c) Determínese el radio $R_C$ mínimo de la parte curva final para que la vagoneta no pierda contacto con los raíles en el punto $C$, inicio de la curva.

a) Dado que la fricción es despreciable, las únicas fuerzas que actúan sobre la vagoneta son su peso $\vec{P} = m\vec{g}$ y la reacción normal $\vec{N}$.

Aplicando el teorema de la energía cinética a la vagoneta, supuesta puntual, entre dos puntos cualesquiera 1 y 2, es

$$\Delta E_c = W_{\vec{P}} + W_{\vec{N}}$$

Vamos a desarrollar los términos de esa expresión.

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

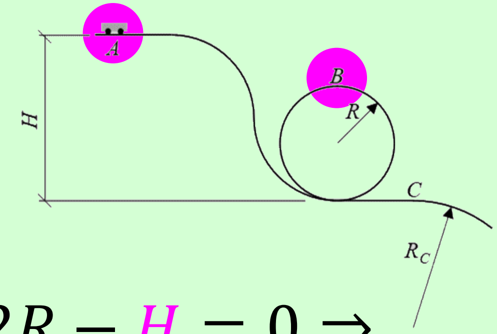
$$W_{\vec{P}} = -\Delta E_{p_p} = -mg\Delta h$$

$$W_{\vec{N}} = 0 \text{ J}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = (-mg\Delta h) + 0 \Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = -2g\Delta h \quad (1)$$

Si la vagoneta estuviera enlazada a los raíles (como en una montaña rusa), bastaría llegar a $B$ con velocidad nula.




Aplicando entonces la ecuación (1) entre $A$ y $B$,

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = 0 \ \mathrm{m/s} \\ v_2 = 0 \ \mathrm{m/s} \\ \Delta h = 2R - H \end{array}\right\} \Rightarrow 0^2 - 0^2 = -2g(2R - H) \Rightarrow 2R - H = 0 \Rightarrow$$

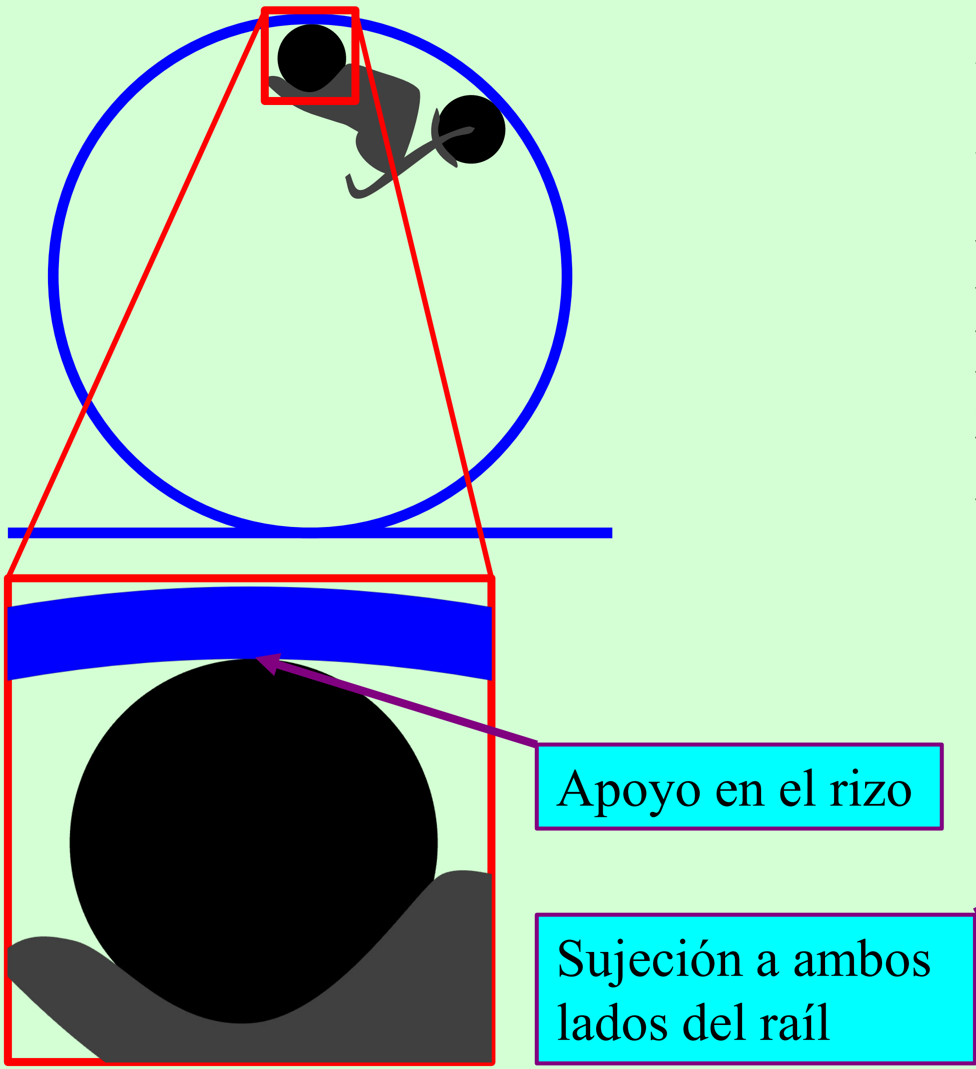
$$\Rightarrow H = 2R = 2 \times 5 = 10 \ \mathrm{m}$$

Sin embargo, la vagoneta está simplemente apoyada en los raíles (como una motocicleta en un rizo), por lo que la respuesta no es válida.

Para percibir la diferencia entre enlace y apoyo, puede utilizarse el laboratorio virtual *“Visualizador del movimiento de un punto material en un bucle”*.

https://riunet.upv.es/handle/10251/105936

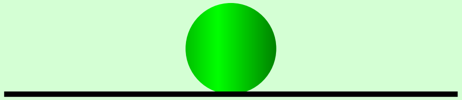
# Motocicleta en rizo



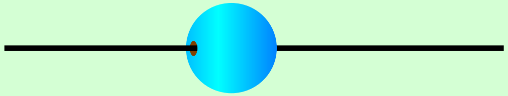

# Vagoneta de montaña rusa

Phantasia Land Colorado Adventure (Germany). Fuente: Smaugboy14, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons

Otro ejemplo: canica.



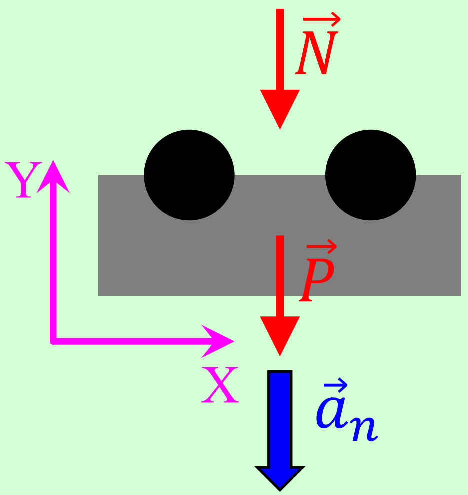
Otro ejemplo: cuenta de collar.

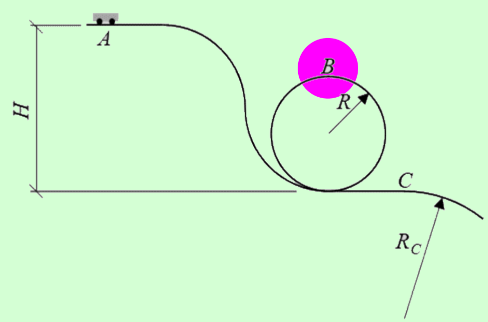


¿Qué se requiere para que un móvil que recorre un bucle consiga llegar al punto más alto del mismo?

- Si el móvil está enlazado a la pista, basta que no se pare durante el ascenso. Por ello, la condición límite es que en el punto más alto el módulo de la velocidad sea cero.
- Si el móvil está apoyado en la pista, se requiere que durante el ascenso exista reacción normal dirigida de la pista a dicho móvil. Por ello, la condición límite es que en el punto más alto el módulo de la reacción normal sea cero.

Vamos a realizar el diagrama de cuerpo libre de la vagoneta cuando esta se halla en el punto $B$, el más alto del bucle.




Aplicando el teorema del centro de masas,

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Utilizando únicamente la componente Y de la ecuación anterior,

$$P_y + N_y = ma_y$$

$$(-mg) + (-N) = m(-a_n) = m\left(-\frac{v^2}{R}\right)$$

$$N = m\frac{v^2}{R} - mg$$

Nótese que si fuera $v = 0$, el resultado sería $N = -mg < 0$. Esto significa que la reacción normal requerida debería tener sentido contrario, con la pista reteniendo a la vagonera. Esto es posible si la vagoneta está enlazada, pero no si está simplemente apoyada.

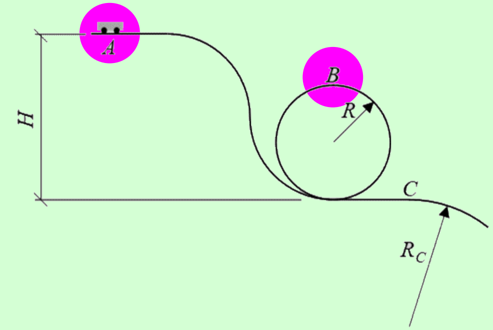
En nuestro caso, la vagoneta está simplemente apoyada, por lo que se requiere que

$$N \geq 0 \Rightarrow m\frac{v^2}{R} - mg \geq 0 \Rightarrow m\frac{v^2}{R} \geq mg \Rightarrow \frac{v^2}{R} \geq g \Rightarrow v \geq \sqrt{gR}$$

Para sobrepasar el punto $B$, la vagoneta ha de alcanzarlo con una velocidad cuyo módulo sea como mínimo

$$v_{mín} = \sqrt{gR} = \sqrt{9{,}8 \times 5} = 7\ \mathrm{m/s}$$

Aplicando ahora la ecuación (1) entre $A$ y $B$, es



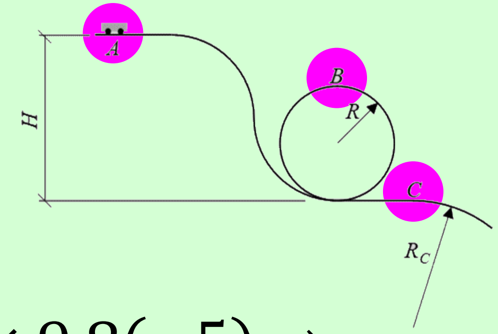

$$v_2^2 - v_1^2 = -2g\Delta h$$

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = 0\ \mathrm{m/s} \\ v_2 = 7\ \mathrm{m/s} \\ \Delta h = 2R - H \end{array}\right\} \Rightarrow 7^2 - 0^2 = -2 \times 9{,}8(2 \times 5 - H) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49 = -19{,}6(10 - H) \Rightarrow 10 - H = 2{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = 12{,}5\ \mathrm{m}$$

**b)** En el caso de que sea $H = 15$ m, aplicando la ecuación (1) entre $A$ y $B$ resulta




$$v_2^2 - v_1^2 = -2g\Delta h$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= 0\ \mathrm{m/s} \\ v_2 &= v_B \\ \Delta h &= 2R - H = \\ &= 2 \times 5 - 15 = -5\ \mathrm{m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_B^2 - 0^2 = -2 \times 9{,}8(-5) \Rightarrow$$

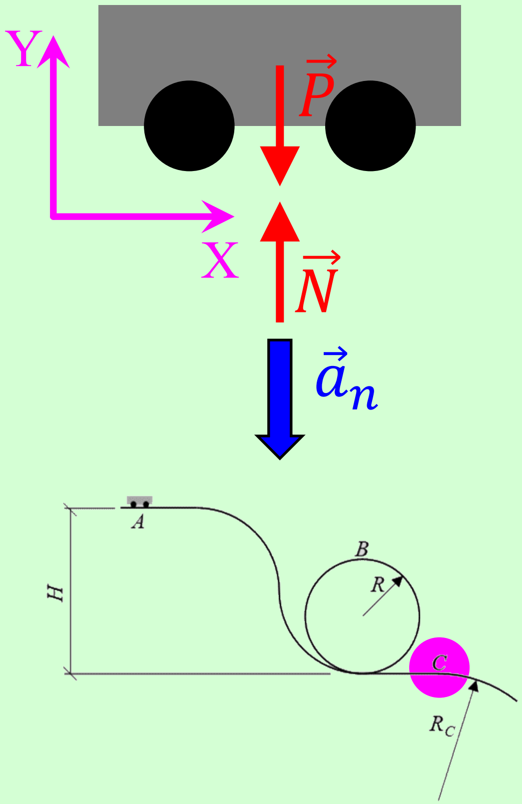
$$\Rightarrow v_B^2 = 98 \Rightarrow v_B = 9{,}899\ \mathrm{m/s}$$

Aplicando ahora la ecuación (1) entre $A$ y $C$, resulta

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= 0\ \mathrm{m/s} \\ v_2 &= v_C \\ \Delta h &= -H = -15\ \mathrm{m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_C^2 - 0^2 = -2 \times 9{,}8(-15) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_C^2 = 294 \Rightarrow v_C = 17{,}15\ \mathrm{m/s}$$

c) Vamos a realizar el diagrama de cuerpo libre de la vagoneta cuando esta se halla en el punto $C$.




Aplicando el teorema del centro de masas,

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Utilizando únicamente la componente Y de la ecuación anterior,

$$P_y + N_y = ma_y$$

$$(-mg) + N = m(-a_n) = m\left(-\frac{v^2}{R_C}\right)$$

$$N = mg - m\frac{v^2}{R_C}$$

Nótese que no es la misma expresión que para el punto $B$. En el punto $C$, el problema no se da si la vagoneta va demasiado despacio, sino si lo hace demasiado deprisa resultando $N < 0$.

Para que la vagoneta no pierda contacto con los raíles, se requiere que

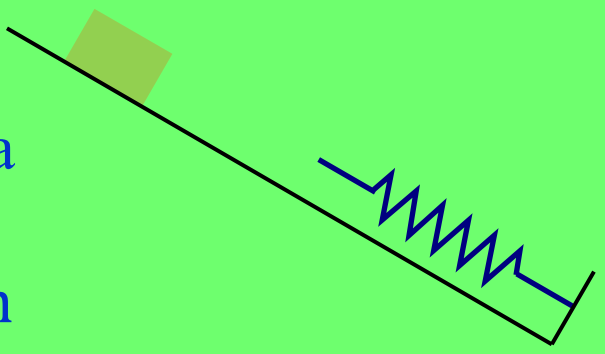
$$N \geq 0 \Rightarrow mg - m\frac{v^2}{R_C} \geq 0 \Rightarrow m\frac{v^2}{R_C} \leq mg \Rightarrow \frac{v^2}{R_C} \leq g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 \leq gR_C \Rightarrow R_C \geq \frac{v^2}{g} = \frac{17{,}15^2}{9{,}8} = 30{,}0\ \mathrm{m}$$

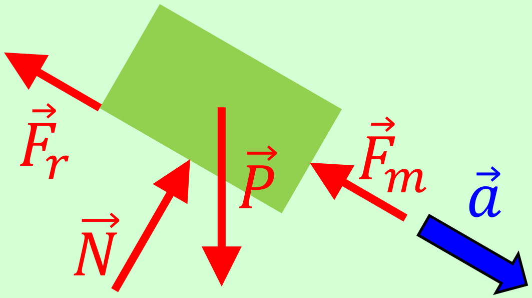
Por tanto, el radio ha de ser como mínimo de 30,0 m.

# Ejercicio 11

Un bloque de masa $m = 2$ kg, inicialmente en reposo, comienza a descender por un plano inclinado un ángulo $\theta = 30°$ respecto a la horizontal, con el que tiene un coeficiente de rozamiento $\mu = 0{,}2$. Después recorrer 3 m entra en contacto con un muelle de constante elástica $k = 2000\,\mathrm{N/m}$. ¿Cuánto llegará a contraerse dicho muelle?



El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, el bloque en este caso.




Las fuerzas que actúan sobre el bloque son:

$\vec{P}$: peso.

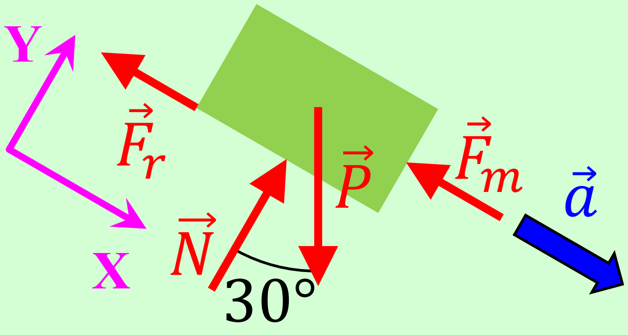
$\vec{N}$: reacción normal.

$\vec{F}_r$: fuerza de rozamiento.

$\vec{F}_m$: fuerza ejercida por el muelle.

Aplicando el teorema de la energía cinética a este cuerpo, supuesto indeformable, entre la situación inicial y la de máxima compresión del muelle, es

$$\Delta E_c = W_{\vec{P}} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{F}_r} + W_{\vec{F}_m}$$




Para poder conocer el módulo de la reacción normal, necesitamos aplicar el teorema del centro de masas.

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r + \vec{F}_m = m\vec{a}$$

Utilizando únicamente la componente Y de la ecuación anterior,

$$P_y + N_y + F_{r_y} + F_{m_y} = ma_y$$

$$(-2 \times 9{,}8 \cos 30°) + N + 0 + 0 = m0$$

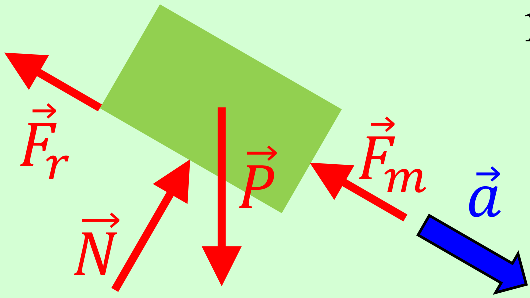
Por tanto,

$$N = 16{,}97 \text{ N}$$

Como el bloque está deslizando,

$$F_r = F_{r_{máx}} = \mu N = 0{,}2 \times 16{,}97 = 3{,}394 \text{ N}$$

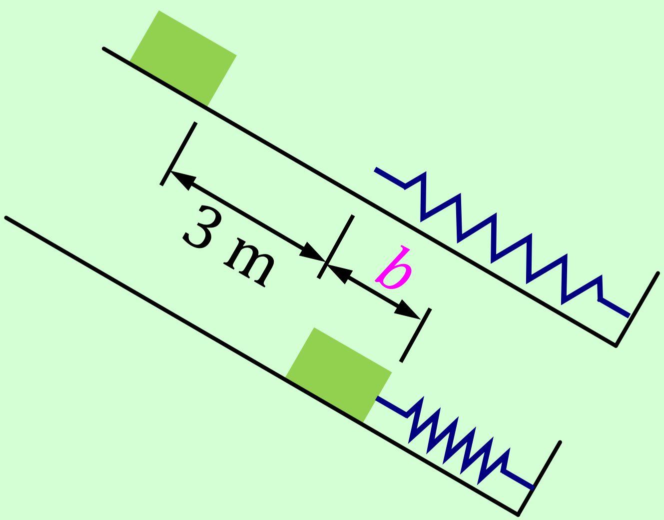
Vamos a desarrollar los términos de $\Delta E_c = W_{\vec{P}} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{F}_r} + W_{\vec{F}_m}$.




Denominando $b$ a la contracción máxima del muelle, con la que el bloque se detiene, es

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} 2 \times 0^2 - \frac{1}{2} 2 \times 0^2 = 0 \text{ J}$$

$$W_{\vec{P}} = -\Delta E_{p_p} = -mg\Delta h =$$
$$= -2 \times 9{,}8[-(3 + b) \operatorname{sen} 30°] =$$
$$= 29{,}4 + 9{,}8b \text{ (SI)}$$




$$W_{\vec{N}} = 0 \text{ J}$$

$$W_{\vec{F}_r} = -F_r d = -3{,}394(3 + b) =$$
$$= -10{,}18 - 3{,}394b \text{ (SI)}$$

$$W_{\vec{F}_m} = -\Delta E_{p_m} =$$
$$= -\left[\frac{1}{2} 2000 \times (-b)^2 - \frac{1}{2} 2000 \times 0^2\right] =$$
$$= -1000b^2 \text{ (SI)}$$

Recapitulando:

$$\Delta E_c = W_{\vec{P}} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{F}_r} + W_{\vec{F}_m}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta E_c = 0 \text{ J} \\ W_{\vec{P}} = 29{,}4 + 9{,}8b \text{ (SI)} \\ W_{\vec{N}} = 0 \text{ J} \\ W_{\vec{F}_r} = -10{,}18 - 3{,}394b \text{ (SI)} \\ W_{\vec{F}_m} = -1000b^2 \text{ (SI)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 = (29{,}4 + 9{,}8b) + 0 + (-10{,}18 - 3{,}394b) + (-1000b^2)$$

$$1000b^2 - 6{,}406b - 19{,}22 = 0 \left\{\begin{array}{l} \cancel{b = -0{,}1355 \text{ m}} \\ b = 0{,}1419 \text{ m} \end{array}\right.$$

En este caso no tiene sentido que el muelle se comprima una cantidad negativa (no confundir $b$ con $\Delta L$).

# Energía mecánica

Se denomina energía mecánica de un sistema de puntos materiales, a la suma de su energía cinética más las energías potenciales de todas las fuerzas conservativas que actúan sobre él.

$$\boxed{E = E_c + \sum E_{p_i}}$$

# Energía mecánica

Consideremos un cuerpo sobre el que actúan:

- unas fuerzas conservativas $\vec{F}_{c_1}$, $\vec{F}_{c_2}$, …, que realizan unos trabajos $W_{c_1}$, $W_{c_2}$, …
- unas fuerzas no conservativas $\vec{F}_{nc_1}$, $\vec{F}_{nc_2}$, …, que realizan unos trabajos $W_{nc_1}$, $W_{nc_2}$, …

De acuerdo con el teorema de la energía cinética, y sabiendo que el trabajo de una fuerza conservativa es igual a la disminución de su energía potencial asociada, resulta

$$\begin{aligned}\Delta E_c &= W_{c_1} + W_{c_2} + \cdots + W_{nc_1} + W_{nc_2} + \cdots = \\ &= \left(-\Delta E_{p_1}\right) + \left(-\Delta E_{p_2}\right) + \cdots + W_{nc_1} + W_{nc_2} + \cdots\end{aligned}$$

# Energía mecánica

Por tanto,

$$W_{nc_1} + W_{nc_2} + \cdots = \Delta E_c + \Delta E_{p_1} + \Delta E_{p_2} + \cdots =$$
$$= \Delta\left(E_c + E_{p_1} + E_{p_2} + \cdots\right)$$

Representando por $W_{nc}$ el trabajo total de las fuerzas no conservativas (tanto exteriores como interiores) que actúan sobre el sistema, resulta

$$\boxed{W_{nc} = \Delta E}$$

# Energía mecánica

El trabajo total de las fuerzas no conservativas, exteriores e interiores, que actúan sobre un sistema de puntos materiales, es igual al incremento de su energía mecánica.

El trabajo total de las fuerzas no conservativas exteriores que actúan sobre un cuerpo indeformable (o, al menos, que no se deforma), es igual al incremento de su energía mecánica.

Si el trabajo total de las fuerzas no conservativas que actúan sobre un sistema de puntos materiales es cero, la energía mecánica del mismo permanece constante.