FÍSICA TÉCNICA

Estática

V. 1.00.00

Marcos H. Giménez
Isabel Salinas
Vanesa P. Cuenca
Juan A. Monsoriu

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

ETSI Aeroespacial y Diseño Industrial

Créditos

Título:
Física Técnica

Subtítulo:
Estática

Autores:
Marcos H. Giménez, Isabel Salinas, Vanesa P. Cuenca y Juan A. Monsoriu

Editorial:
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeroespacial y Diseño Industrial

Valencia 2024

ISBN: 978-84-09-58860-2
Versión digital

Índice

Pulsando sobre el número de una página, se regresa a este índice.

Índice (ejercicios)

Ejercicio 1

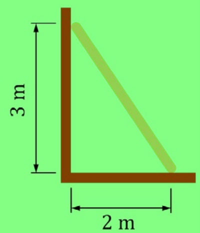
Sobre un punto material actúan las fuerzas $\vec{F}_1 = (1; 0; -3)$ N, $\vec{F}_2 = (-5; 3; 2)$ N y $\vec{F}_3 = (0; 2; 6)$ N. ¿Qué fuerza $\vec{F}_4$ hay que añadir para que dicho punto esté en equilibrio?

Ejercicio 2

Un punto material se encuentra en un campo de fuerzas cuya expresión es $\vec{F} = (x^2 - 4;\ 2y + 2; x + y + z)$ (SI). ¿Cuáles son, si existen, sus posiciones de equilibrio?

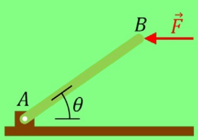
Ejercicio 3

Una escalera, de peso de módulo 210 N, se encuentra en equilibrio apoyada en el suelo y en una pared, tal y como muestra la figura. Entre la escalera y la pared no existe rozamiento. ¿Cuáles son las fuerzas que ejercen la pared y el suelo sobre la escalera? ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento mínimo que debe existir entre escalera y suelo para que no haya deslizamiento?



Ejercicio 4

Una barra, de 1,8 m de longitud y peso de módulo 300 N, tiene un extremo articulado a un punto fijo A. Sobre su otro extremo B se aplica una fuerza horizontal, de módulo $F = 200$ N, tal y como muestra la figura. ¿Para qué valor del ángulo θ se encuentra la barra en equilibrio? En esa posición, ¿cuál es la fuerza ejercida sobre la barra en la articulación?



Ejercicio 5

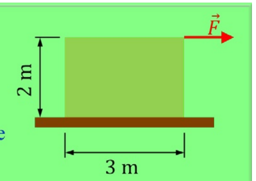
Una esfera rígida, menos densa que el agua, está sumergida en ella y unida al fondo mediante un muelle traccionado. Dicha esfera se encuentra en equilibrio. ¿Es este estable, inestable o indiferente?

Ejercicio 6

Una pelota compresible (a mayor presión, menor volumen) se encuentra en equilibrio sumergida en agua. ¿Es este estable, inestable o indiferente?

Ejercicio 7

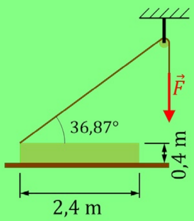
El bloque de la figura tiene un peso de módulo 6000 N, y su coeficiente de rozamiento con el suelo horizontal es prácticamente infinito. Se tira del bloque con una fuerza $\vec{F}$ aplicada en el punto que se indica.



a) ¿En qué punto actúa la reacción normal si $F = 1500$ N?
b) ¿En qué punto actúa la reacción normal si $F = 4800$ N?
c) ¿Para qué valor de F es inminente el vuelco?
d) Si el coeficiente de rozamiento fuera 0,2, ¿estaría el bloque en equilibrio para $F = 1500$ N?
e) Si el coeficiente de rozamiento fuera 0,2, ¿para qué valor de F sería inminente el desequilibrio?

Ejercicio 8

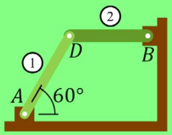
Una columna tiene un peso de módulo 7700 N, y se encuentra tumbada sobre el suelo horizontal, con el que tiene un coeficiente de rozamiento prácticamente infinito. Para alzarla se dispone un cable ideal anclado en el punto mostrado en la figura. El cable pasa por una polea ideal, y se va a tirar de su otro extremo con una fuerza $\vec{F}$.



¿Qué valor ha de superar F para que la columna comience a alzarse? ¿Cuáles son los módulos de la reacción normal y de la fuerza de rozamiento cuando ese comienzo es inminente?

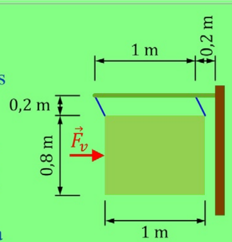
Ejercicio 9

Sea el sistema de la figura, donde las barras están articuladas entre sí en el punto D, y a sendos puntos fijos A y B. La barra 1 tiene 1,8 m de longitud y peso de módulo 300 N. Los correspondientes valores de la barra 2 son 1,5 m y 200 N. ¿Qué fuerzas se ejercen sobre estas barras en las articulaciones?



Ejercicio 10

Sea el sistema de la figura, donde un cartel está colgando, mediante dos cables ideales, de una barra horizontal empotrada en una pared. Los módulos de los pesos del cartel y de la barra son 200 N y 50 N, respectivamente. Sobre el cartel actúa un viento cuya acción equivale a una fuerza $\vec{F}_v$ horizontal hacia la derecha de módulo 72,79 N, aplicada en el punto medio del borde izquierdo.



a) Analizando el cartel obténgase, en el estado de equilibrio, los módulos T_i y T_d de las tensiones en los cables izquierdo y derecho, respectivamente, y el ángulo θ que estos forman con la vertical.
b) Analizando la barra obténgase, en el estado de equilibrio, la fuerza y el momento a los que equivale el sistema de fuerzas que actúan en el empotramiento.

Equilibrio

La estática es la rama de la Física que trata de los cuerpos en equilibrio.

Se denomina equilibrio al estado que poseen los cuerpos cuando sobre ellos actúa un sistema de fuerzas nulo.

Sistema de fuerzas nulo

Recordemos que se denomina sistema nulo de vectores deslizantes al que es equivalente a un sistema de cero vectores.

Así, un sistema nulo de fuerzas es el que equivale a un sistema de cero fuerzas.

En consecuencia, tanto su resultante como su campo de momentos son nulos: $\vec{R} = \vec{0}\,;\ \ \vec{M}_P = \vec{0}\ \ \forall P.$

Sin embargo, en virtud de la ecuación del campo de momentos ($\vec{M}_A = \vec{M}_B + \overrightarrow{AB} \times \vec{R}$), son condiciones suficientes (y también necesarias) que su resultante y su momento respecto a un punto cualquiera sean $\vec{0}$, ya que así cualquier otro momento será también nulo.

Clases de equilibrio

Importante: equilibrio no implica necesariamente reposo.

El equilibrio implica que el sistema de fuerzas actuante es nulo. De acuerdo con la primera ley de Newton, esto significa que el cuerpo permanece en su estado inicial de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme.

Además, un cuerpo sobre el que actúa un sistema de fuerzas no nulo parece estar en equilibrio desde el punto de vista de un observador ligado a dicho cuerpo. En este caso, sí sería un sistema nulo el constituido por el conjunto de las fuerzas reales más las de inercia.

Clases de equilibrio

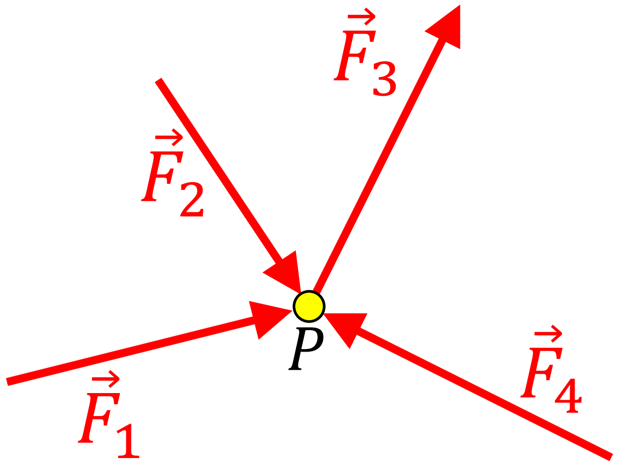
Se puede hablar así de tres clases de equilibrio.

- Equilibrio estático: el cuerpo está en reposo.
- Equilibrio cinético: el cuerpo está en movimiento rec-tilíneo uniforme.
- Equilibrio dinámico: el sistema de fuerzas que actúa sobre el cuerpo no es nulo, pero sí lo es el constituido por las fuerzas reales más las de inercia.

En lo que sigue nos limitaremos a estudiar el equilibrio estático.

Equilibrio de un punto material

Todas las fuerzas que actúan sobre un punto material tienen líneas de acción que pasan por él.

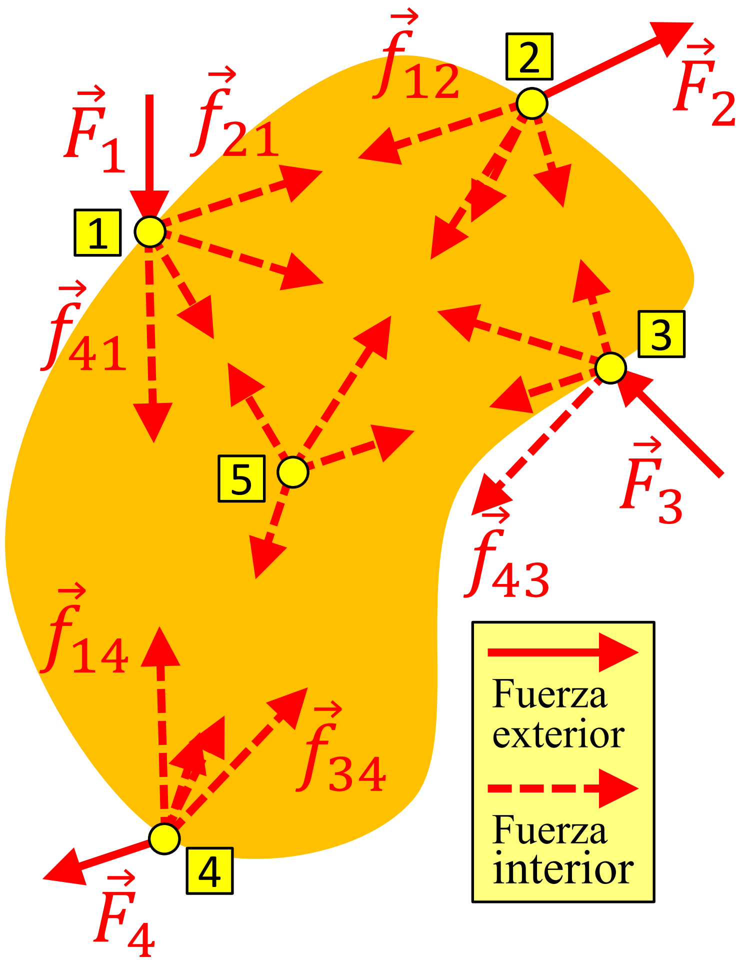


Por tanto, sus momentos respecto a la posición del punto son nulos, y también lo es su suma.

Así pues, la condición de que exista un punto respecto al que el momento del sistema de fuerzas sea nulo se cumple de partida. Se llega así a la siguiente conclusión.

- Para que un punto material esté en equilibrio, es condición necesaria y suficiente que la resultante de las fuerzas que actúan sobre él sea cero.

Equilibrio de un sistema



¿Y qué ocurre en el caso de un sistema de puntos materiales?

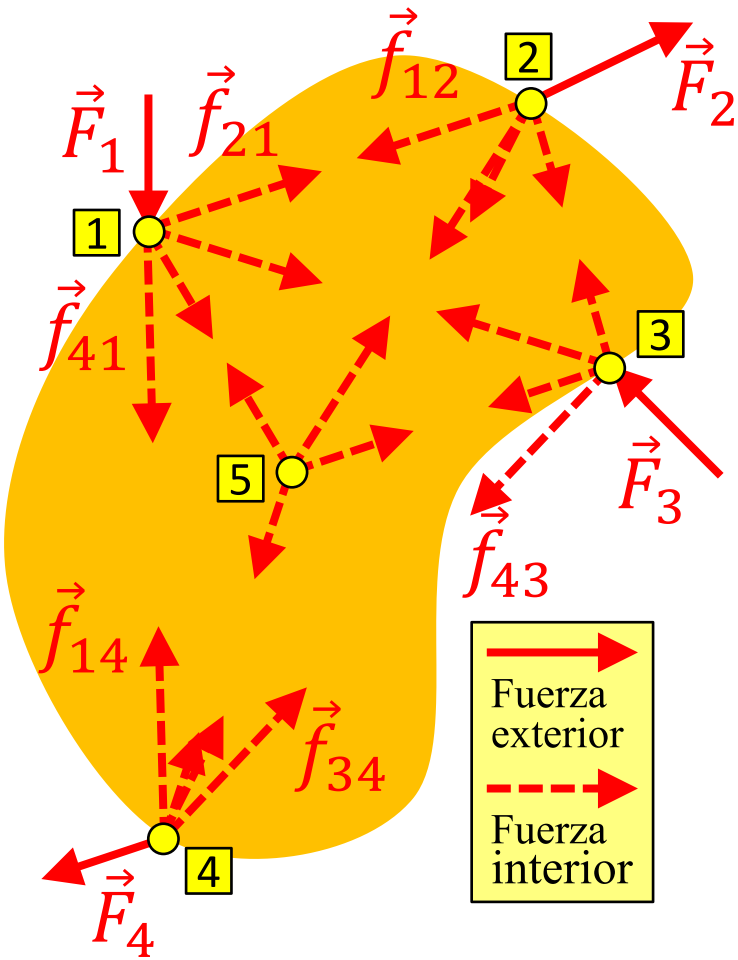
Notación

$\vec{F}_i$: fuerza neta exterior que actúa sobre el punto i.

$\vec{f}_{ji}$: fuerza interior ejercida por el punto j sobre el i.

Por claridad, la figura solo muestra algunas fuerzas exteriores y parejas de interiores. En realidad hay que tener en cuenta todos los puntos del sistema, las fuerzas que actúan sobre ellos, y las que se ejercen mutuamente. Basta considerar $\vec{0}$ aquellas fuerzas que no estén realmente presentes.

Equilibrio de un sistema

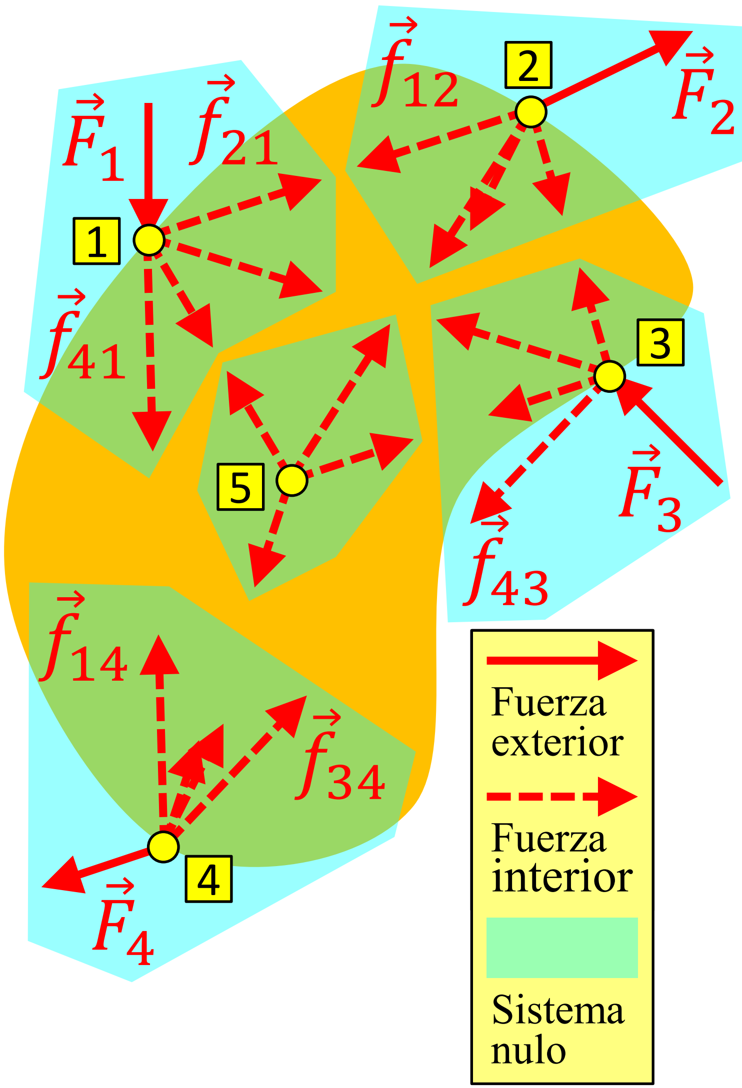


Para que un sistema de puntos materiales esté en equilibrio, ha de estarlo cada uno de los puntos que lo constituyen.

Por tanto, es condición necesaria y suficiente que, para cada punto, la resultante de las fuerzas que actúan sobre él sea cero.

Esto supone un enorme número de ecuaciones, y una gran complejidad, dado que se ha de incluir las fuerzas mutuas entre puntos del sistema.

Equilibrio de un sistema

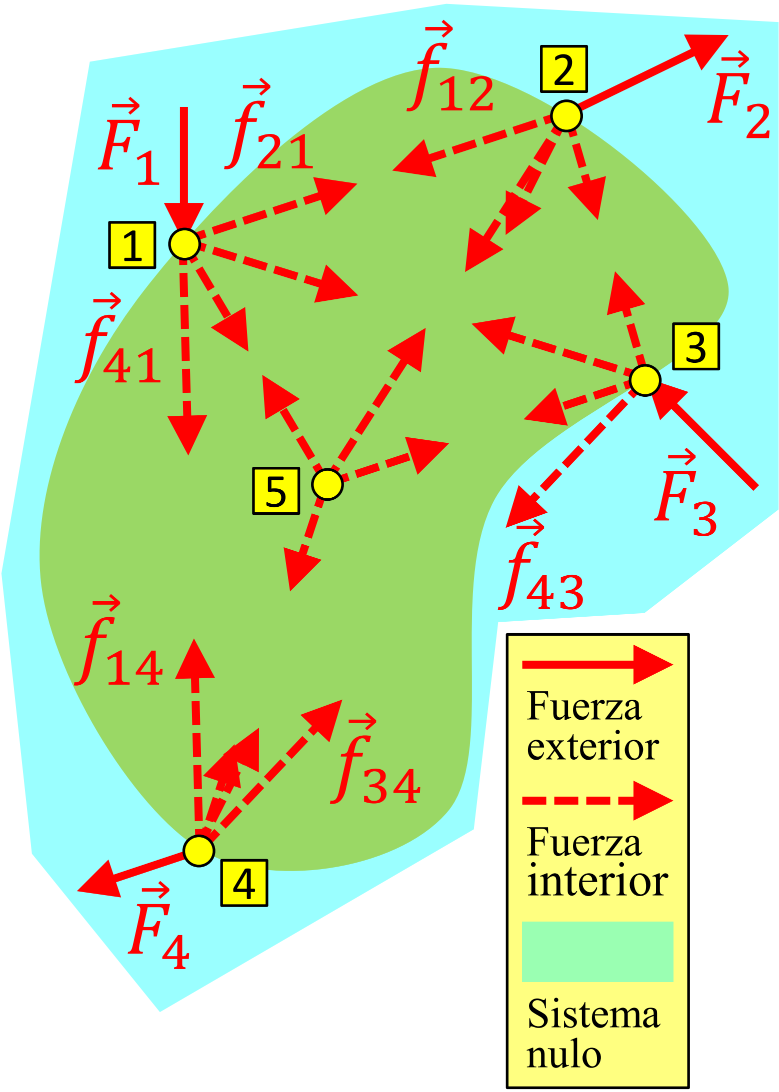


Vamos a buscar una alternativa.

Sea el conjunto de todas las fuerzas exteriores e interiores que actúan sobre los puntos del sistema.

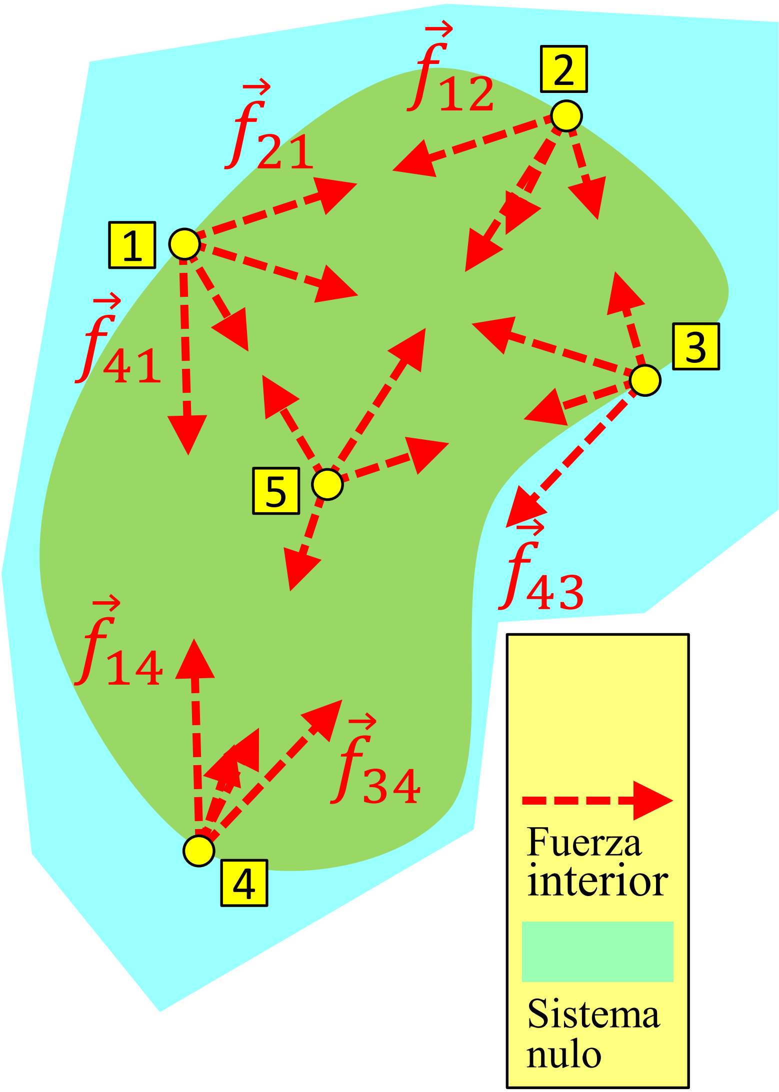
Puesto que cada punto está en equilibrio, el conjunto de fuerzas que actúa sobre él es un sistema nulo.

Equilibrio de un sistema



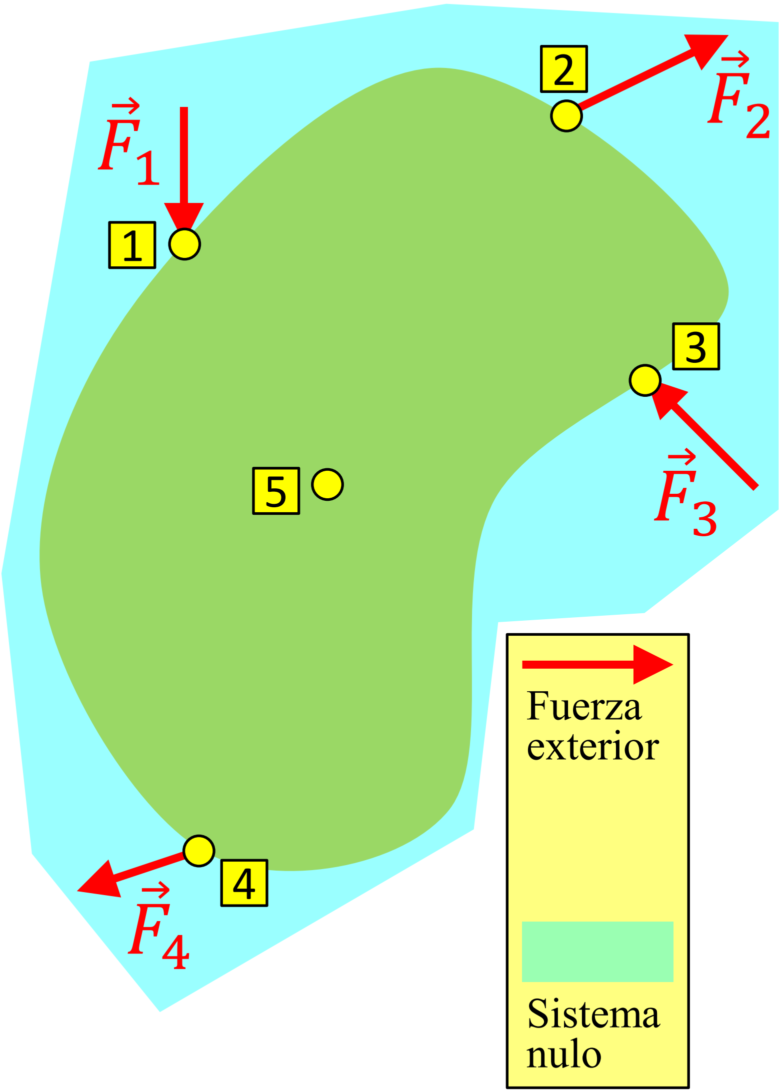
Por tanto, el conjunto de todos estos conjuntos también es un sistema nulo.

Equilibrio de un sistema



Sabemos que el conjunto de todas las fuerzas interiores tiene resultante y momentos nulos. Por tanto, es un sistema nulo.

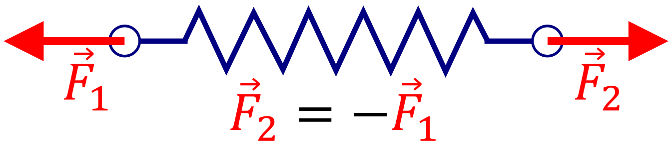
Equilibrio de un sistema



Dado que el conjunto de todas las fuerzas, tanto interiores como exteriores también es nulo, esto implica que el de solo las fuerzas exteriores también lo es.

Sin embargo, aunque esta es una condición necesaria, <u>en general no es suficiente</u>.

Como ejemplo, considérese un muelle con su longitud natural. Dos fuerzas opuestas en sus extremos, como las de la figura, constituyen un sistema nulo. Sin embargo, el muelle no está en equilibrio: va a comenzar a alargarse.



Equilibrio de un sistema

Vamos a recapitular.

- Para que un sistema de puntos materiales esté en equilibrio, es condición necesaria y suficiente que la resultante de las fuerzas que actúan sobre cada punto sea cero.

- Para que un sistema de puntos materiales esté en equilibrio, es condición necesaria, pero en general no suficiente, que el conjunto de fuerzas exteriores que actúan sobre él sea un sistema nulo.

Equilibrio de un sólido rígido

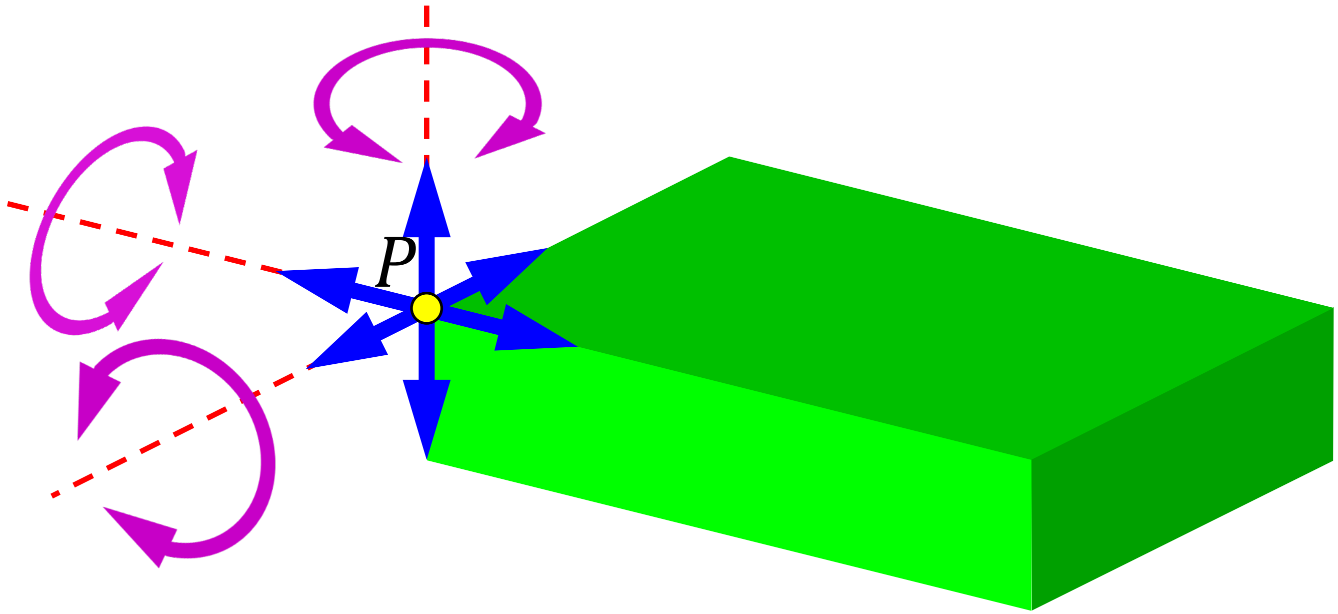
En general, conocer la posición de un sistema de puntos materiales supone conocer la de cada uno de esos puntos.

En un sólido rígido, las distancias mutuas de los puntos materiales permanecen constantes. Esto hace que las posiciones de esos puntos estén relacionadas, y la posición del sólido quede determinada por tan solo seis parámetros.

En concreto, basta conocer la posición de uno de los puntos del sólido (tres parámetros), y la orientación de este respecto a dicho punto (otros tres).

Equilibrio de un sólido rígido

Como ejemplo, considérese el sólido rígido de la figura, su punto P, y los tres ejes rojos. El desplazamiento del sólido será siempre una combinación de seis posibilidades: tres desplazamientos que aparecen en azul, y tres giros mostrados en violeta. Con las tres coordenadas de P y los tres ángulos respecto a los ejes, la posición del sólido queda determinada.



Equilibrio de un sólido rígido

Que la resultante de las fuerzas exteriores sea nula supone tres condiciones, una por cada componente (X, Y, Z) en el sistema de referencia utilizado.

De igual forma, que el momento de dichas fuerzas respecto a un punto sea nulo, supone a su vez tres condiciones, una por cada componente,

Así pues, el número de condiciones (seis) coincide con el de parámetros de la posición del sólido rígido (seis).

Equilibrio de un sólido rígido

Se llega así a la siguiente conclusión.

- Para que un sólido rígido esté en equilibrio, es condición necesaria, y también suficiente, que el conjunto de fuerzas exteriores que actúan sobre él sea un sistema nulo.

Por tanto, basta que sean $\vec{0}$ su resultante y su momento respecto a un punto cualquiera, ya que así cualquier otro momento será también nulo.

Equilibrio de un sólido rígido

Aunque hay varias variantes de problemas resolubles con las ecuaciones de la Estática, las más habituales son las siguientes.

- Sabiendo que un sistema está en equilibrio, se quiere conocer qué fuerzas están actuando sobre él. De los ejemplos que siguen, el 1 y el 3 son de este tipo.
- Conociendo las fuerzas que actúan sobre un sistema, o una cantidad suficiente de ellas, se quiere determinar cuáles son las posiciones de equilibrio. De los ejemplos que siguen, el 2 y el 4 son de este tipo.

Ejercicio 1

Sobre un punto material actúan las fuerzas $\vec{F}_1 = (1; 0; -3)$ N, $\vec{F}_2 = (-5; 3; 2)$ N y $\vec{F}_3 = (0; 2; 6)$ N. ¿Qué fuerza $\vec{F}_4$ hay que añadir para que dicho punto esté en equilibrio?

Para que el punto material esté en equilibrio, la resultante de las fuerzas que actúan sobre él ha de ser cero. Por tanto,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0}$$

$$(1; 0; -3) + (-5; 3; 2) + (0; 2; 6) + \vec{F}_4 = \vec{0}$$

$$(-4; 5; 5) + \vec{F}_4 = \vec{0}$$

$$\vec{F}_4 = (4; -5; -5)\ \mathrm{N}$$

Ejercicio 2

Un punto material se encuentra en un campo de fuerzas cuya expresión es $\vec{F} = (x^2 - 4;\ 2y + 2; x + y + z)$ (SI). ¿Cuáles son, si existen, sus posiciones de equilibrio?

Para que el punto material esté en equilibrio, la resultante de las fuerzas que actúan sobre él ha de ser cero. Puesto que solo actúa $\vec{F}$,

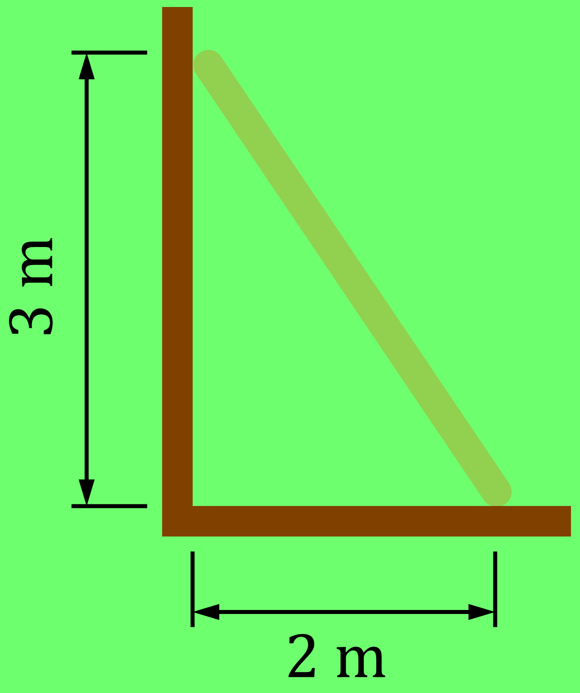
$$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow (x^2 - 4;\ 2y + 2; x + y + z) = (0; 0; 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2\ \mathrm{m} \\ x = -2\ \mathrm{m} \end{cases} \\ 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1\ \mathrm{m} \\ x + y + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Para } x = 2\ \mathrm{m}\text{:}\ \ 2 + (-1) + z = 0 \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow z = -1\ \mathrm{m} \\ \text{Para } x = -2\ \mathrm{m}\text{:}\ \ (-2) + (-1) + z = 0 \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow z = 3\ \mathrm{m} \end{cases} \end{cases}$$

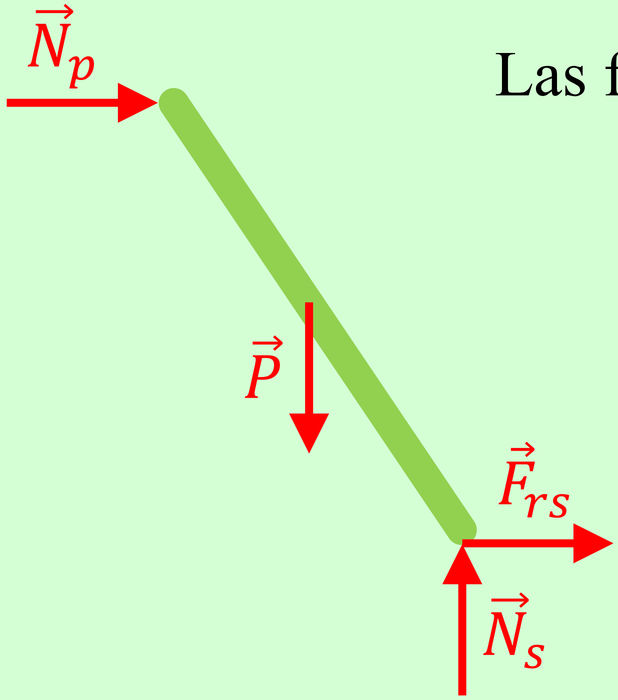
Las posiciones de equilibrio son $(2; -1; -1)$ m y $(-2; -1; 3)$ m.

Ejercicio 3

Una barra, de peso de módulo 210 N, se encuentra en equilibrio apoyada en el suelo y en una pared, tal y como muestra la figura. Entre la escalera y la pared no existe rozamiento. ¿Cuáles son las fuerzas que ejercen la pared y el suelo sobre la escalera? ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento mínimo que debe existir entre escalera y suelo para que no haya deslizamiento?



El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, la escalera en este caso.



Las fuerzas que actúan sobre la escalera son:

$\vec{P}$: peso de la escalera.

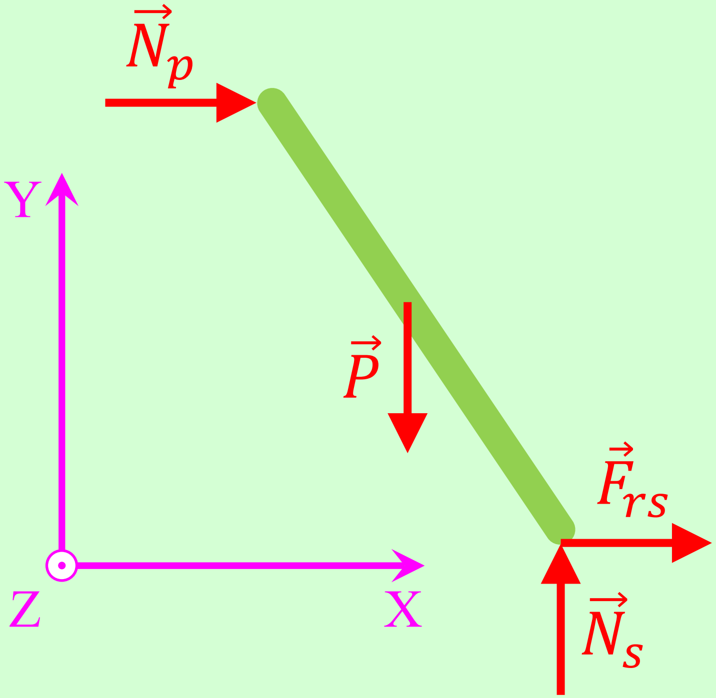
$\vec{N}_s$: reacción normal del suelo sobre la escalera.

$\vec{F}_{rs}$: fuerza de rozamiento del suelo sobre la escalera.

$\vec{N}_p$: reacción normal de la pared sobre la escalera.

Como consecuencia de la acción de estas fuerzas, la escalera está en equilibrio.

Hay que establecer un sistema de referencia dextrógiro, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.



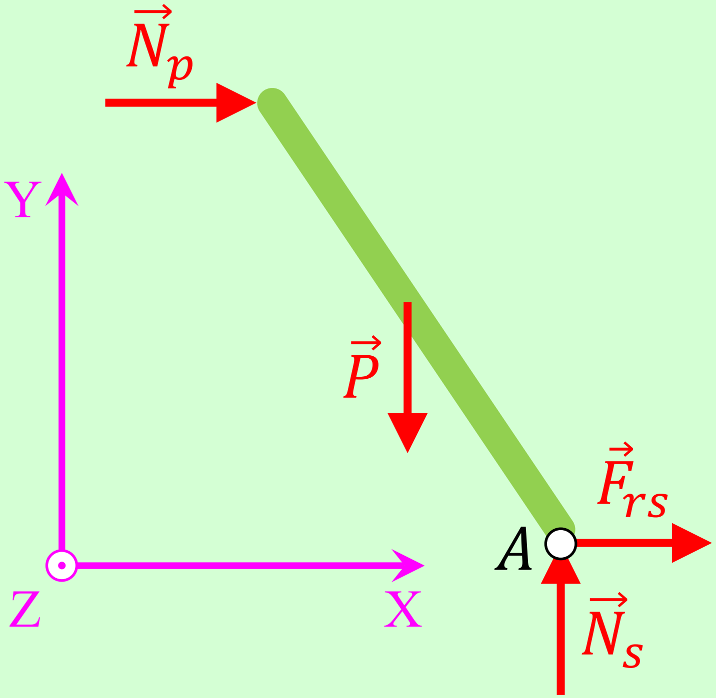
De $\vec{P}$ se conocen su módulo y orientación.

De $\vec{N}_s$ y $\vec{N}_p$ se conocen sus orientaciones, pero no sus módulos, N_s y N_p.

De $\vec{F}_{rs}$ se conoce su dirección, pero no su módulo ni su sentido. Por tanto, se desconoce su componente X, F_{rs_x},aunque sí se sabe que la Y y la Z son 0.

Por tanto, tenemos 3 incógnitas: N_s, N_p y F_{rs_x}. Necesitamos pues 3 ecuaciones.

Aplicando las condiciones de equilibrio, y utilizando para los momentos el punto A (elección arbitraria), es



$$\vec{P} + \vec{N}_s + \vec{F}_{rs} + \vec{N}_p = \vec{0}$$

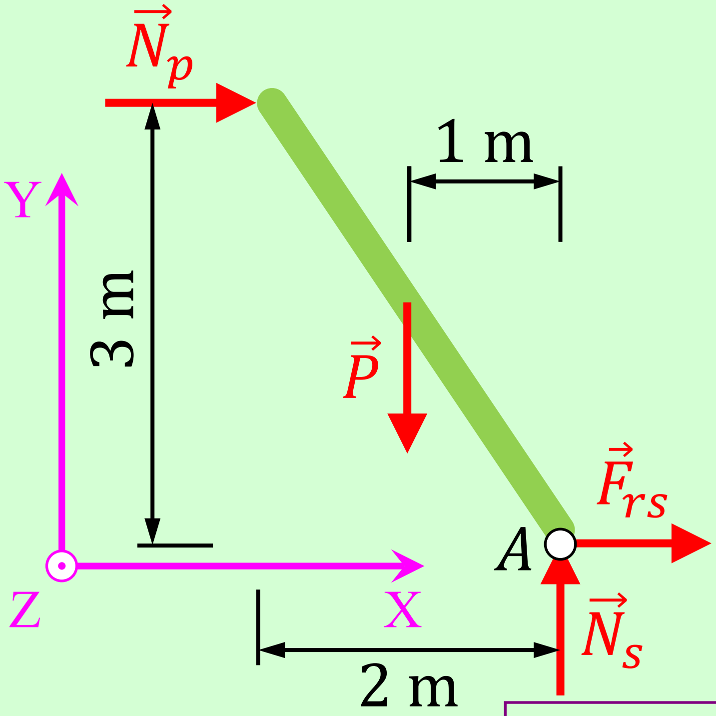
$$A \Rightarrow \vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{N}_s} + \vec{M}_{\vec{F}_{rs}} + \vec{M}_{\vec{N}_p} = \vec{0}$$

De la primera expresión, resulta

$$(0; -210; 0) + (0; N_s; 0) + \left(N_p; 0; 0\right) + \\ +\left(F_{rs_x}; 0; 0\right) = (0; 0; 0)$$

$$\begin{cases} N_p + F_{rs_x} = 0 \\ -210 + N_s = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Todos los momentos respecto al punto A tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación



$$\vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{N}_s} + \vec{M}_{\vec{F}_{rs}} + \vec{M}_{\vec{N}_p} = \vec{0}$$

resulta

$$210 \times 1 + 0 + 0 + \left(-N_p \times 3\right) = 0$$

Fuerzas de brazo 0 m.

- Fuerza de módulo 210 N.
- Brazo 1 m.
- Sentido hacia fuera del plano de la página.

- Fuerza de módulo N_p.
- Brazo 3 m.
- Sentido hacia dentro del plano de la página.

Por tanto, $210 - 3N_p = 0$

Nótese que, aunque se puede utilizar cualquier punto para los momentos, una elección adecuada permite obtener una ecuación más sencilla.

$$\begin{cases} N_p + F_{rs_x} = 0 \\ -210 + N_s = 0 \\ 210 - 3N_p = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene

$$N_s = 210 \text{ N} \Rightarrow \vec{N}_s = (0; N_s; 0) = (0; 210; 0) \text{ N}$$

$$N_p = 70 \text{ N} \Rightarrow \vec{N}_p = \left(N_p; 0; 0\right) = (70; 0; 0) \text{ N}$$

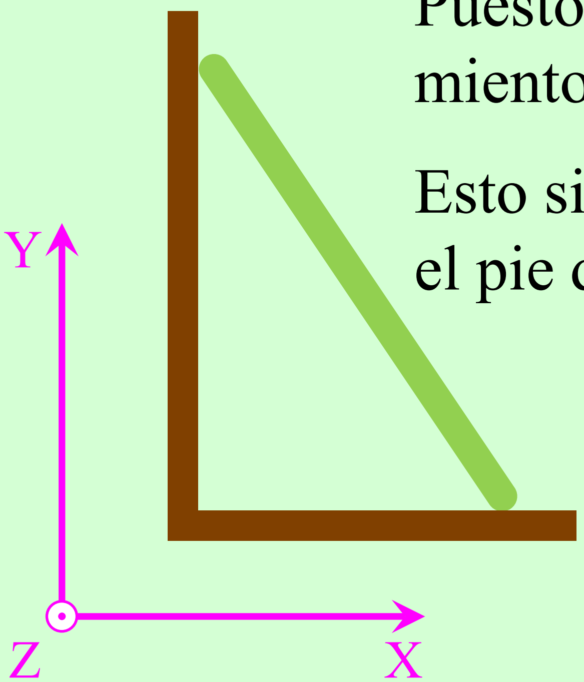
$$F_{rs_x} = -70 \text{ N} \Rightarrow \vec{F}_{rs} = \left(F_{rs_x};\ 0; 0\right) = (-70; 0; 0) \text{ N}$$

Por tanto, la fuerza que ejerce la pared sobre la escalera es

$$\vec{N}_p = (70; 0; 0) \text{ N}$$

Por su parte, la fuerza que ejerce el suelo sobre la escalera es

$$\vec{N}_s + \vec{F}_{rs} = (0; 210; 0) + (-70; 0; 0) = (-70; 210; 0) \text{ N}$$



Puesto que es $\vec{F}_{rs} = (-70; 0; 0)$ N, la fuerza de rozamiento se dirige hacia la izquierda en la figura.

Esto significa que, si el rozamiento no fuera suficiente, el pie de la escalera deslizaría hacia la derecha.

Para que no haya deslizamiento, ha de cumplirse que

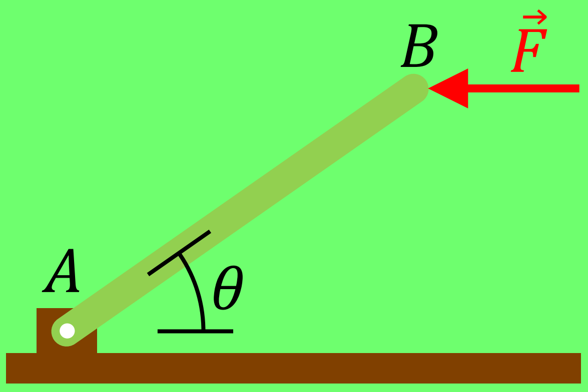
$$F_{rs} \leq F_{rs_{máx}} = \mu N_s \Rightarrow 70 \leq \mu 210 \Rightarrow 0{,}3333 \leq \mu$$

Por tanto, el coeficiente de rozamiento mínimo que se requiere es

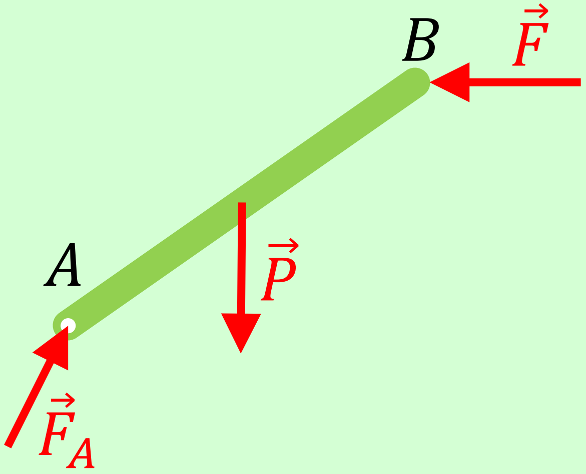
$$\mu_{mín} = 0{,}3333$$

Ejercicio 4

Una barra, de 1,8 m de longitud y peso de módulo 300 N, tiene un extremo articulado a un punto fijo A. Sobre su otro extremo B se aplica una fuerza horizontal, de módulo $F = 200$ N, tal y como muestra la figura. ¿Para qué valor del ángulo θ se encuentra la barra en equilibrio? En esa posición, ¿cuál es la fuerza ejercida sobre la barra en la articulación?



El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, la barra en este caso.



Las fuerzas que actúan sobre la barra son:

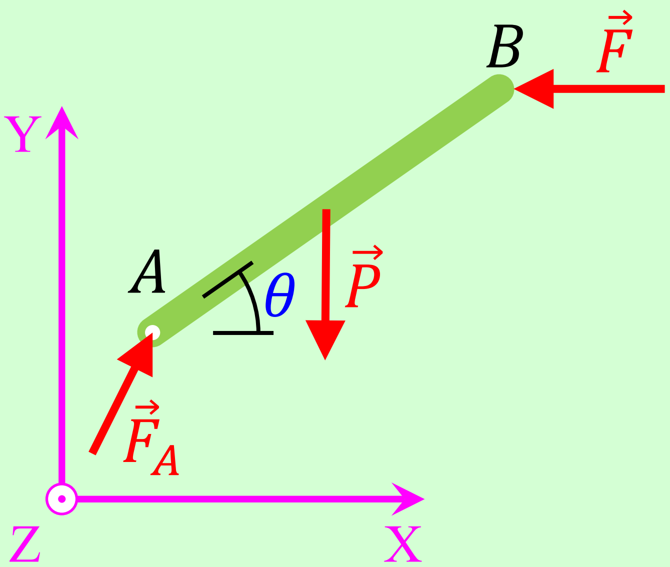
$\vec{F}$: mencionada en el enunciado.

$\vec{P}$: peso de la barra.

$\vec{F}_A$: fuerza ejercida en la articulación A.

Como consecuencia de la acción de estas fuerzas, la barra está en equilibrio.

Hay que establecer un sistema de referencia dextrógiro, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.



De $\vec{F}$ y $\vec{P}$ se conocen sus módulos y orientaciones.

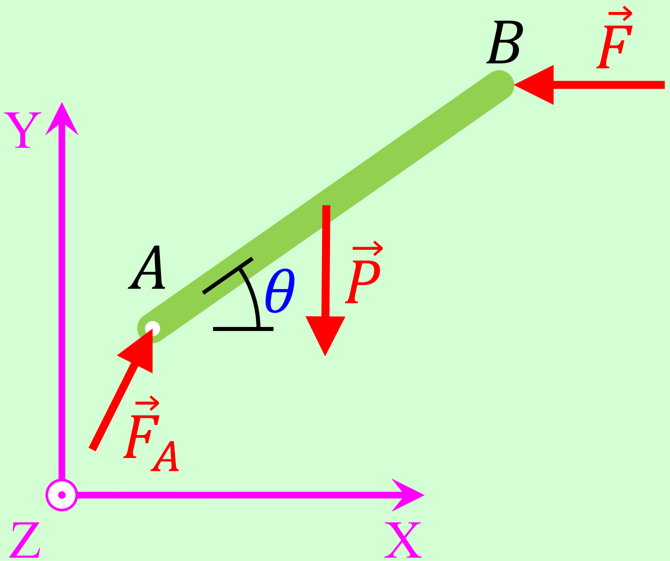
De $\vec{F}_A$ no se conocen módulo ni orientación. Por tanto, se desconocen sus componentes X e Y, aunque sí se sabe que la Z es 0.

Además, se desconoce el valor del ángulo θ para el que la barra se encuentra en equilibrio.

Por tanto, tenemos 3 incógnitas: F_{A_x}, F_{A_y} y θ. Necesitamos pues 3 ecuaciones.

33

Aplicando las condiciones de equilibrio, y utilizando para los momentos el punto A (elección arbitraria), es



$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_A = \vec{0}$$

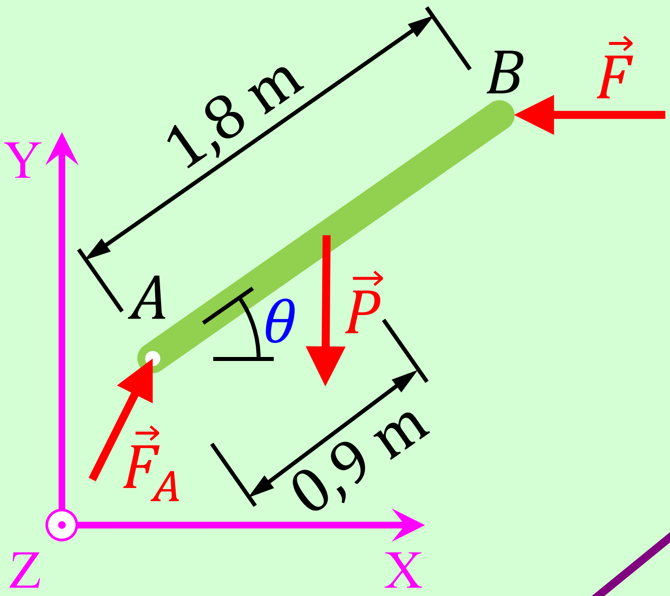
$$A \Rightarrow \overrightarrow{M}_{\vec{F}} + \overrightarrow{M}_{\vec{P}} + \overrightarrow{M}_{\vec{F}_A} = \vec{0}$$

De la primera expresión, resulta

$$(-200;\ 0; 0) + (0; -300; 0) +$$
$$+\left(F_{A_x}; F_{A_y}; 0\right) = (0; 0; 0)$$

$$\begin{cases} -200 + F_{A_x} = 0 \\ -300 + F_{A_y} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Todos los momentos respecto al punto A tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación



$$\overrightarrow{M}_{\vec{F}} + \overrightarrow{M}_{\vec{P}} + \overrightarrow{M}_{\vec{F}_A} = \vec{0}$$

resulta

$$200 \times (1{,}8 \operatorname{sen} \theta) +$$

$$+(-300 \times (0{,}9 \cos \theta)) + 0 = 0$$

Fuerza de brazo 0 m.

- Fuerza de módulo 200 N.
- Brazo 1,8 sen θ (SI).
- Sentido hacia fuera del plano de la página.

- Fuerza de módulo 300 N.
- Brazo 0,9 cos θ (SI).
- Sentido hacia dentro del plano de la página.

Por tanto, $360 \operatorname{sen} \theta - 270 \cos \theta = 0$

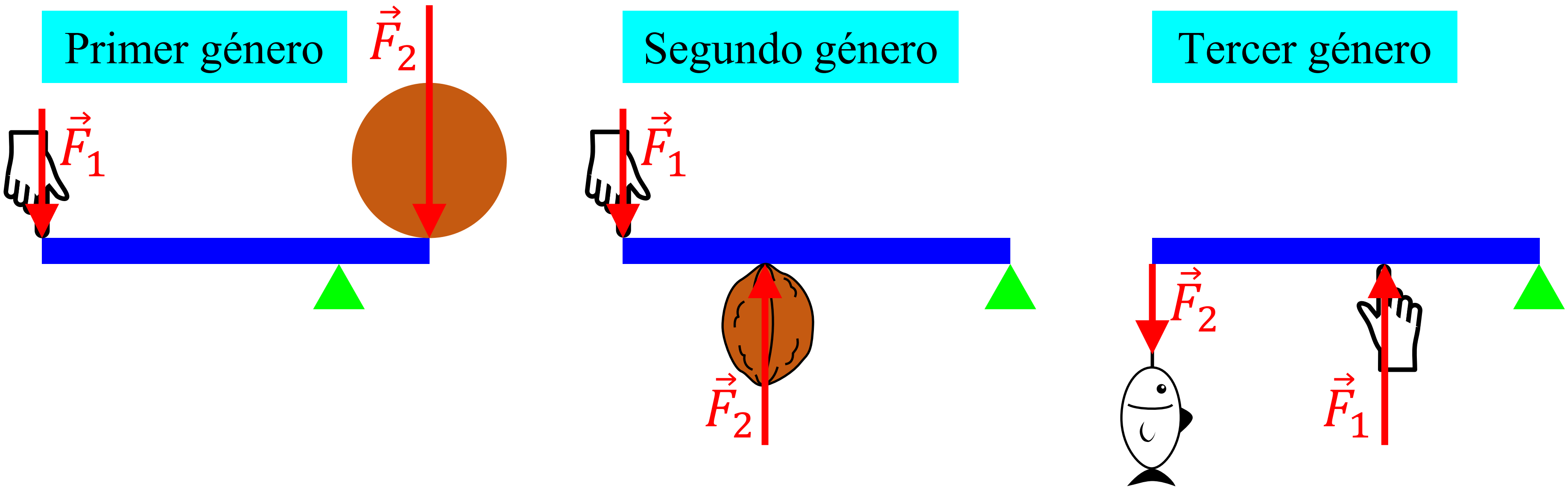
$$\begin{cases} -200 + F_{A_x} = 0 \longrightarrow F_{A_x} = 200\ \text{N} \\ -300 + F_{A_y} = 0 \longrightarrow F_{A_y} = 300\ \text{N} \\ 360 \operatorname{sen} \theta - 270 \cos \theta = 0 \Rightarrow 360 \operatorname{sen} \theta = 270 \cos \theta \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{270}{360} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = 0{,}75 \Rightarrow \theta = 36{,}87°$$

Por tanto, la barra se encuentra en equilibrio cuando $\theta = 36{,}87°$. En esa posición, la fuerza ejercida sobre la barra en la articulación es $\vec{F}_A = (200; 300; 0)$ N.

Aplicación: ley de la palanca

Una palanca es una máquina simple que esencialmente consiste en una barra rígida que se apoya en un punto sobre el que puede girar libremente.



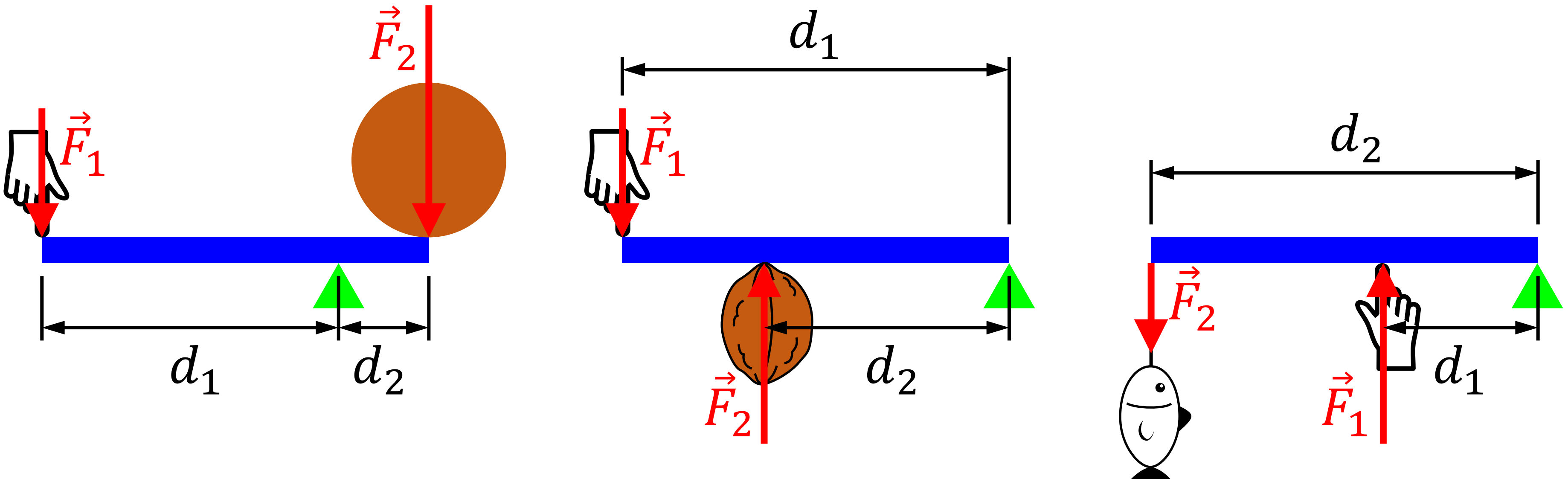
- Balancín
- Tijeras
- Tenazas

- Cascanueces
- Carretilla

- Caña de pescar
- Pinza de depilación

Aplicación: ley de la palanca

La ley de la palanca establece que el módulo de $\vec{F}_1$ (el "esfuerzo"*) por su brazo, es igual al módulo de $\vec{F}_2$ (la "resistencia") por el suyo: $F_1 d_1 = F_2 d_2$.**



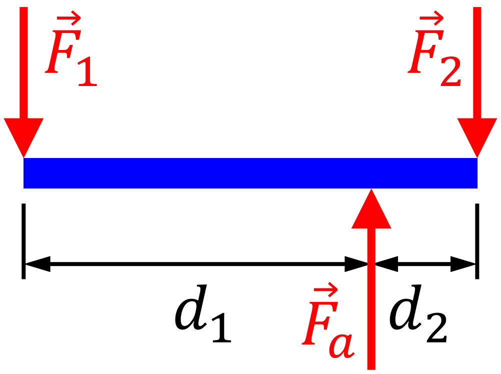
Los brazos mencionados por esta ley son respecto al punto de apoyo.

* En muchos textos, $\vec{F}_1$ recibe el nombre de "potencia". Sin embargo, dar ese nombre a una fuerza es poco adecuado, por no decir que totalmente incorrecto.

** Cierto solo para equilibrio. Para movimiento se requiere $F_1 d_1 > F_2 d_2$.

Aplicación: ley de la palanca

Vamos a demostrar esta ley mediante las ecuaciones de la Estática. Aunque lo vamos a hacer para una palanca de primer género, se puede desarrollar demostraciones análogas para los otros casos.



El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre de la barra.

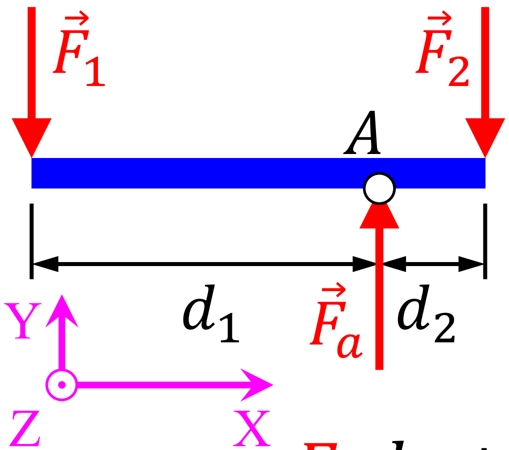
Despreciando el peso de la propia barra, las fuerzas que actúan son:

- $\vec{F}_1$: el "esfuerzo".
- $\vec{F}_2$: la "resistencia".
- $\vec{F}_a$: la fuerza ejercida por el punto de apoyo.

Aplicación: ley de la palanca

Vamos a considerar que, bajo la acción de estas fuerzas, la barra está en equilibrio.

Sea el sistema de referencia de la figura. Utilizando para los momentos el punto de apoyo A, es



$$A \Rightarrow \overrightarrow{M}_{\vec{F}_1} + \overrightarrow{M}_{\vec{F}_2} + \overrightarrow{M}_{\vec{F}_a} = \vec{0}$$

Todos estos vectores tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación, resulta

$$F_1 d_1 + (-F_2 d_2) + 0 = 0 \;\Rightarrow F_1 d_1 = F_2 d_2$$

- Fuerza de módulo F_1.
- Brazo d_1.
- Sentido hacia fuera del plano de la página.

- Fuerza de módulo F_2.
- Brazo d_2.
- Sentido hacia dentro del plano de la página.

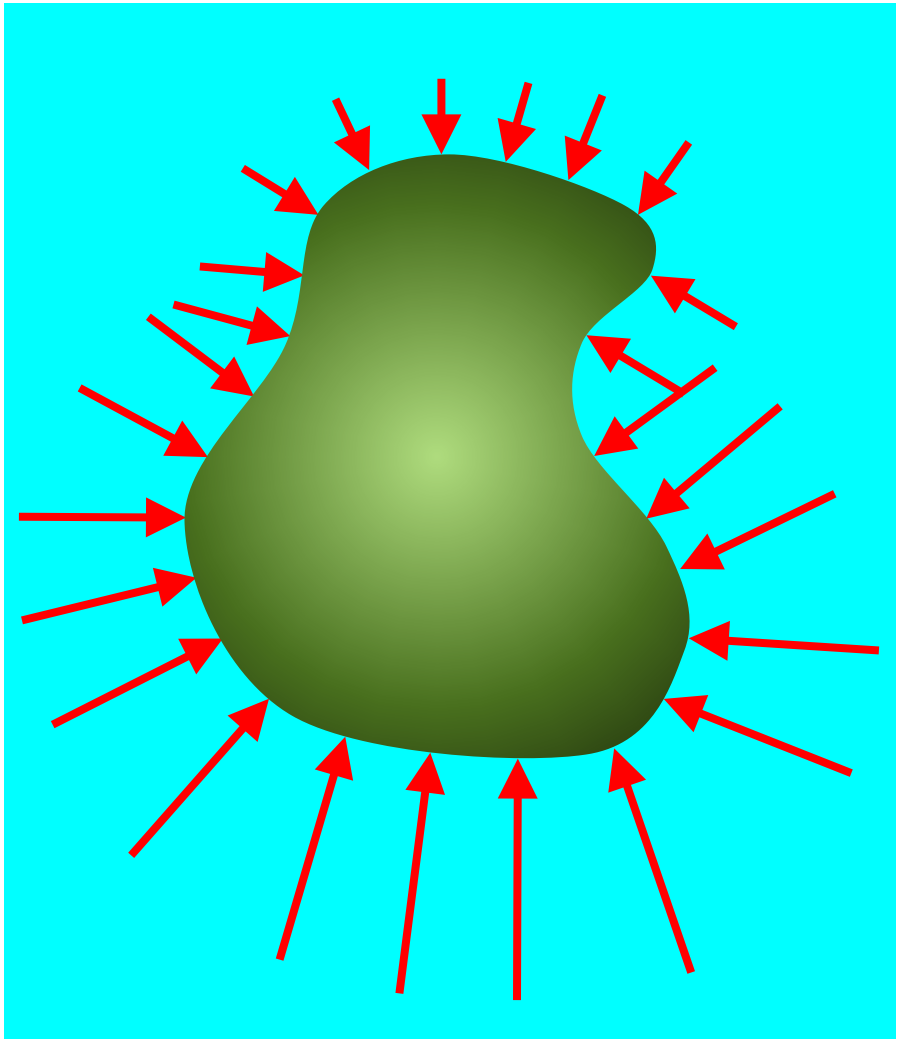
Fuerza de brazo 0.

Aplicación: principio de Arquímedes

El principio de Arquímedes establece que todo cuerpo sumergido, total o parcialmente, en un fluido en reposo, experimenta un empuje ascensional de módulo igual al del peso del fluido desalojado.

Vamos a demostrar este principio mediante las ecuaciones de la Estática.

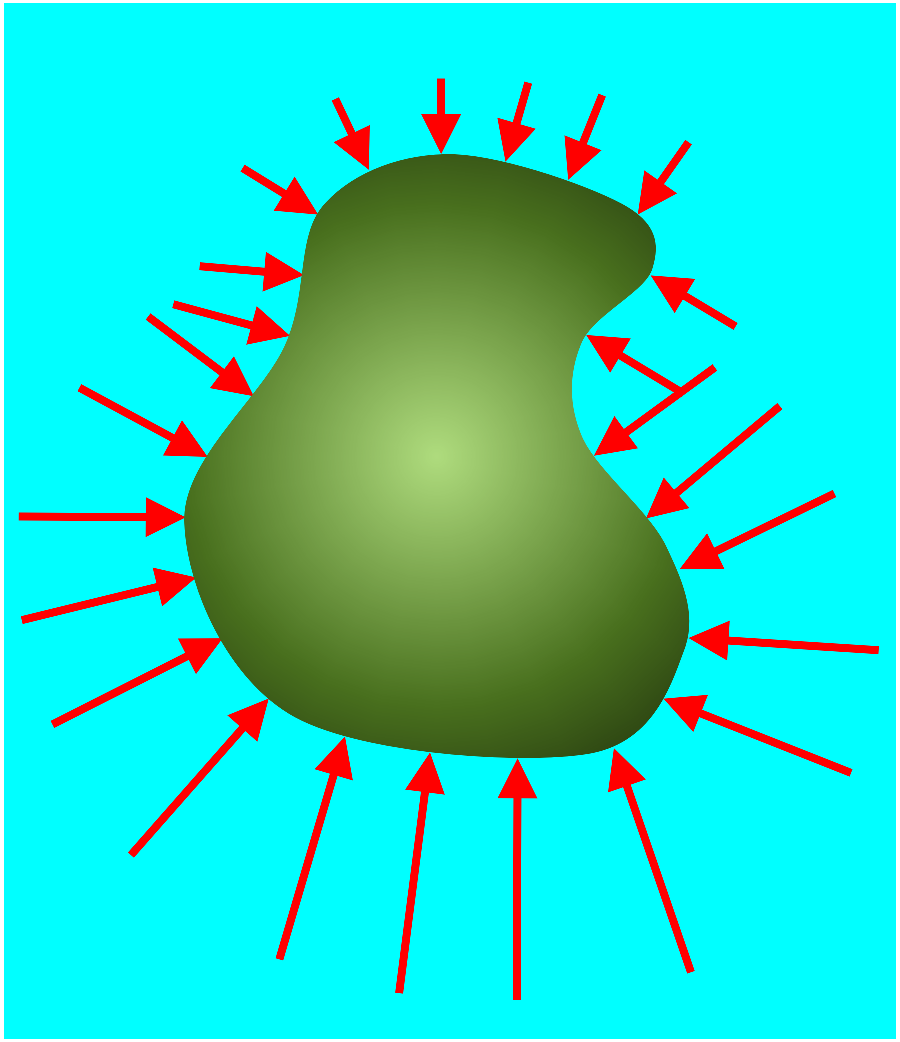
Aplicación: principio de Arquímedes



Las fuerzas que el fluido ejerce sobre el cuerpo son las debidas a la presión hidrostática.

- Son fuerzas perpendiculares a la superficie del cuerpo.
- Su módulo crece con la profundidad, ya que la presión también es mayor.

Aplicación: principio de Arquímedes

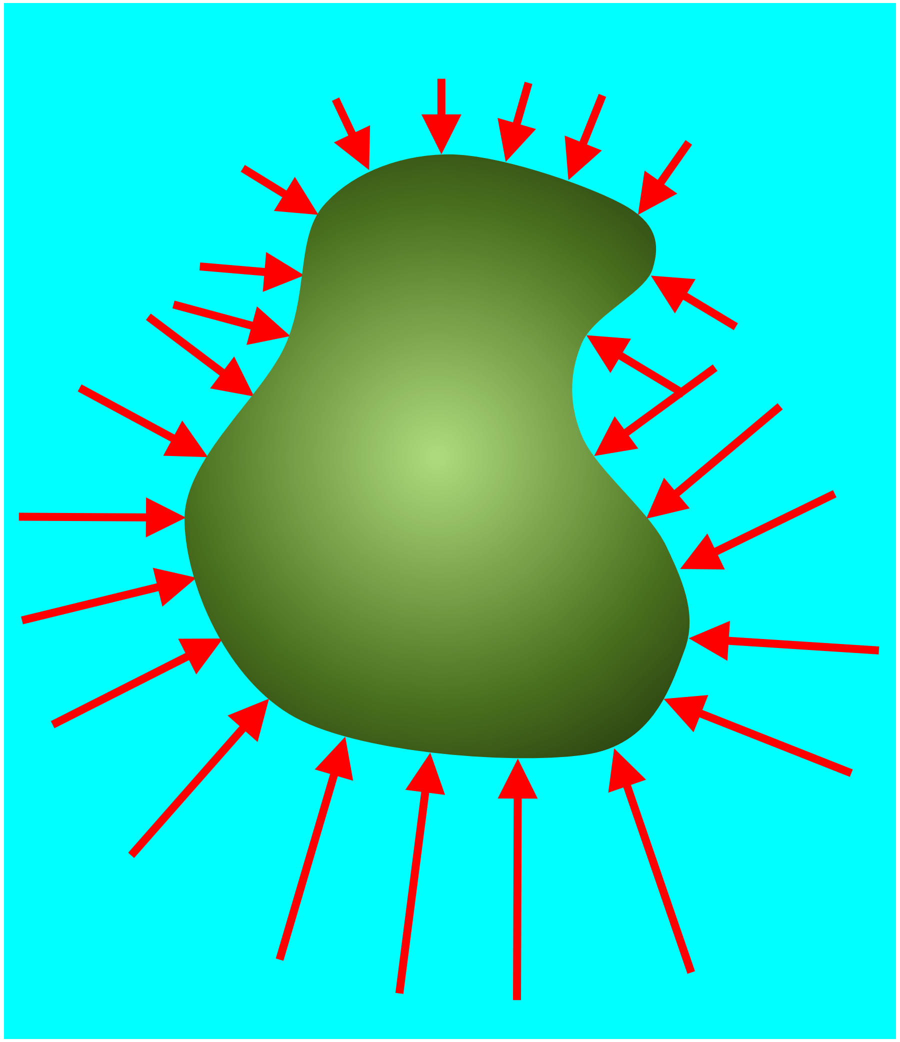


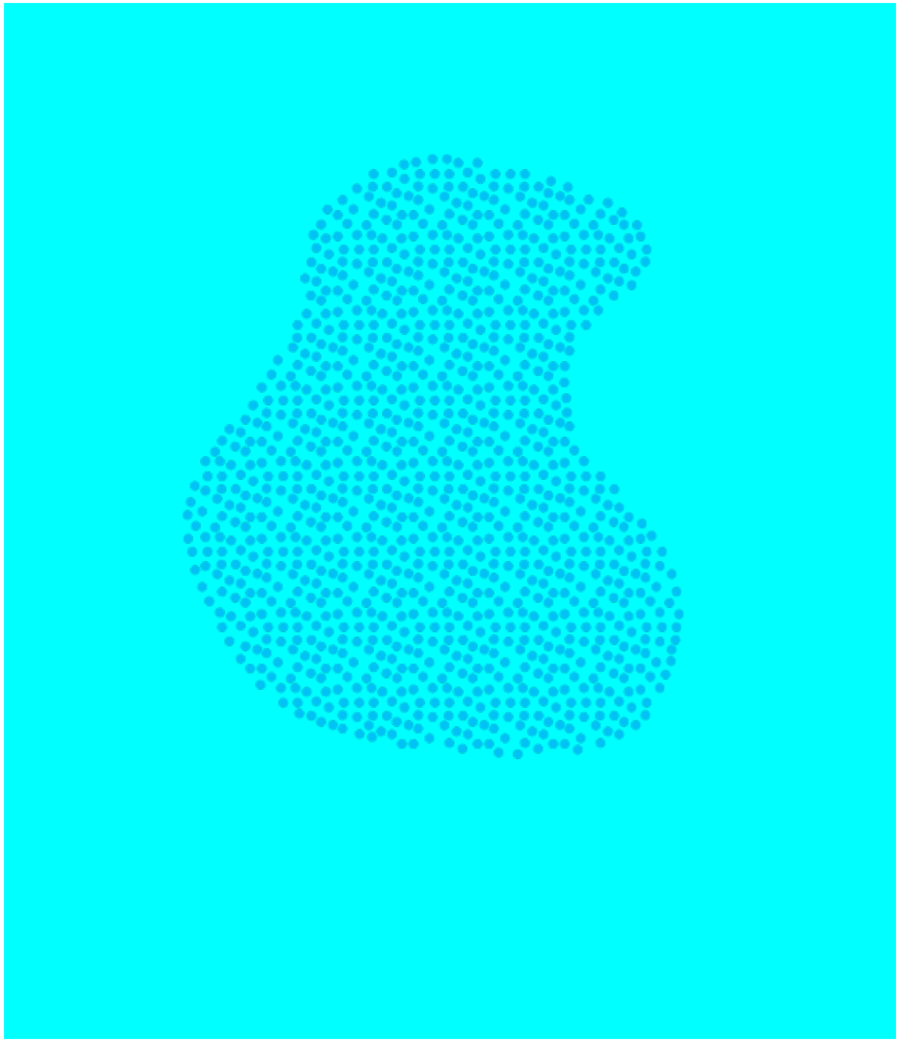
El denominado empuje hidrostático es la consecuencia de este conjunto de fuerzas.

Nótese que ese conjunto tiende a empujar el cuerpo, al menos aproximadamente, hacia arriba.

Nuestro objetivo es encontrar un sistema de fuerzas, lo más sencillo posible, que sea equivalente al de las infinitas fuerzas infinitesimales debidas a la presión hidrostática.

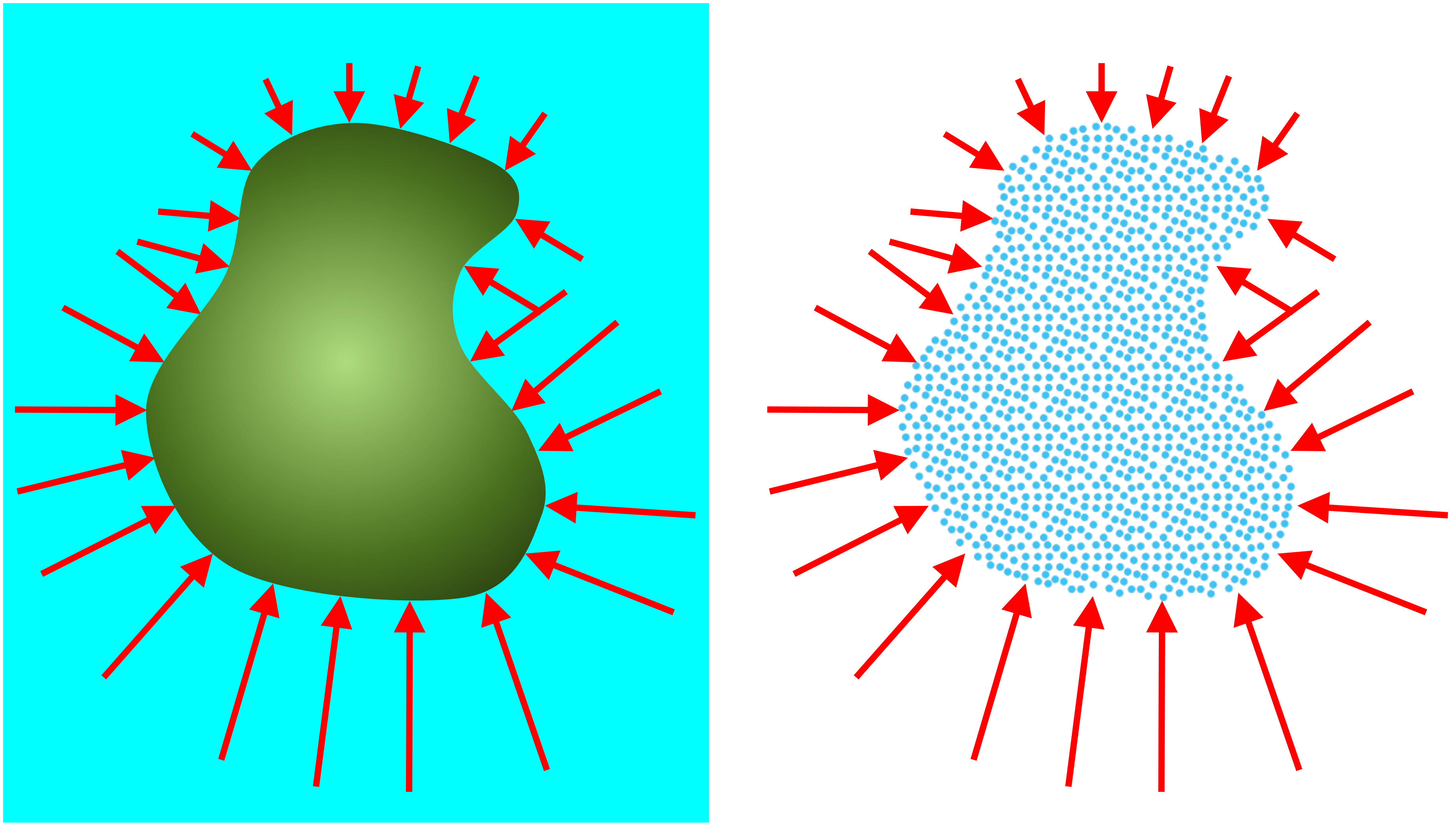
Aplicación: principio de Arquímedes





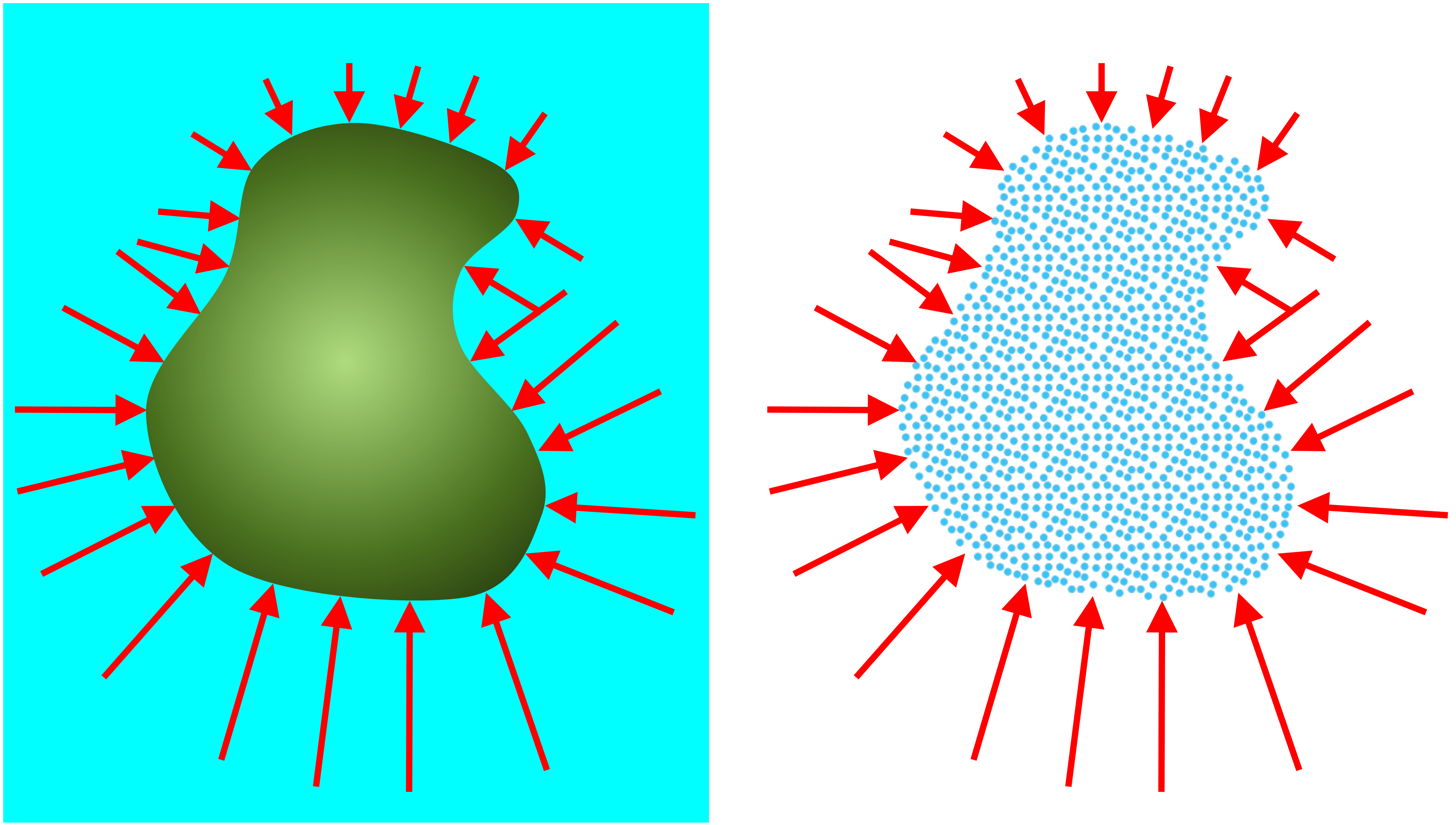
Sea el conjunto de puntos materiales de fluido que ocupaban ese lugar antes de introducir el cuerpo.

Aplicación: principio de Arquímedes



Puesto que el contorno del conjunto es el mismo que el del cuerpo, las fuerzas debidas a la presión son idénticas.

Aplicación: principio de Arquímedes



Por tanto, un sistema simple equivalente al de la imagen de la derecha, es también equivalente al de la izquierda.

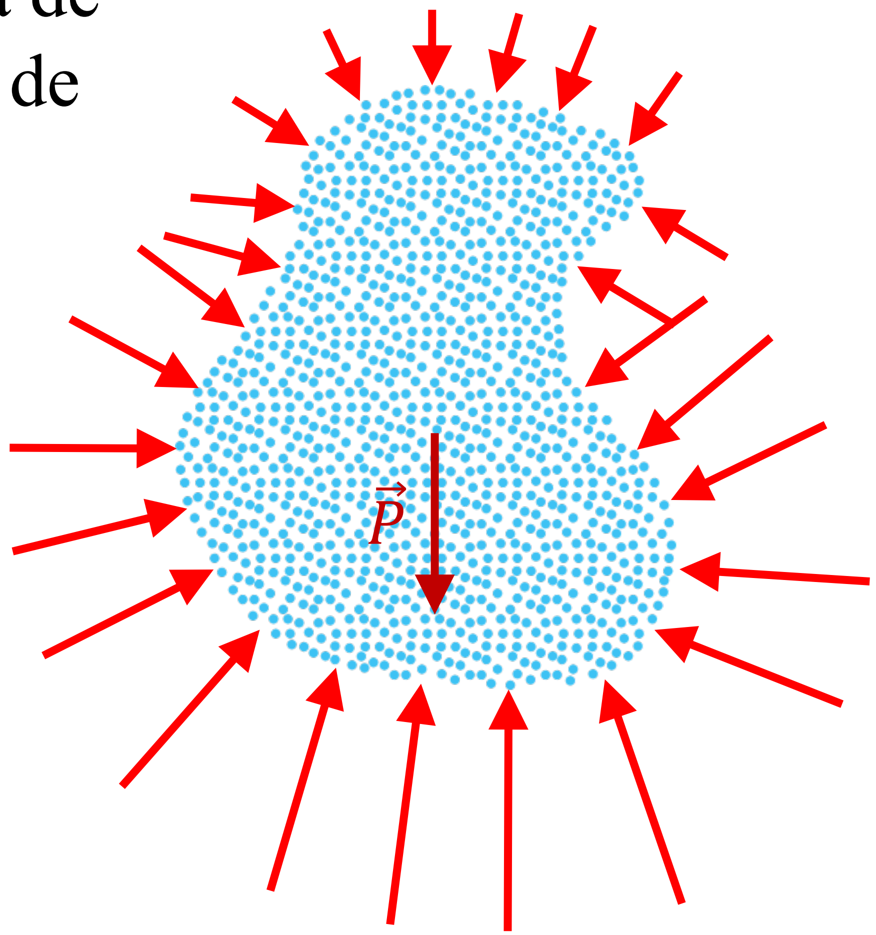
Aplicación: principio de Arquímedes

Vamos a completar el diagrama de cuerpo libre de nuestro sistema de partículas de fluido.

Las fuerzas que actúan son:

- las debidas a la presión;
- el peso.

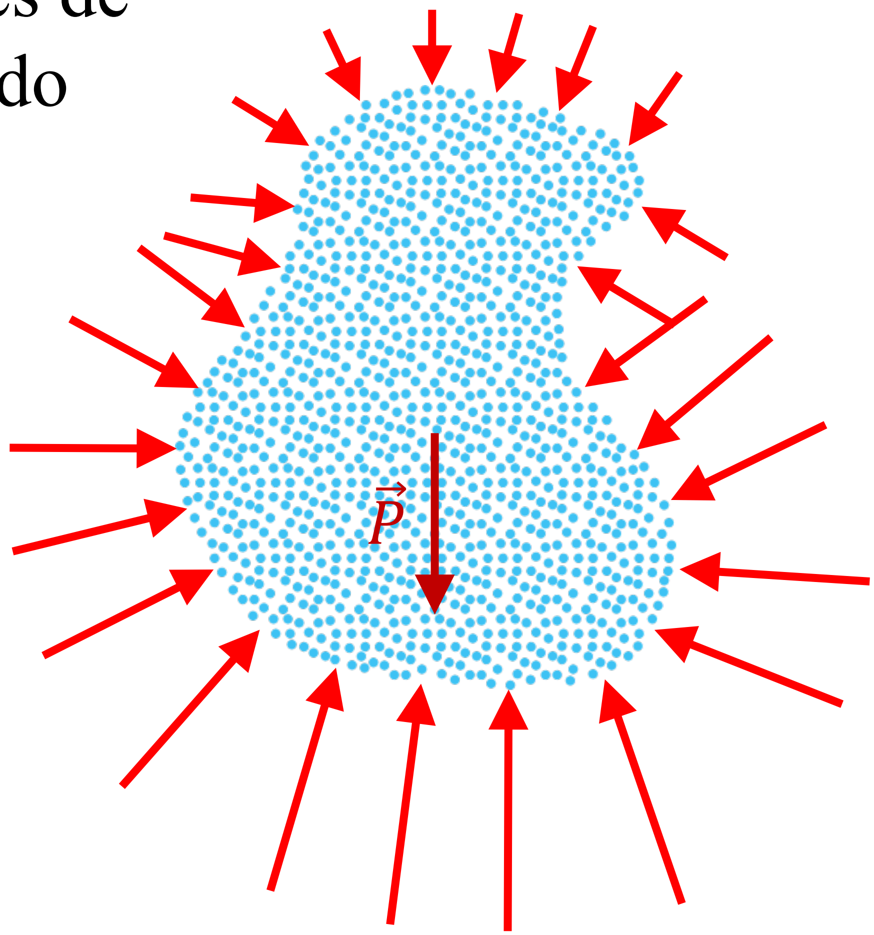
Estamos analizando un fluido en reposo. Por tanto, está en equilibrio.



Aplicación: principio de Arquímedes

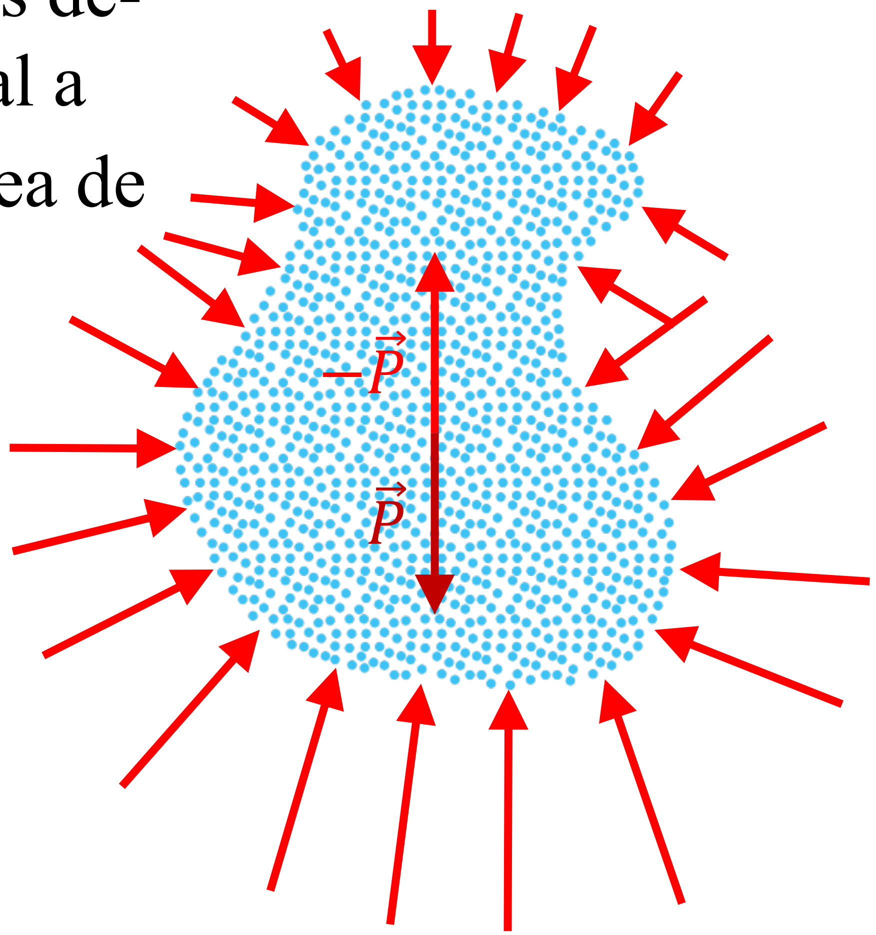
El conjunto de puntos materiales de fluido de la figura no es un sólido rígido.

Sin embargo, como ya se indicó, que el conjunto de fuerzas exteriores sea un sistema nulo no es condición suficiente, pero sí necesaria, para que un sistema de puntos materiales esté en equilibrio.



Aplicación: principio de Arquímedes

Por tanto, el conjunto de fuerzas debidas a la presión ha de ser igual a $-\vec{P}$, y ha de tener la misma línea de acción.



Así pues, esa fuerza $-\vec{P}$, con esa línea de acción, es equivalente al conjunto de fuerzas debidas a la presión que actúan sobre el contorno de este conjunto de puntos materiales de fluido.

Por tanto, es también equivalente al conjunto de fuerzas que actuaban sobre el contorno del cuerpo sumergido.

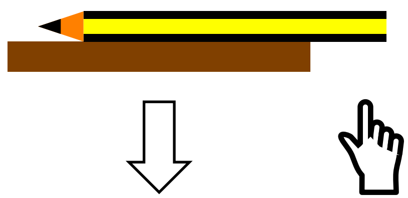
Aplicación: principio de Arquímedes

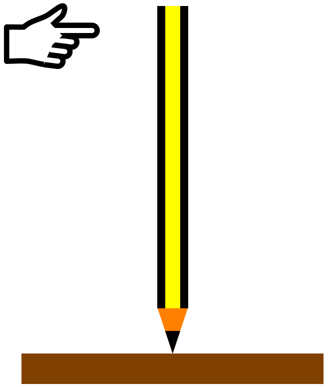
Consecuencias

- El empuje hidrostático que actúa sobre un cuerpo sumergido, total o parcialmente, está orientado exactamente hacia arriba, y su módulo es igual al del peso del fluido desalojado.
- Además, la línea de acción del empuje hidrostático pasa por el centro de gravedad del fluido desalojado.

Estabilidad del equilibrio

Una característica importante de una situación de equilibrio es lo que sucede tras tener lugar una ligera perturbación.





Tiende a regresar a la posición de equilibrio.

Equilibrio estable

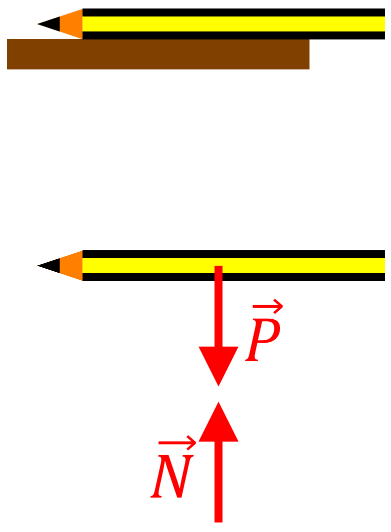
Tiende a abandonar la posición de equilibrio.

Equilibrio inestable

Estabilidad del equilibrio

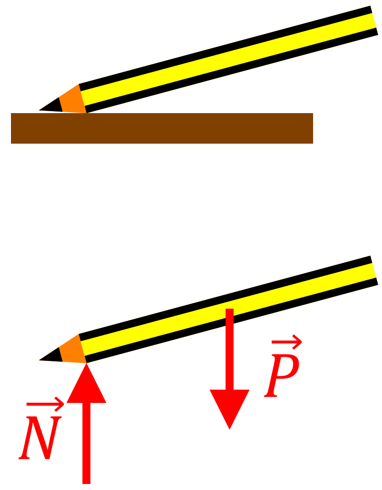
¿Cómo analizar la estabilidad?

Equilibrio.



Sistema nulo.

Ligero desvío.

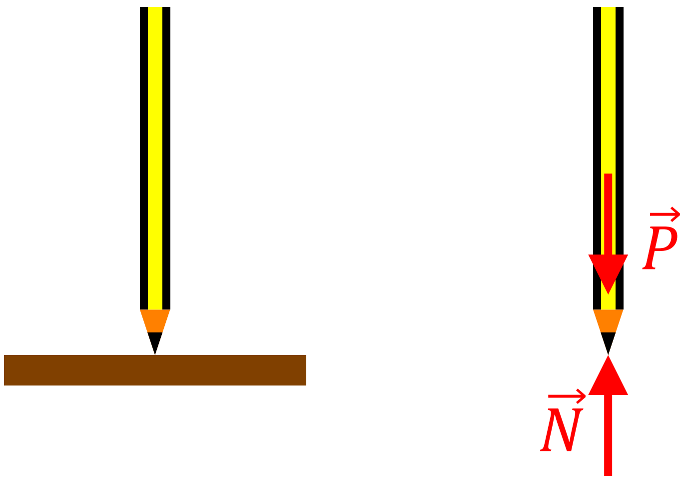


El momento hace que gire en sentido horario.

Tiende a regresar.

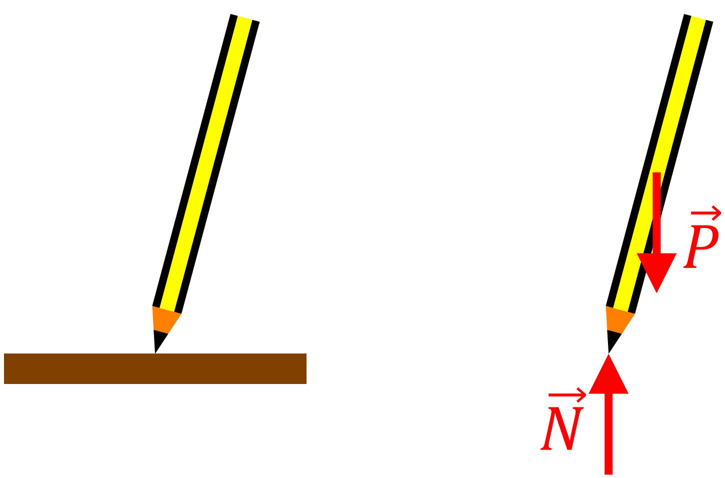
Estabilidad del equilibrio

¿Cómo analizar la estabilidad?



Equilibrio.

Sistema nulo.



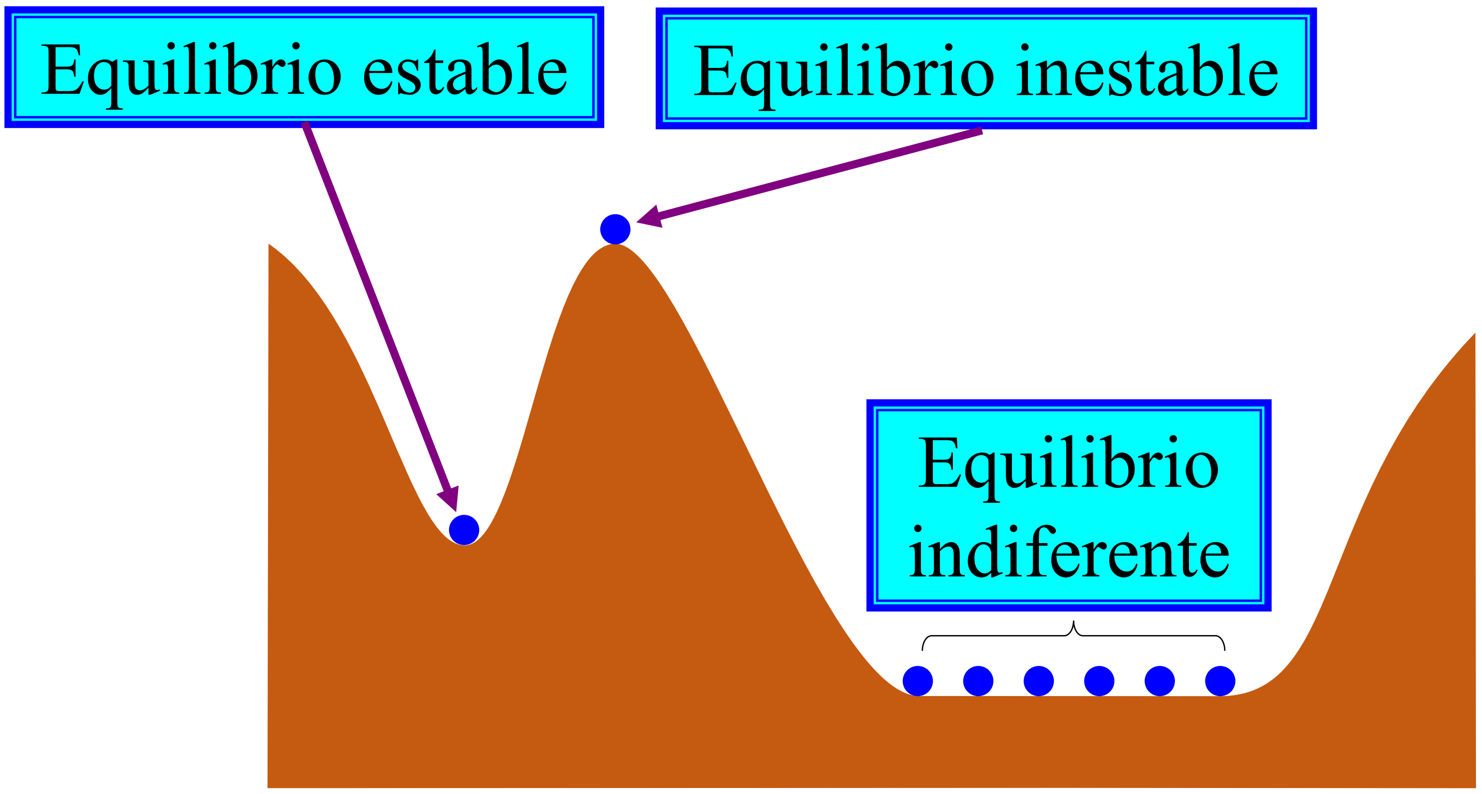
Ligero desvío.

El momento hace que gire en sentido horario.

Tiende a irse.

Estabilidad del equilibrio

Veamos otro ejemplo.



Tras un ligero desvío, se queda en la nueva posición.

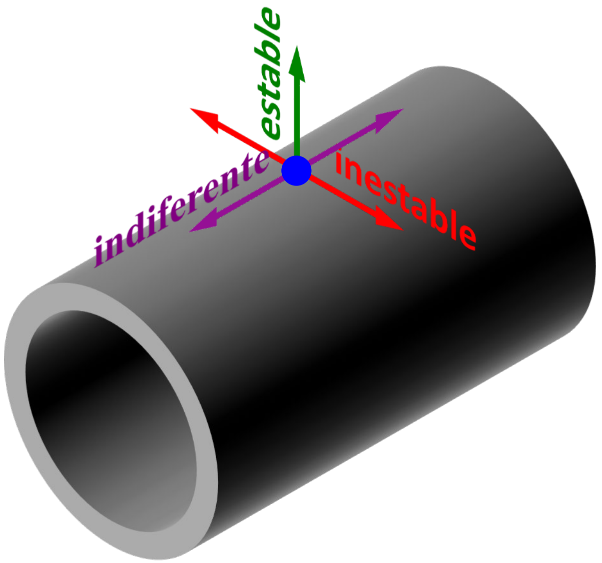
Estabilidad del equilibrio

Atendiendo a la estabilidad, las situaciones de equilibrio se clasifican como sigue.

- Equilibrio estable: al desplazar el sistema ligeramente, y liberarlo a continuación, tiende a regresar a la situación de equilibrio.
- Equilibrio inestable: al desplazar el sistema ligeramente, y liberarlo a continuación, tiende a alejarse de la situación de equilibrio.
- Equilibrio indiferente: al desplazar el sistema ligeramente, y liberarlo a continuación, permanece en la nueva posición.

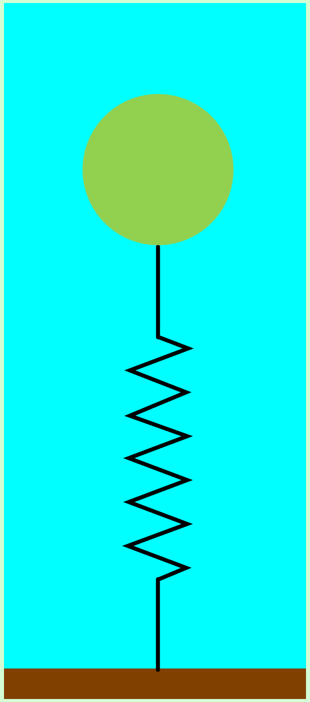
Estabilidad del equilibrio

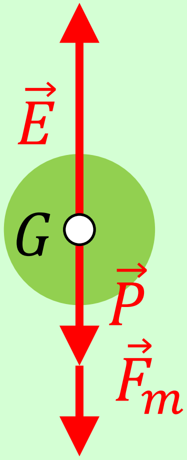
Cuando un cuerpo puede desplazarse de diferentes formas, la estabilidad puede ser diferente para cada una.



Ejercicio 5

Una esfera rígida, menos densa que el agua, está sumergida en ella y unida al fondo mediante un muelle traccionado. Dicha esfera se encuentra en equilibrio. ¿Es este estable, inestable o indiferente?





Las fuerzas que actúan sobre la esfera son:

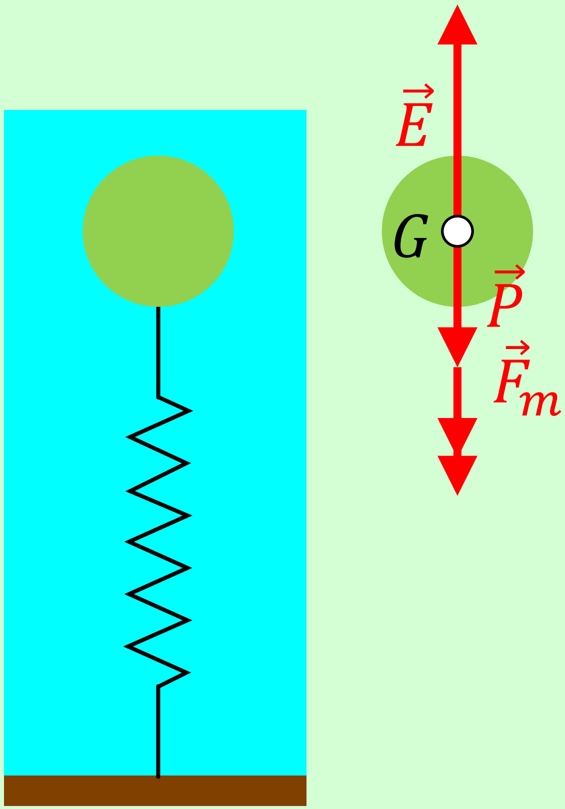
$\vec{P}$: peso.

$\vec{E}$: empuje hidrostático.

$\vec{F}_m$: fuerza ejercida por el muelle.

Puesto que está en equilibrio, es

$$\vec{P} + \vec{E} + \vec{F}_m = \vec{0}$$

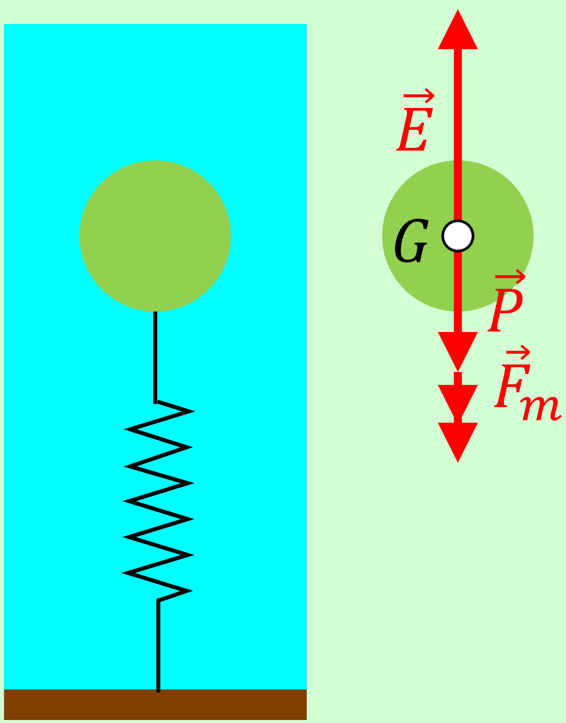


Si se desplaza la esfera ligeramente hacia arriba:

- $\vec{P}$ no varía;
- $\vec{E}$ no varía;
- $\vec{F}_m$ aumenta su módulo.

Por tanto, ahora $\vec{P} + \vec{E} + \vec{F}_m$ no es $\vec{0}$, y se dirige hacia abajo.

En consecuencia la esfera bajará, dirigiéndose hacia la posición de equilibrio.



Si se desplaza la esfera ligeramente hacia abajo:

- $\vec{P}$ no varía;
- $\vec{E}$ no varía;
- $\vec{F}_m$ disminuye su módulo.

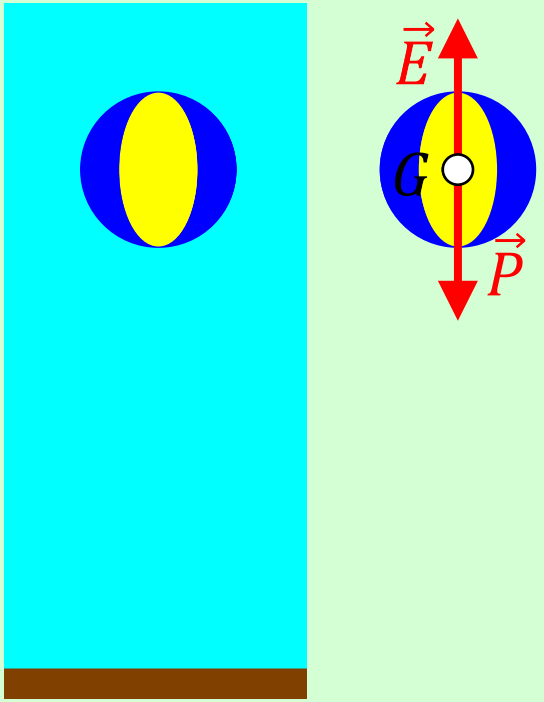
Por tanto, ahora $\vec{P}+\vec{E}+\vec{F}_m$ no es $\vec{0}$, y se dirige hacia arriba.

En consecuencia la esfera subirá, dirigiéndose hacia la posición de equilibrio.

Es una posición de equilibrio estable.

Ejercicio 6

Una pelota compresible (a mayor presión, menor volumen) se encuentra en equilibrio sumergida en agua. ¿Es este estable, inestable o indiferente?



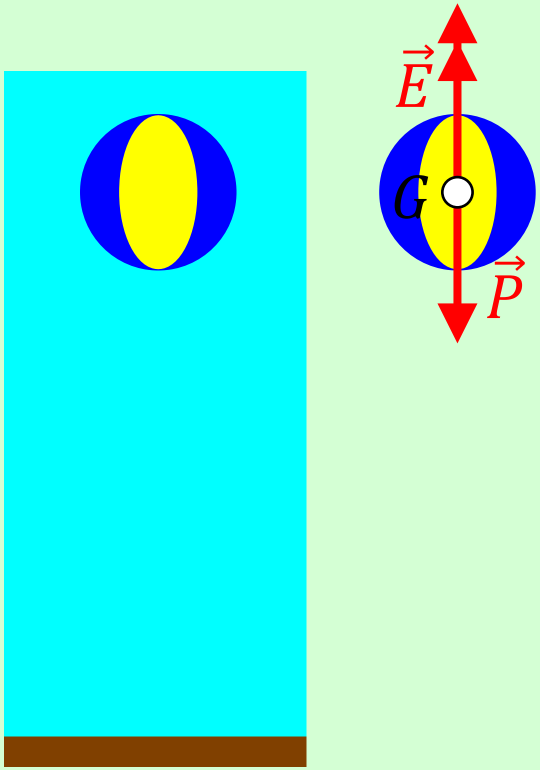
Las fuerzas que actúan sobre la pelota son:

$\vec{P}$: peso.

$\vec{E}$: empuje hidrostático.

Puesto que está en equilibrio, es

$$\vec{P} + \vec{E} = \vec{0}$$

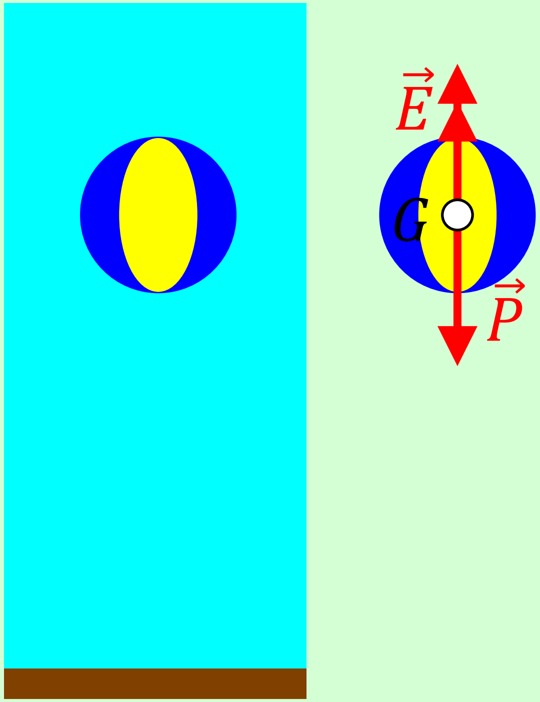


Si se desplaza la pelota ligeramente hacia arriba:

- $\vec{P}$ no varía;
- la presión es menor, por lo que la pelota aumenta de volumen, desaloja más agua, y $\vec{E}$ aumenta su módulo.

Por tanto, ahora $\vec{P} + \vec{E}$ no es $\vec{0}$, y se dirige hacia arriba.

En consecuencia la esfera subirá, alejándose de la posición de equilibrio.



Si se desplaza la pelota ligeramente hacia abajo:

- $\vec{P}$ no varía;
- la presión es mayor, por lo que la pelota disminuye de volumen, desaloja menos agua, y $\vec{E}$ disminuye su módulo.

Por tanto, ahora $\vec{P} + \vec{E}$ no es $\vec{0}$, y se dirige hacia abajo.

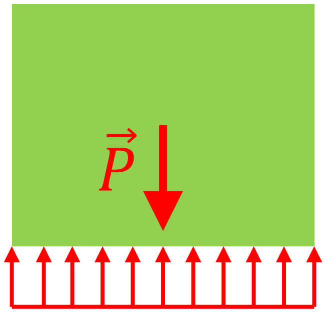
En consecuencia la esfera bajará, alejándose de la posición de equilibrio.

Es una posición de equilibrio inestable.

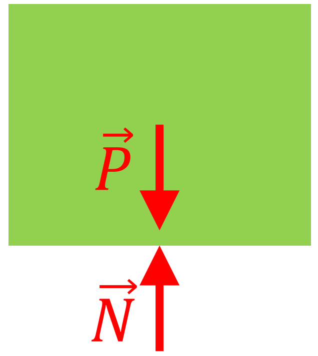
Vuelco

Sabemos que, cuando un cuerpo apoya sobre el suelo, este ejerce una fuerza $\vec{N}$, la reacción normal, que impide que dicho cuerpo lo atraviese.

Esa fuerza está repartida por toda la superficie de contacto.

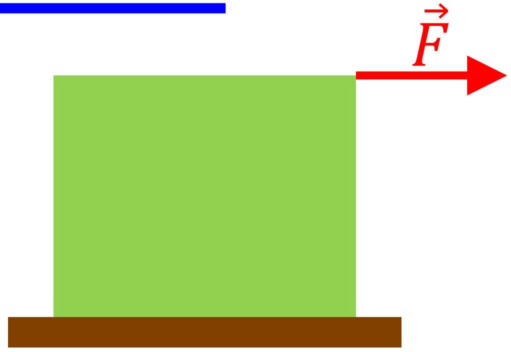


Sin embargo, es más sencillo trabajar utilizando un sistema equivalente: su resultante actuando en el punto medio.



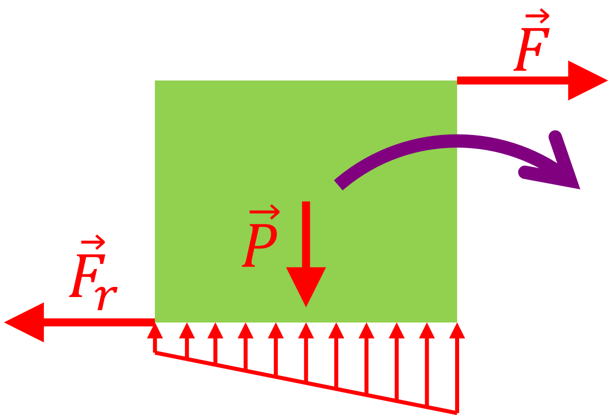
Pero cuidado: esta equivalencia requiere que la presión ejercida por el suelo sea la misma en todos los puntos.

Vuelco



¿Qué ocurre si actúa la fuerza $\vec{F}$ de la figura?

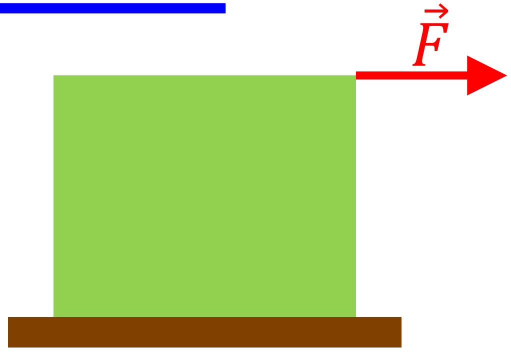
Si el coeficiente de rozamiento es suficiente, el suelo ejerce la fuerza de rozamiento $\vec{F}_r = -\vec{F}$, de modo que el cuerpo no desliza.



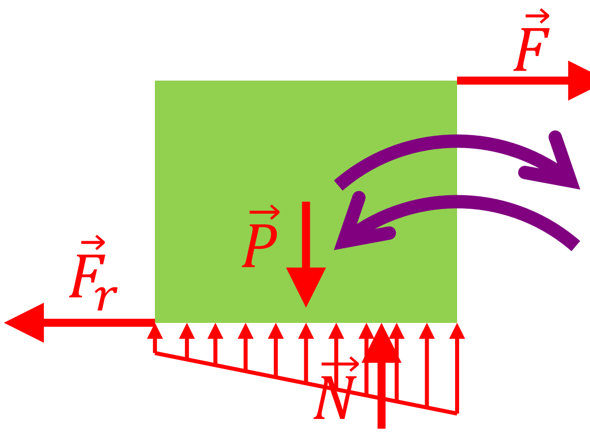
$\vec{F}$ y $\vec{F}_r$ constituyen un par de fuerzas que, por si solo, haría que el cuerpo girara en sentido horario en la figura.

Esto hace que la presión del suelo sobre la superficie de contacto sea mayor en la parte derecha, y menor en la izquierda.

Vuelco



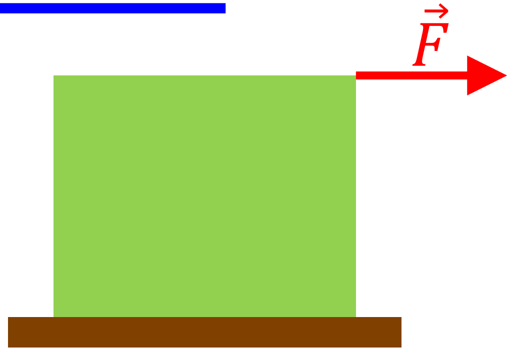
Por estar el cuerpo en equilibrio, es $\vec{N} = -\vec{P}$, pero para ser equivalente $\vec{N}$ ya no puede actuar en el punto medio del área de apoyo. Ahora estará situada más hacia la derecha.



Así, $\vec{N}$ y $\vec{P}$ constituyen un par de fuerzas que, por si solo, haría que el cuerpo girara en sentido antihorario en la figura.

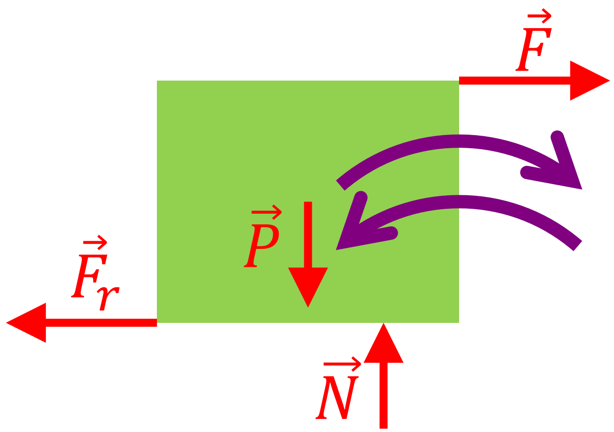
Este par estabiliza el cuerpo pues, de forma natural, la nueva distribución de presiones es tal que los momentos de los dos pares son opuestos, anulándose entre sí.

Vuelco



¿Qué ocurre si el módulo de $\vec{F}$ va aumentando gradualmente?

El momento del par de fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{F}_r$ es cada vez mayor.



Para equilibrarlo, el momento del par de fuerzas $\vec{N}$ y $\vec{P}$ ha de crecer al mismo ritmo.

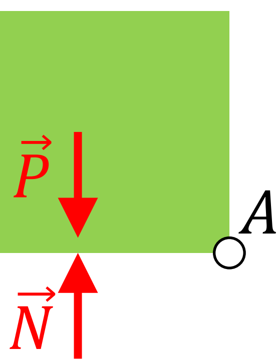
El módulo de $\vec{N}$ y $\vec{P}$ es constante. Por tanto, ha de crecer la distancia entre sus líneas de acción.

Para ello, la distribución de presiones es cada vez más intensa a la derecha, para así desplazar $\vec{N}$ hacia ese lado.

Vuelco

La animación muestra este proceso.

Idealmente, dicho proceso finaliza cuando la reacción normal $\vec{N}$ alcanza el límite A de la superficie de contacto.



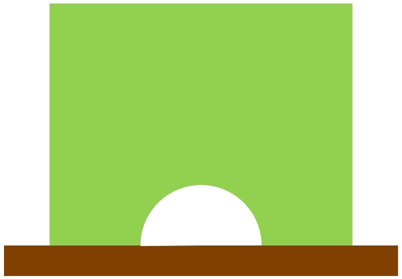
En esta situación, el vuelco es inminente. Si $\vec{F}$ aumenta, el momento desestabilizador ya no puede ser compensado, y el cuerpo adquiere aceleración angular no nula.

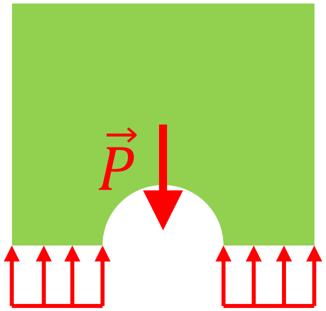
Como consecuencia, el cuerpo vuelca girando sobre el punto A.

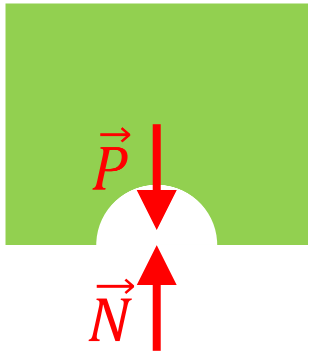
Vuelco

Existen numerosas variantes del proceso (cambios en el punto de aplicación de las fuerzas, suelo inclinado, apoyos múltiples, …), pero la esencia es la misma: un cuerpo está en situación de vuelco inminente cuando la reacción normal alcanza el límite exterior de la superficie de contacto.

Cuidado: la reacción normal puede actuar en un punto donde no hay contacto con el suelo, siempre que no esté fuera del contorno exterior.

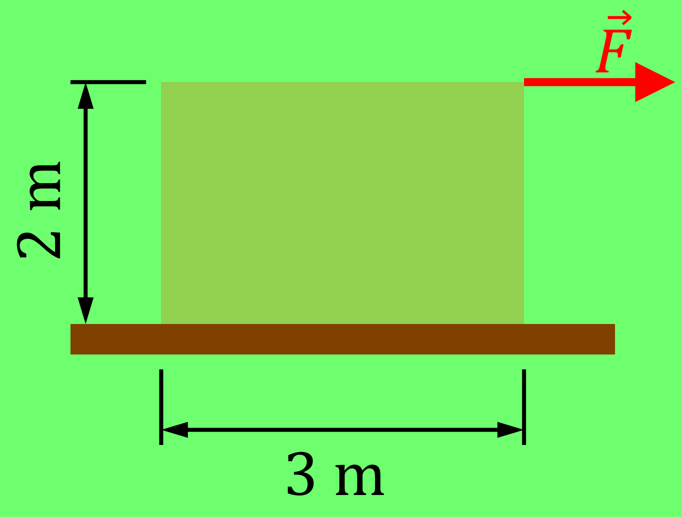






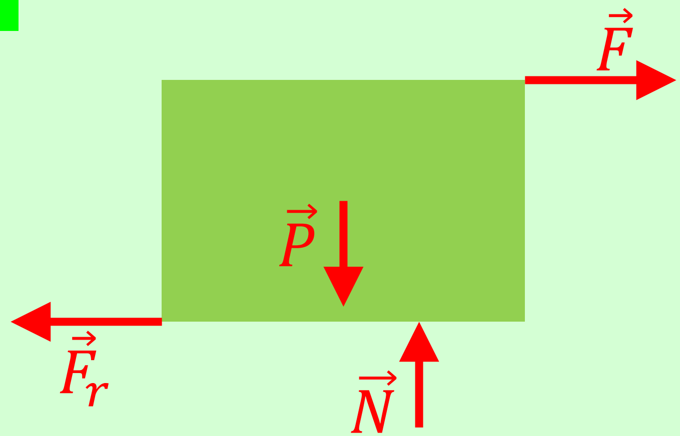
Ejercicio 7

El bloque de la figura tiene un peso de módulo 6000 N, y su coeficiente de rozamiento con el suelo horizontal es prácticamente infinito. Se tira del bloque con una fuerza $\vec{F}$ aplicada en el punto que se indica.



a) ¿En qué punto actúa la reacción normal si $F = 1500$ N?
b) ¿En qué punto actúa la reacción normal si $F = 4800$ N?
c) ¿Para qué valor de F es inminente el vuelco?
d) Si el coeficiente de rozamiento fuera 0,2, ¿estaría el bloque en equilibrio para $F = 1500$ N?
e) Si el coeficiente de rozamiento fuera 0,2, ¿para qué valor de F sería inminente el desequilibrio?

a)



HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no desliza ni vuelca).

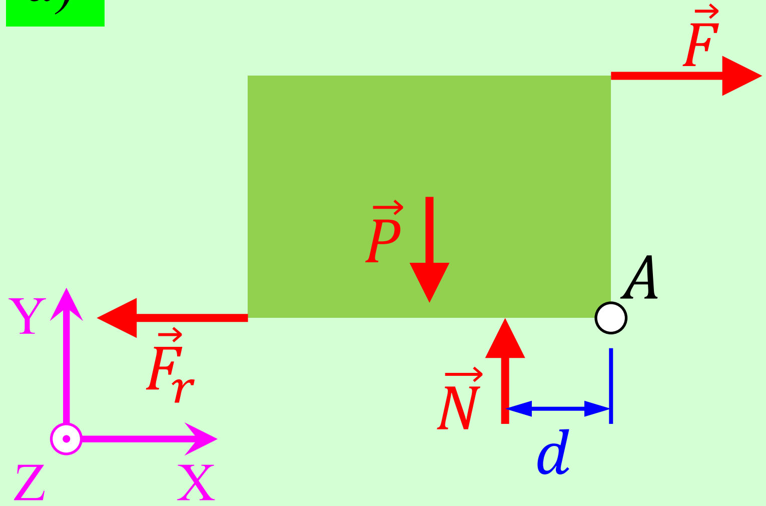
El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, el bloque en este caso.

Las fuerzas que actúan sobre el bloque son:

- $\vec{F}$: mencionada en el enunciado.
- $\vec{P}$: peso.
- $\vec{N}$: reacción normal.
- $\vec{F}_r$: fuerza de rozamiento.

Como consecuencia de la acción de estas fuerzas, y de acuerdo con la hipótesis adoptada, el bloque está en equilibrio.

a)



HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no desliza ni vuelca).

Hay que establecer un sistema de referencia dextrógiro, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.

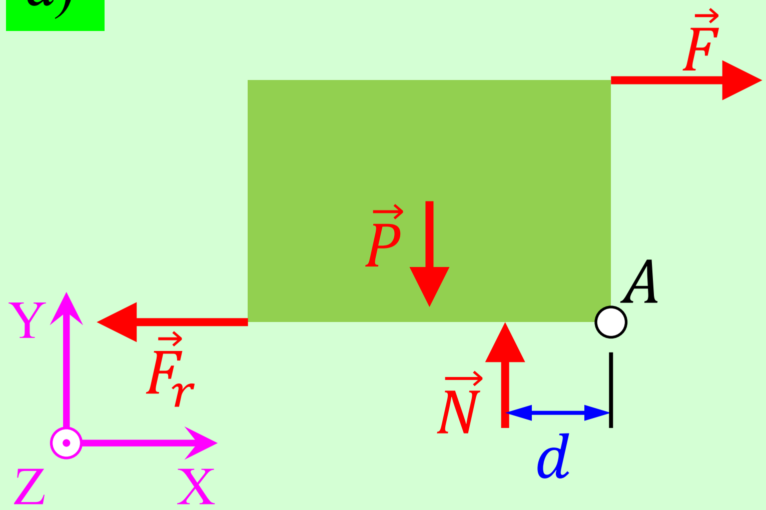
De $\vec{F}$ y $\vec{P}$ se conocen sus módulos, orientaciones y <u>líneas de acción</u>.

De $\vec{F}_r$ se conocen su orientación y su <u>línea de acción</u>, pero no su módulo, F_r.

De $\vec{N}$ se conoce su orientación, pero no su módulo, N, ni su <u>línea de acción</u>, dada por su distancia d al punto A (elección arbitraria).

Por tanto, tenemos 3 incógnitas: F_r, N y d. Necesitamos pues 3 ecuaciones.

a)



HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no desliza ni vuelca).

Aplicando las condiciones de equilibrio, y utilizando para los momentos el punto A (elección arbitraria), es

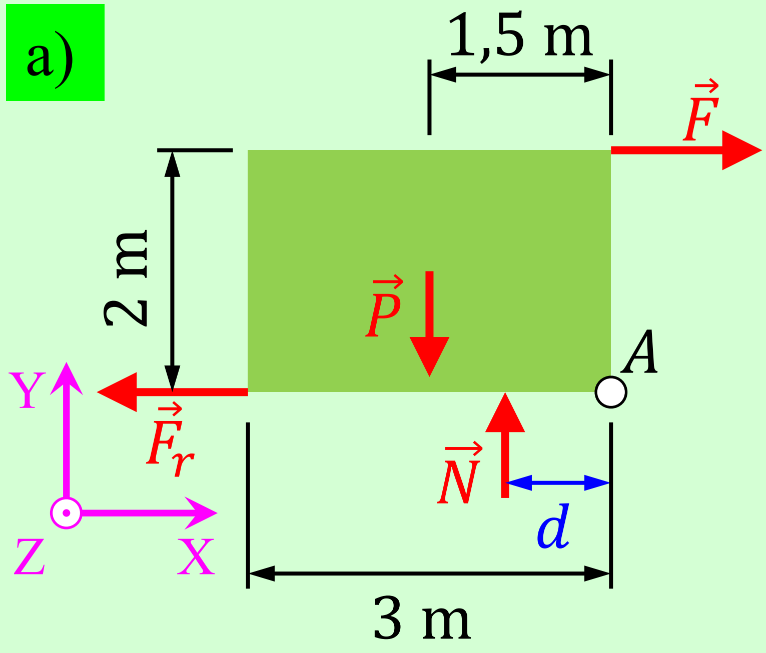
$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r = \vec{0}$$

$$A \Rightarrow \vec{M}_{\vec{F}} + \vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{N}} + \vec{M}_{\vec{F}_r} = \vec{0}$$

De la primera expresión, resulta

$$(1500; 0; 0) + (0; -6000; 0) + (0; N; 0) + (-F_r; 0; 0) = (0; 0; 0)$$

$$\begin{cases} 1500 - F_r = 0 \\ -6000 + N = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$



HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no desliza ni vuelca).

Todos los momentos respecto al punto A tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación

$$\vec{M}_{\vec{F}} + \vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{N}} + \vec{M}_{\vec{F}_r} = \vec{0}$$

resulta

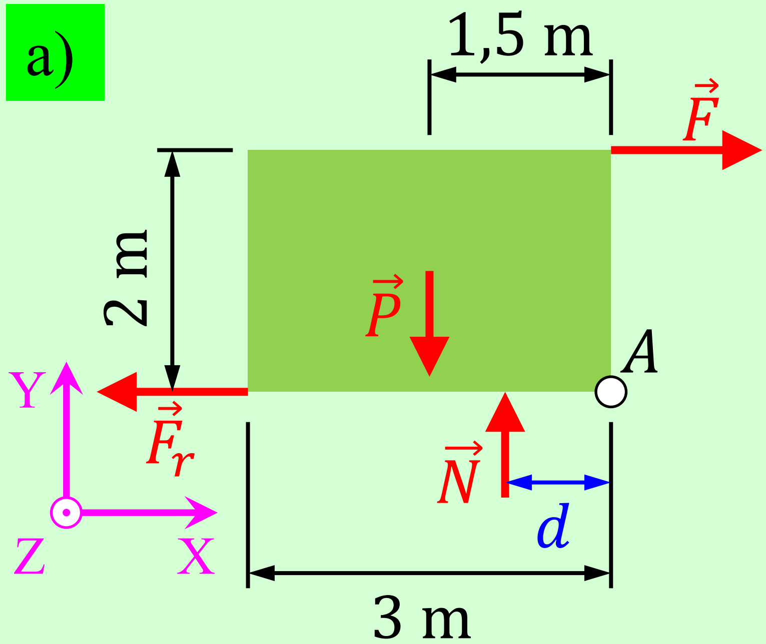
$$(-1500 \times 2) + 6000 \times 1{,}5 + (-Nd) + 0 = 0 \;\Rightarrow 6000 - Nd = 0$$

- Fuerza de módulo 1500 N.
- Brazo 2 m.
- Sentido hacia dentro del plano de la página.

- Fuerza de módulo 6000 N.
- Brazo 1,5 m.
- Sentido hacia fuera del plano de la página.

- Fuerza de módulo N.
- Brazo d.
- Sentido hacia dentro del plano de la página.

Fuerza de brazo 0 m.



HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no desliza ni vuelca).

$$\begin{cases} 1500 - F_r = 0 \\ -6000 + N = 0 \\ 6000 - Nd = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene

$$F_r = 1500\ \mathrm{N} \qquad N = 6000\ \mathrm{N} \qquad d = 1\ \mathrm{m}$$

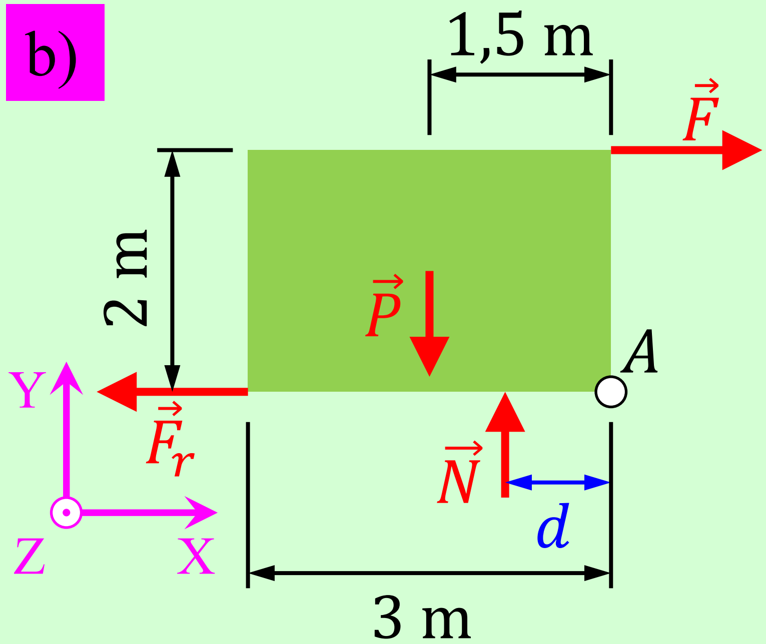
¿Cómo se comprueba la hipótesis de no deslizamiento?

Puesto que μ es prácticamente infinito, también lo es $F_{r_{máx}} = \mu N$.

Por tanto, se cumple que $F_r \leq F_{r_{máx}}$.

¿Cómo se comprueba la hipótesis de no vuelco?

Se cumple que $d \in [0; 3]$ m, que es el intervalo dentro del contorno exterior de la superficie de contacto.



HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no desliza ni vuelca).

Seguimos el mismo proceso que en el apartado (a), salvo que $F = 4800$ N. Los cambios aparecen destacados en azul claro.

De $\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r = \vec{0}$ se obtiene

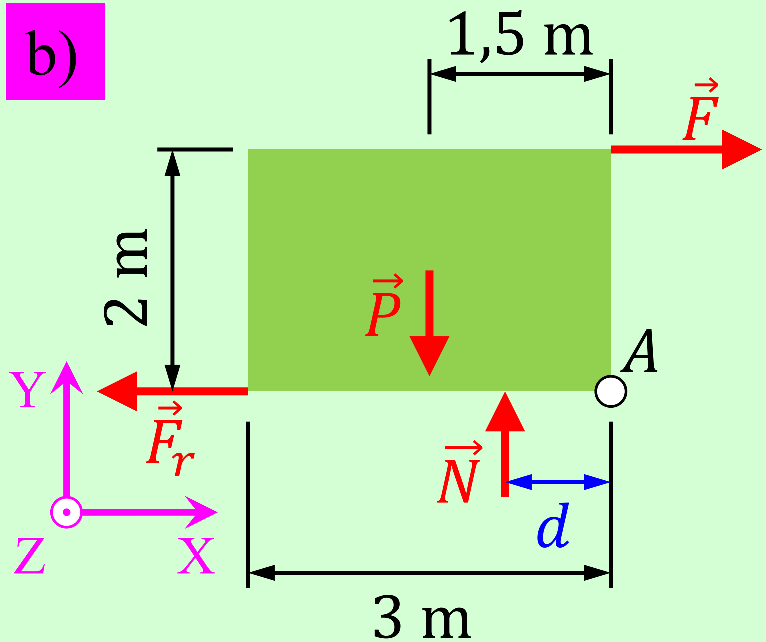
$$(4800; 0; 0) + (0; -6000; 0) + (0; N; 0) + (-F_r; 0; 0) = (0; 0; 0)$$

$$\begin{cases} 4800 - F_r = 0 \\ -6000 + N = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

De $\overrightarrow{M}_{\vec{F}} + \overrightarrow{M}_{\vec{P}} + \overrightarrow{M}_{\vec{N}} + \overrightarrow{M}_{\vec{F}_r} = \vec{0}$, utilizando únicamente la componente Z de la ecuación se obtiene

$$(-4800 \times 2) + 6000 \times 1{,}5 + (-Nd) + 0 = 0 \;\Rightarrow\; -600 - Nd = 0$$

b)



HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no desliza ni vuelca).

$$\begin{cases} 4800 - F_r = 0 \\ -6000 + N = 0 \\ -600 - Nd = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene

$$F_r = 4800\ \mathrm{N} \qquad N = 6000\ \mathrm{N} \qquad d = -0{,}1\ \mathrm{m}$$

¿Cómo se comprueba la hipótesis de no deslizamiento?

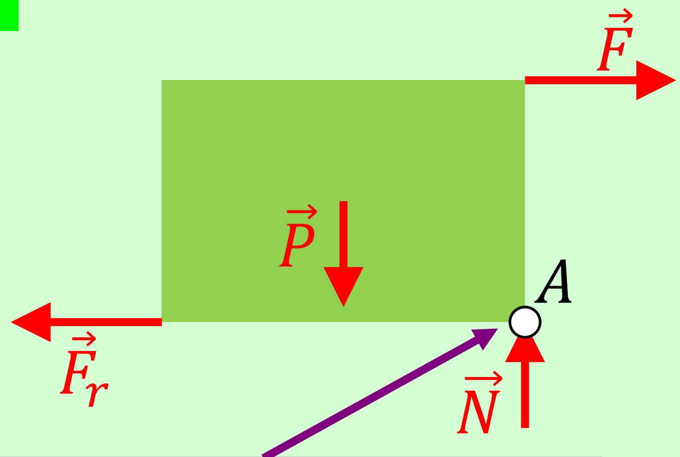
Puesto que μ es prácticamente infinito, también lo es $F_{r_{máx}} = \mu N$.

Por tanto, se cumple que $F_r \leq F_{r_{máx}}$.

¿Cómo se comprueba la hipótesis de no vuelco?

Es $d \notin [0; 3]$ m, quedando fuera del contorno exterior de la superficie de contacto. En consecuencia, el bloque vuelca, y $\vec{N}$ actúa en el único punto en contacto con el suelo, A.

c)



Actúa ahí porque la situación es de vuelco inminente.

HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no desliza).

Estamos estudiando la situación de vuelco inminente. Por tanto, sabemos que dicho vuelco aún no tiene lugar.

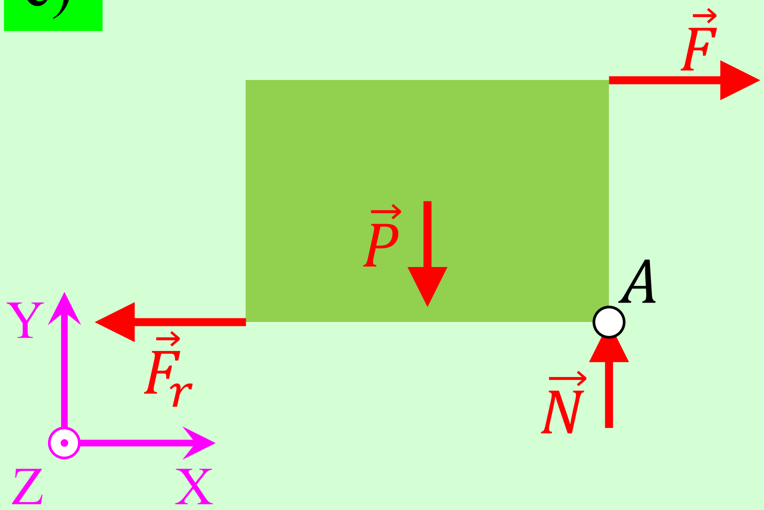
El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, el bloque en este caso.

Las fuerzas que actúan sobre el bloque son:

- $\vec{F}$: mencionada en el enunciado.
- $\vec{P}$: peso.
- $\vec{N}$: reacción normal.
- $\vec{F}_r$: fuerza de rozamiento.

Como consecuencia de la acción de estas fuerzas, y de acuerdo con la hipótesis adoptada, el bloque está en equilibrio.

c)



HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no desliza).

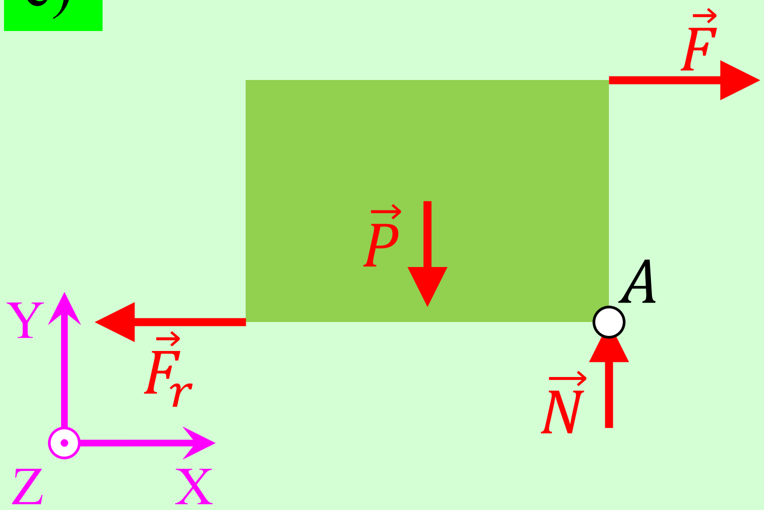
Hay que establecer un sistema de referencia, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.

De $\vec{P}$ se conocen su módulo, orientación y línea de acción.

De $\vec{F}$, $\vec{N}$ y $\vec{F}_r$ se conocen sus orientaciones y líneas de acción, pero no sus módulos, F, N y F_r.

Por tanto, tenemos 3 incógnitas: F, N y F_r. Necesitamos pues 3 ecuaciones.

c)



HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no desliza ni vuelca).

Aplicando las condiciones de equilibrio, y utilizando para los momentos el punto A (elección arbitraria), es

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r = \vec{0}$$

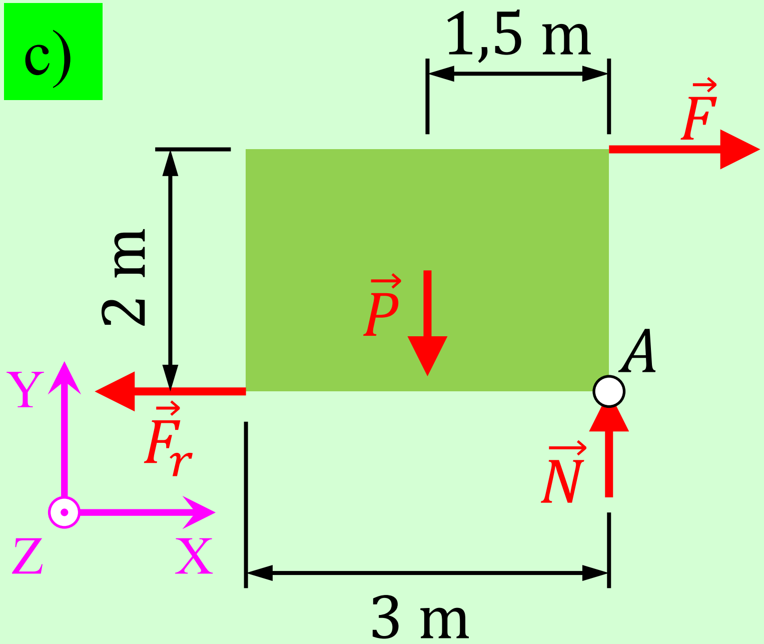
$$A \Rightarrow \vec{M}_{\vec{F}} + \vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{N}} + \vec{M}_{\vec{F}_r} = \vec{0}$$

De la primera expresión, resulta

$$(F; 0; 0) + (0; -6000; 0) + (0; N; 0) + (-F_r; 0; 0) = (0; 0; 0)$$

$$\begin{cases} F - F_r = 0 \\ -6000 + N = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

c)



HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no desliza ni vuelca).

Todos los momentos respecto al punto A tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación

$$\vec{M}_{\vec{F}} + \vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{N}} + \vec{M}_{\vec{F}_r} = \vec{0}$$

resulta

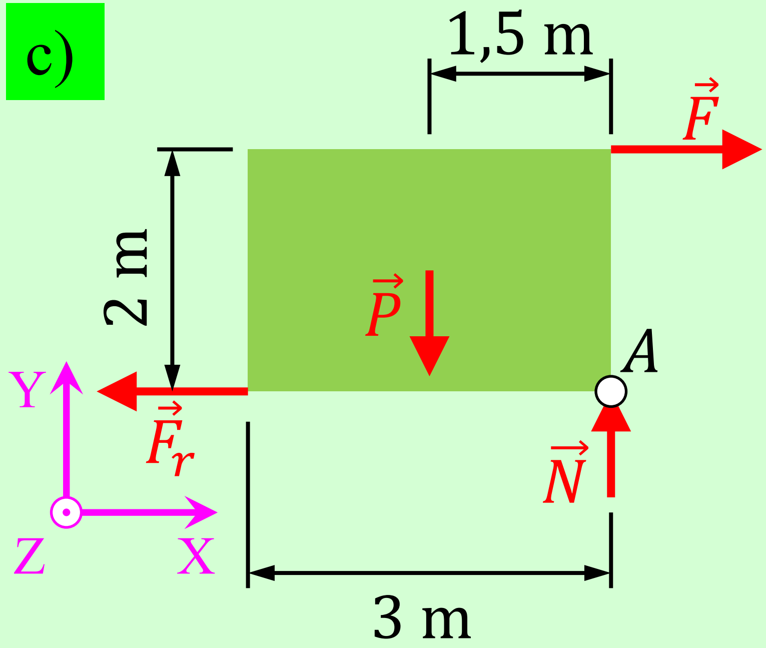
$$(-F \times 2) + 6000 \times 1{,}5 + 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow -2F + 9000 = 0$$

- Fuerza de módulo F.
- Brazo 2 m.
- Sentido hacia dentro del plano de la página.

Fuerzas de brazo 0 m.

- Fuerza de módulo 6000 N.
- Brazo 1,5 m.
- Sentido hacia fuera del plano de la página.

c)



HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no desliza ni vuelca).

$$\begin{cases} F - F_r = 0 \\ -6000 + N = 0 \\ -2F + 9000 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene

$F = 4500\ \mathrm{N}$ $\quad N = 6000\ \mathrm{N}$ $\quad F_r = 4500\ \mathrm{N}$

¿Cómo se comprueba la hipótesis de no deslizamiento?

Puesto que μ es prácticamente infinito, también lo es $F_{r\,máx} = \mu N$.

Por tanto, se cumple que $F_r \leq F_{r\,máx}$.

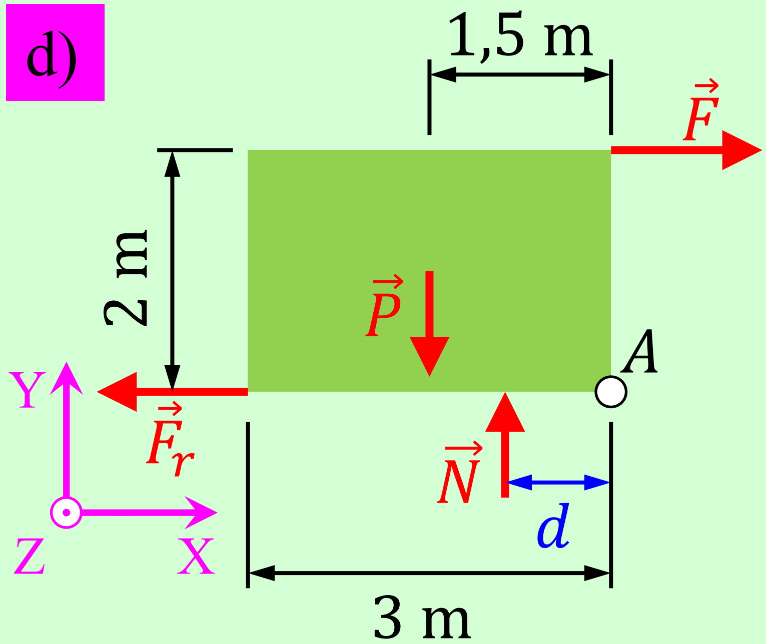
Se podría haber comenzado por el apartado (c), y así saber que en el apartado (a), con $F = 3000\ \mathrm{N} < 4500\ \mathrm{N}$, no había vuelco, y en el (b), con $F = 4800\ \mathrm{N} > 4500\ \mathrm{N}$, sí.

d)

El único cambio respecto al apartado (a) es el del valor del coeficiente de rozamiento, que aquí es 0,2 en lugar de prácticamente infinito.

Por tanto, el desarrollo es idéntico hasta inmediatamente antes de que se haga uso por primera vez de dicho valor.

A continuación se reproduce la página en la que eso sucede, marcando con una línea roja el límite a partir del cual el desarrollo varía.



HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no desliza ni vuelca).

$$\begin{cases} 1500 - F_r = 0 \\ -6000 + N = 0 \\ 6000 - Nd = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene

$$F_r = 1500\ \text{N} \qquad N = 6000\ \text{N} \qquad d = 1\ \text{m}$$

¿Cómo se comprueba la hipótesis de no deslizamiento?

$$\left.\begin{array}{l} F_r = 1500\ \text{N} \\ F_{r\,máx} = \mu N = 0{,}2 \times 6000 = 1200\ \text{N} \end{array}\right\} \text{Es } F_r > F_{r\,máx}$$

Por tanto, el bloque no vuelca (es $d \in [0; 3]$ m), pero sí desliza.

e)

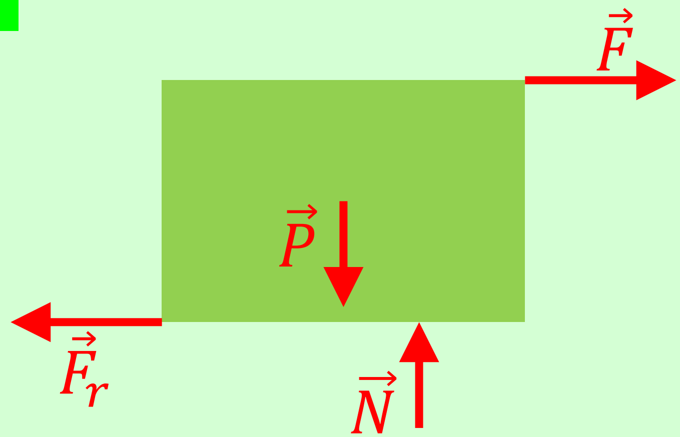
Los motivos por los que el bloque puede desequilibrarse son los que siguen.

- Vuelca. Ya sabemos (apartado (c)) que es inminente para $F = 4500$ N.
- Se alza del suelo. Es inminente si $N = 0$ N, ya que el módulo de la reacción normal no puede ser negativo. En nuestro caso es siempre $N = 6000$ N, por lo que no puede darse el caso.
- Desliza. Tenemos pendiente obtener el valor de F para el que el deslizamiento es inminente.

El desequilibrio se produce cuando tiene lugar cualquiera de estas circunstancias.

Vamos a analizar la situación que nos falta: el deslizamiento inminente.

e)



HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no vuelca).

Estamos estudiando la situación de deslizamiento inminente. Por tanto, sabemos que dicho deslizamiento aún no tiene lugar.

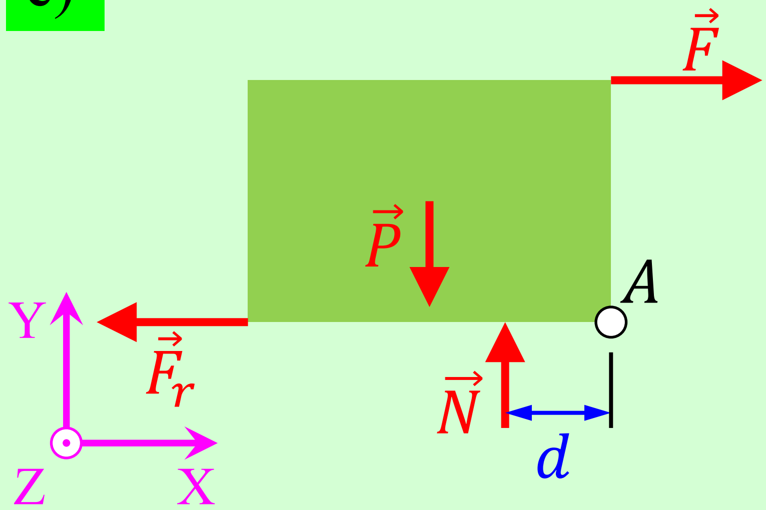
El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, el bloque en este caso.

Las fuerzas que actúan sobre el bloque son:

- $\vec{F}$: mencionada en el enunciado.
- $\vec{P}$: peso.
- $\vec{N}$: reacción normal.
- $\vec{F}_r$: fuerza de rozamiento.

Como consecuencia de la acción de estas fuerzas, y de acuerdo con la hipótesis adoptada, el bloque está en equilibrio.

e)



HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no vuelca).

Hay que establecer un sistema de referencia, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.

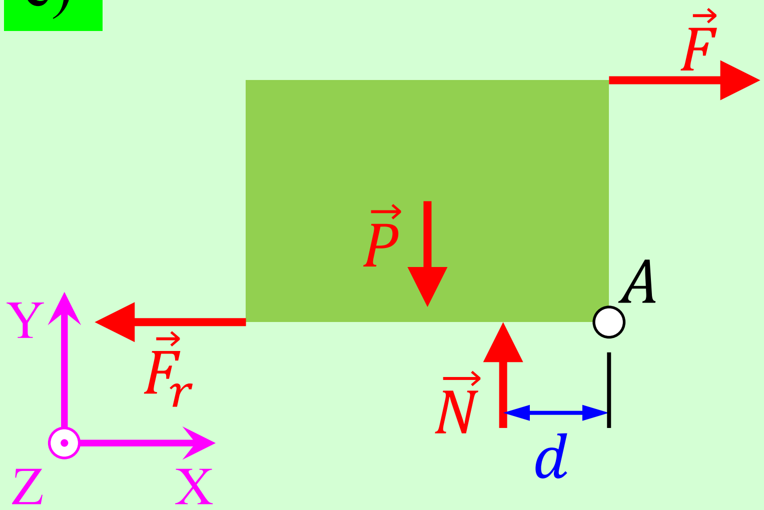
De $\vec{P}$ se conocen su módulo, orientación y línea de acción.

De $\vec{F}$ y $\vec{F}_r$ se conocen sus orientaciones y líneas de acción, pero no sus módulos F y F_r.

De $\vec{N}$ se conoce su orientación, pero no su módulo, N, ni su línea de acción, dada por su distancia d al punto A (elección arbitraria).

Por tanto, tenemos 4 incógnitas: F, F_r, N y d. Necesitamos pues 4 ecuaciones.

e)



HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no vuelca).

Aplicando las condiciones de equilibrio, y utilizando para los momentos el punto A (elección arbitraria), es

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r = \vec{0}$$

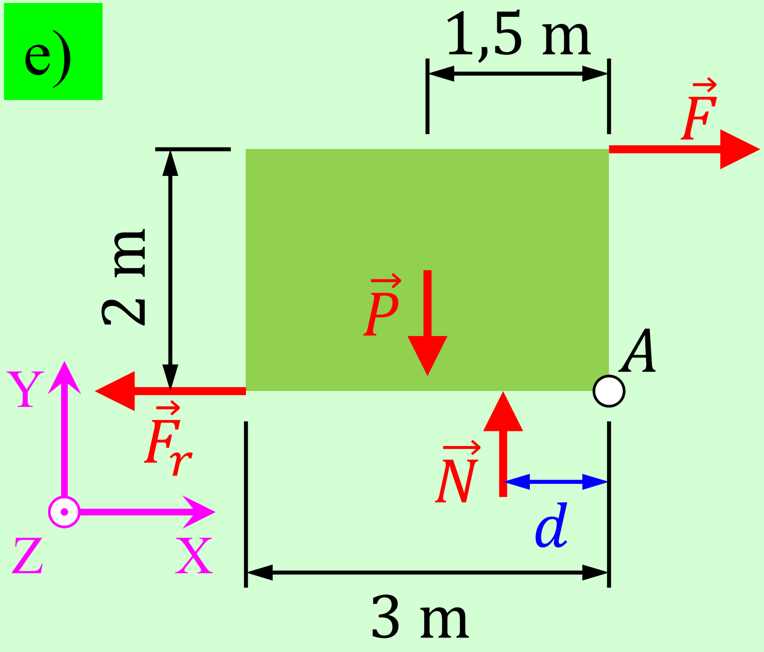
$$A \Rightarrow \vec{M}_{\vec{F}} + \vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{N}} + \vec{M}_{\vec{F}_r} = \vec{0}$$

De la primera expresión, resulta

$$(F; 0; 0) + (0; -6000; 0) + (0; N; 0) + (-F_r; 0; 0) = (0; 0; 0)$$

$$\begin{cases} F - F_r = 0 \\ -6000 + N = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

e)



HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no vuelca).

Todos los momentos respecto al punto A tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación

$$\vec{M}_{\vec{F}} + \vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{N}} + \vec{M}_{\vec{F}_r} = \vec{0}$$

resulta

$$(-F \times 2) + 6000 \times 1{,}5 + (-Nd) + 0 = 0 \Rightarrow -2F + 9000 - Nd = 0$$

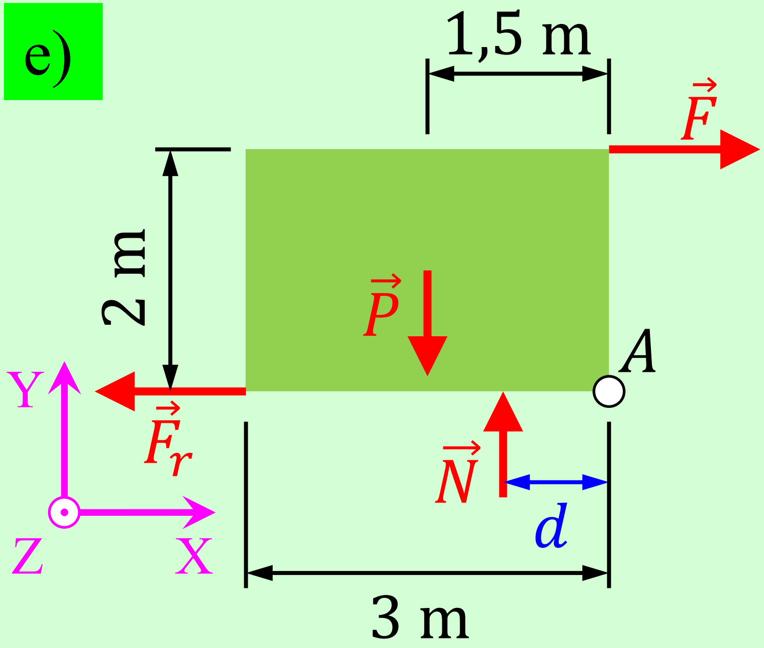
- Fuerza de módulo F.
- Brazo 2 m.
- Sentido hacia dentro del plano de la página.

- Fuerza de módulo 6000 N.
- Brazo 1,5 m.
- Sentido hacia fuera del plano de la página.

- Fuerza de módulo N.
- Brazo d.
- Sentido hacia dentro del plano de la página.

Fuerza de brazo 0 m.

e)

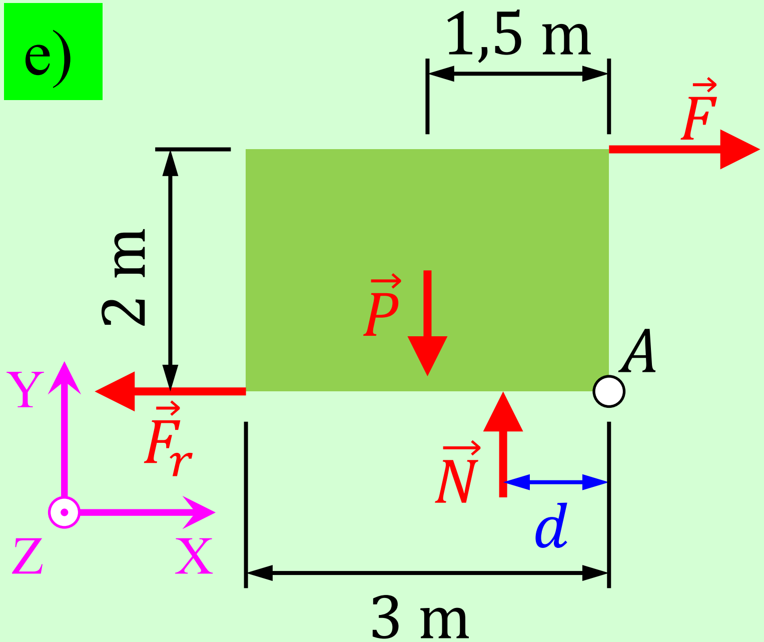


HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no vuelca).

La cuarta y última ecuación es la dada por la condición de deslizamiento inminente.

$$F_r = F_{r_{máx}} = \mu N = 0{,}2N$$

e)



HIPÓTESIS: El bloque está en equilibrio (no vuelca).

$$\begin{cases} F - F_r = 0 \\ -6000 + N = 0 \\ -2F + 9000 - Nd = 0 \\ F_r = 0{,}2N \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene

$F = 1200$ N $\quad F_r = 1200$ N $\quad N = 6000$ N $\quad d = 1{,}1$ m

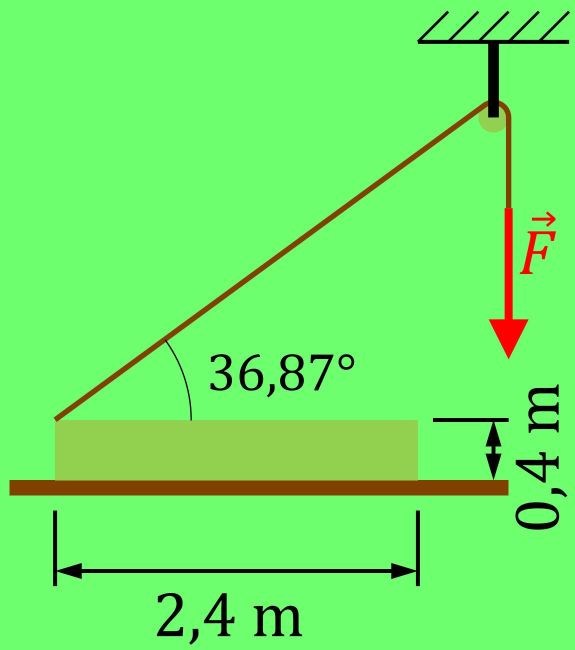
Existen dos formas de comprobar que el desequilibrio se alcanza por deslizamiento.

- El deslizamiento es inminente para $F = 1200$ N, menor que el valor $F = 4500$ N para el que el vuelco era inminente.
- En la situación de deslizamiento inminente se tiene $d \in [0; 3]$ m, por lo que aún no ha alcanzado la situación de vuelco inminente.

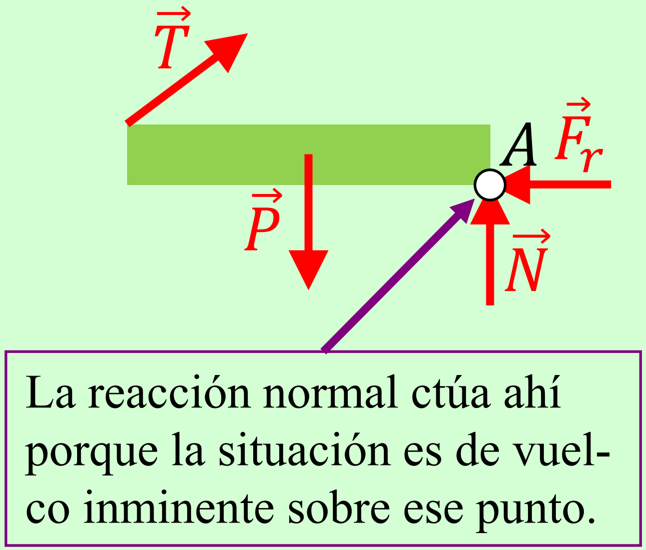
En resumen el desequilibrio es inminente, por deslizamiento, para $F = 1200$ N.

Ejercicio 8

Una columna tiene un peso de módulo 7700 N, y se encuentra tumbada sobre el suelo horizontal, con el que tiene un coeficiente de rozamiento prácticamente infinito. Para alzarla se dispone un cable ideal anclado en el punto mostrado en la figura. El cable pasa por una polea ideal, y se va a tirar de su otro extremo con una fuerza $\vec{F}$.



¿Qué valor ha de superar F para que la columna comience a alzarse? ¿Cuáles son los módulos de la reacción normal y de la fuerza de rozamiento cuando ese comienzo es inminente?



HIPÓTESIS: La columna está en equilibrio.

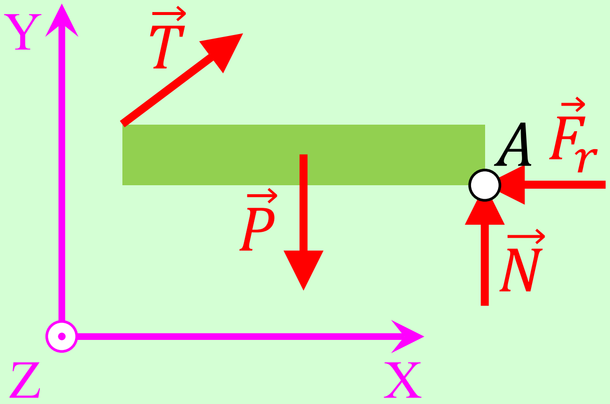
Estamos estudiando la situación de vuelco (deseado en este caso) inminente. Por tanto, sabemos que dicho vuelco aún no tiene lugar.

El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, la columna en este caso.

Las fuerzas que actúan sobre la columna son:

- $\vec{P}$: peso.
- $\vec{N}$: reacción normal.
- $\vec{F}_r$: fuerza de rozamiento.
- $\vec{T}$: fuerza ejercida por el cable.

Como consecuencia de la acción de estas fuerzas, y de acuerdo con la hipótesis adoptada, el bloque está en equilibrio.



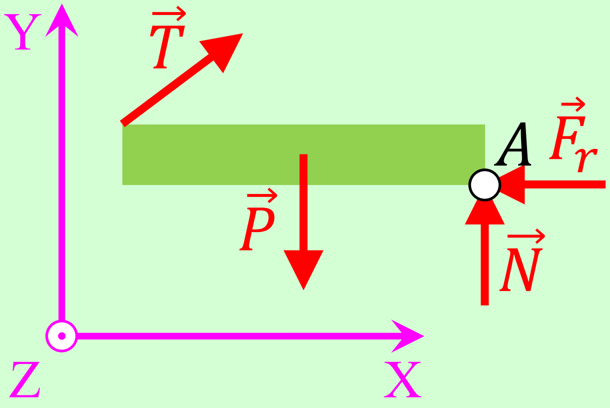
HIPÓTESIS: La columna está en equilibrio.

Hay que establecer un sistema de referencia dextrógiro, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.

De $\vec{P}$ se conocen su módulo, orientación y línea de acción.

De $\vec{N}$, $\vec{F}_r$ y $\vec{T}$ se conocen sus orientaciones y líneas de acción, pero no sus módulos, N, F_r y T.

Por tanto, tenemos 3 incógnitas: N, F_r y T. Necesitamos pues 3 ecuaciones.



HIPÓTESIS: La columna está en equilibrio.

Aplicando las condiciones de equilibrio, y utilizando para los momentos el punto A (elección arbitraria), es

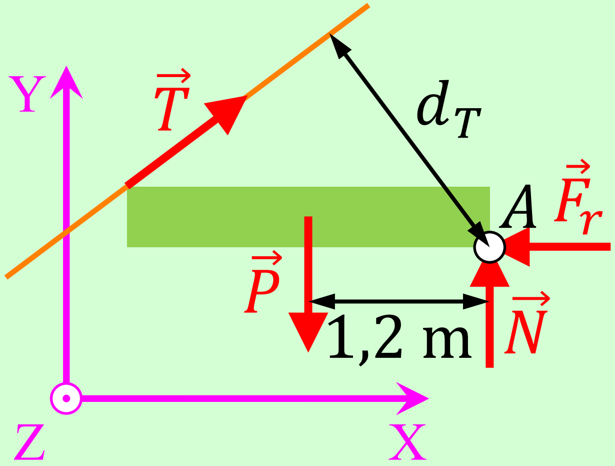
$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r + \vec{T} = \vec{0}$$

$$A \Rightarrow \vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{N}} + \vec{M}_{\vec{F}_r} + \vec{M}_{\vec{T}} = \vec{0}$$

De la primera expresión, resulta

$$(0; -7700; 0) + (0; N; 0) + (-F_r; 0; 0) +$$
$$+(T\cos 36{,}87°; T\,\mathrm{sen}\,36{,}87°; 0) = (0; 0; 0)$$

$$\begin{cases} -F_r + 0{,}8T = 0 \\ -7700 + N + 0{,}6T = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$



HIPÓTESIS: La columna está en equilibrio.

Todos los momentos respecto al punto A tienen componentes X e Y nulas.

Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación

$$\vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{N}} + \vec{M}_{\vec{F}_r} + \vec{M}_{\vec{T}} = \vec{0}$$

resulta

$$7700 \times 1{,}2 + 0 + 0 + [\,-T d_T\,] = 0$$

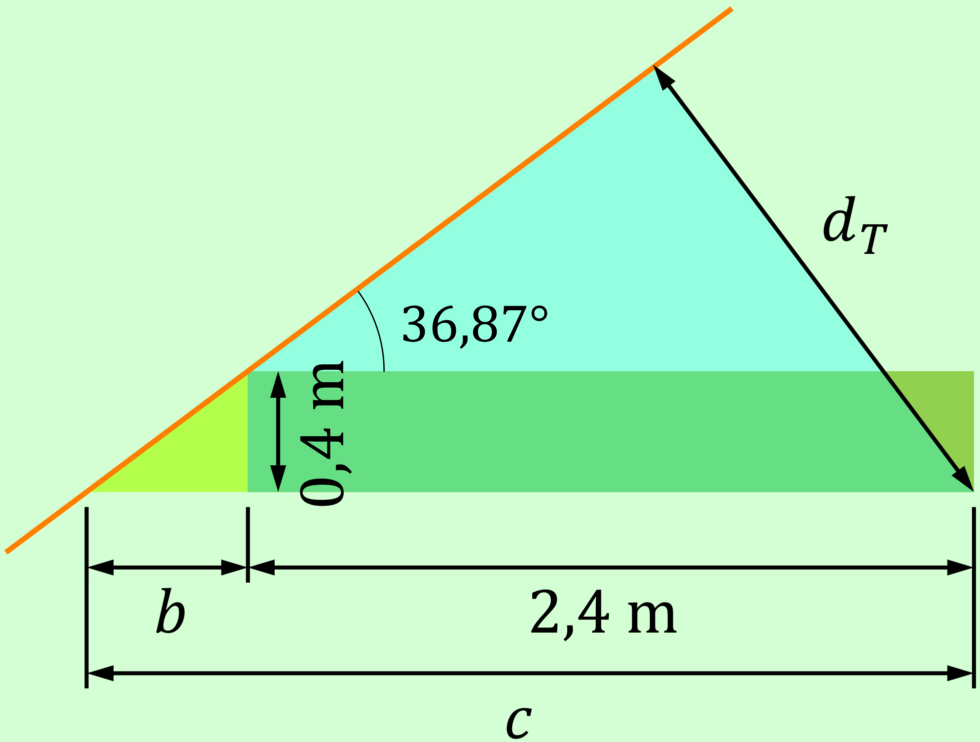
- Fuerza de módulo 7700 N.
- Brazo 1,2 m.
- Sentido hacia fuera del plano de la página.

Fuerzas de brazo 0 m.

- Fuerza de módulo T.
- Brazo d_T.
- Sentido hacia dentro del plano de la página.

¿Y cómo podemos obtener el valor de d_T?

El valor de d_T se puede obtener por trigonometría.



$$b = \frac{0{,}4}{\operatorname{tg} 36{,}87°} = 0{,}5333\ \text{m}$$

$$c = b + 2{,}4 = 0{,}5333 + 2{,}4 = \\ = 2{,}9333\ \text{m}$$

$$d_T = c \operatorname{sen} 36{,}87° = \\ = 2{,}9333 \operatorname{sen} 36{,}87° = \\ = 1{,}76\ \text{m}$$

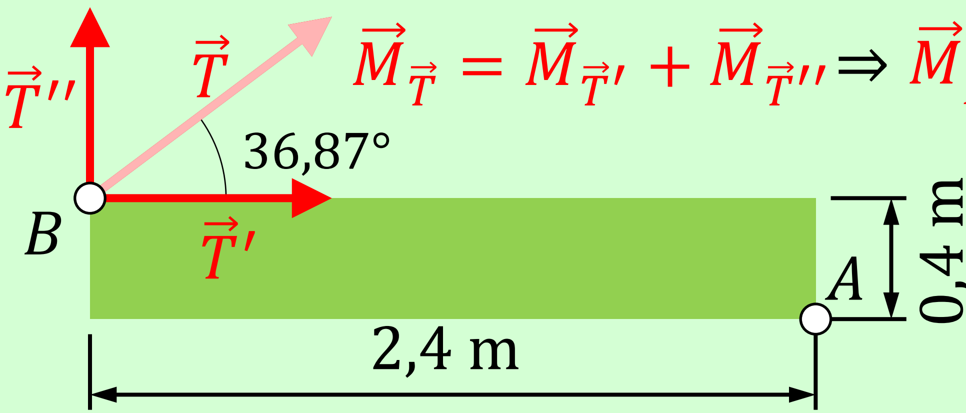
Por tanto, la componente Z de $\overrightarrow{M}_{\vec{T}}$ es $-T d_T = -1{,}76T$ (SI)

En consecuencia,

$$7700 \times 1{,}2 + 0 + 0 + [-1{,}76T] = 0 \Rightarrow 9240 - 1{,}76T = 0$$

Otra posibilidad es descomponer $\vec{T}$ en dos partes, $\vec{T}'$ y $\vec{T}''$, cuyos brazos sean sencillos de obtener.

Por el teorema de Varignon, el sistema formado por $\vec{T}'$ y $\vec{T}''$, concurrentes en B, es equivalente a $\vec{T}$. Por tanto, los momentos son idénticos.



$$\vec{M}_{\vec{T}} = \vec{M}_{\vec{T}'} + \vec{M}_{\vec{T}''} \Rightarrow \vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{N}} + \vec{M}_{\vec{F}_r} + \vec{M}_{\vec{T}'} + \vec{M}_{\vec{T}''} = \vec{0}$$

Utilizando únicamente la componente Z, es

$$7700 \times 1{,}2 + 0 + 0 +$$

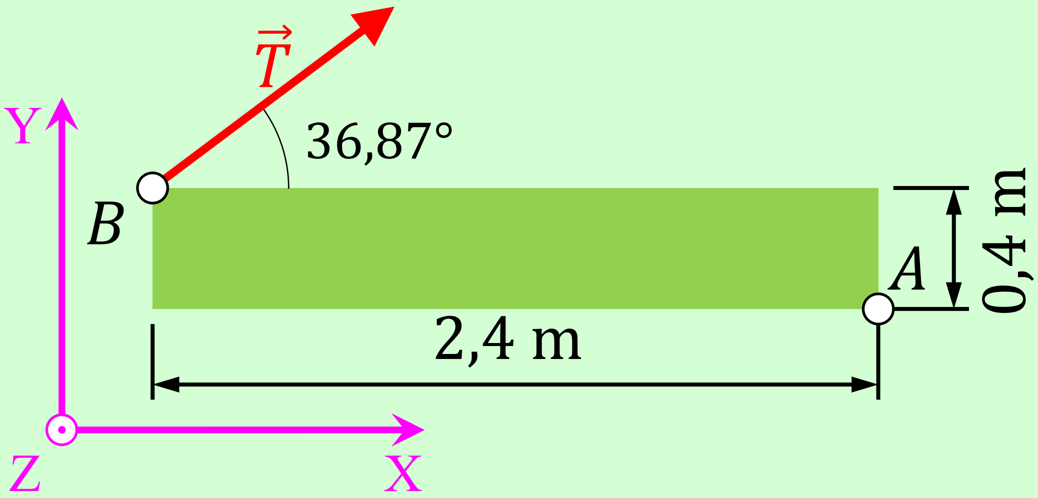
$$+[\,(-(T\cos 36{,}87°) \times 0{,}4) + (-(T \operatorname{sen} 36{,}87°) \times 2{,}4)] = 0$$

- Fuerza de módulo $T' = T\cos 36{,}87°$.
- Brazo 0,4 m.
- Sentido hacia dentro del plano de la página.

- Fuerza de módulo $T'' = T \operatorname{sen} 36{,}87°$.
- Brazo 2,4 m.
- Sentido hacia dentro del plano de la página.

Por tanto, $9240 + 0 + 0 - 0{,}32T - 1{,}44T = 0 \Rightarrow 9240 - 1{,}76T = 0$

Una última posibilidad es obtener el momento de $\vec{T}$ mediante el correspondiente producto vectorial.

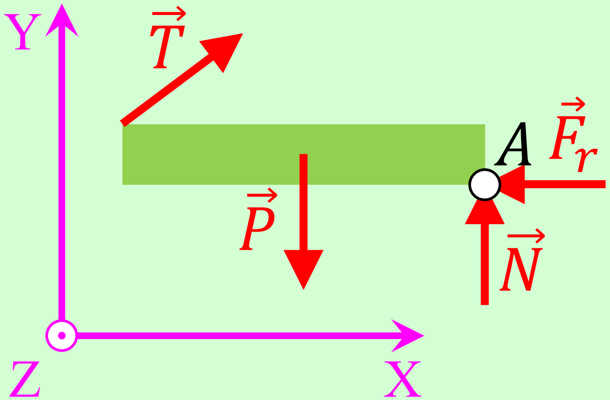


$$\vec{M}_{\vec{T}} = \overrightarrow{AB} \times \vec{T} = (-2{,}4; 0{,}4; 0) \times (T \cos 36{,}87°\,; T \operatorname{sen} 36{,}87°\,; 0) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2{,}4 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}8T & 0{,}6T & 0 \end{vmatrix} = (0; 0; -1{,}76T)$$

Utilizando únicamente la componente Z de $\vec{M}_{\vec{P}} + \vec{M}_{\vec{N}} + \vec{M}_{\vec{F}_r} + \vec{M}_{\vec{T}} = \vec{0}$, resulta $\;9240 + 0 + 0 + (-1{,}76T) = 0 \Rightarrow 9240 - 1{,}76T = 0$

HIPÓTESIS: La columna está en equilibrio.



$$\begin{cases} -F_r + 0{,}8T = 0 \\ -7700 + N + 0{,}6T = 0 \\ 9240 - 1{,}76T = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene

$N = 4550\ \mathrm{N}$ $\qquad F_r = 4200\ \mathrm{N}$ $\qquad T = 5250\ \mathrm{N}$

¿Cómo se comprueba la hipótesis de no deslizamiento?

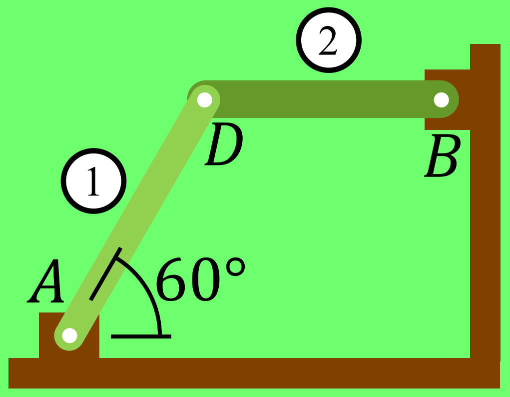
Puesto que μ es prácticamente infinito, también lo es $F_{r_{máx}} = \mu N$.
Por tanto, se cumple que $F_r \leq F_{r_{máx}}$.

Además, como se cumple que $N \geq 0\ \mathrm{N}$, tampoco se alza en el aire.
Como el vuelco es inminente, tampoco vuelca aún. En consecuencia, la hipótesis es correcta: la columna está en equilibrio.

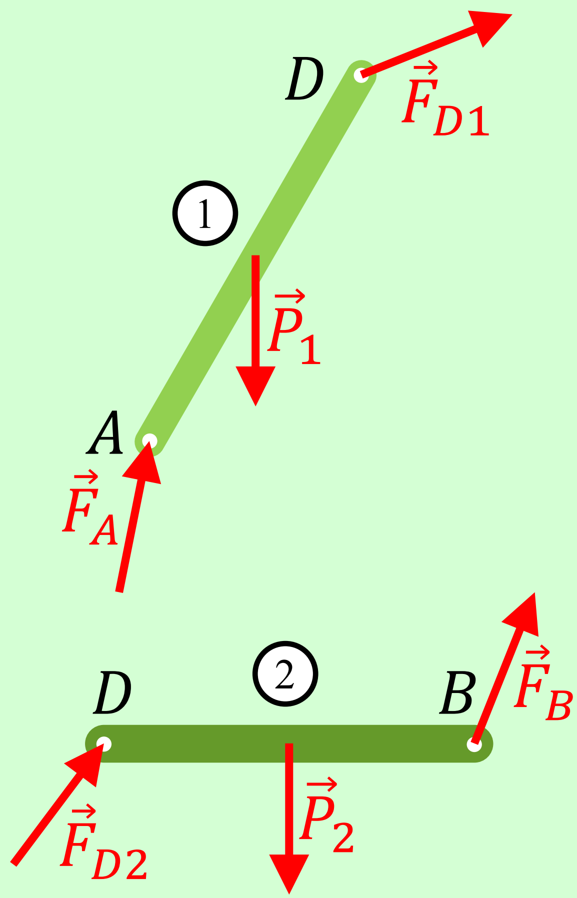
Por último, por ser el cable y la polea ideales, es $F = T = 5250\ \mathrm{N}$.
Ese es el valor que hay que superar para que la columna comience a alzarse.

Ejercicio 9

Sea el sistema de la figura, donde las barras están articuladas entre sí en el punto D, y a sendos puntos fijos A y B. La barra 1 tiene 1,8 m de longitud y peso de módulo 300 N. Los correspondientes valores de la barra 2 son 1,5 m y 200 N. ¿Qué fuerzas se ejercen sobre estas barras en las articulaciones?



El primer paso es realizar los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos implicados: las barras 1 y 2.

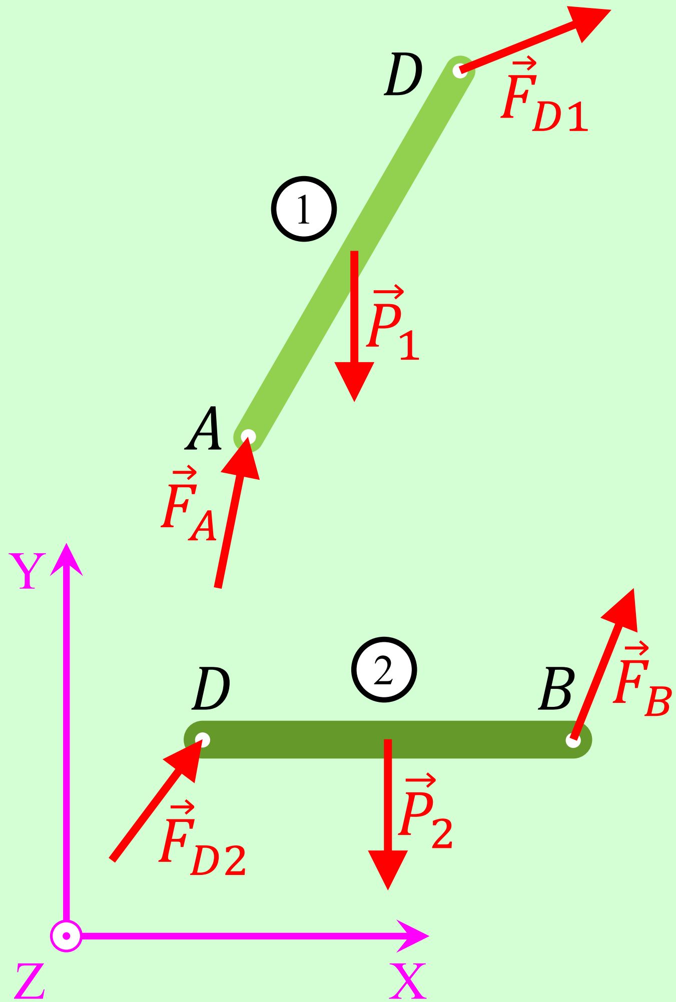


Las fuerzas que actúan son:

- $\vec{P}_1$: peso de la barra 1.
- $\vec{F}_A$: fuerza ejercida en la articulación A.
- $\vec{F}_{D1}$: fuerza ejercida en la articulación D sobre la barra 1.
- $\vec{P}_2$: peso de la barra 2.
- $\vec{F}_B$: fuerza ejercida en la articulación B.
- $\vec{F}_{D2}$: fuerza ejercida en la articulación D sobre la barra 2.

Como consecuencia de la acción de estas fuerzas, ambas barras están en equilibrio.

Hay que establecer un sistema de referencia dextrógiro, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.

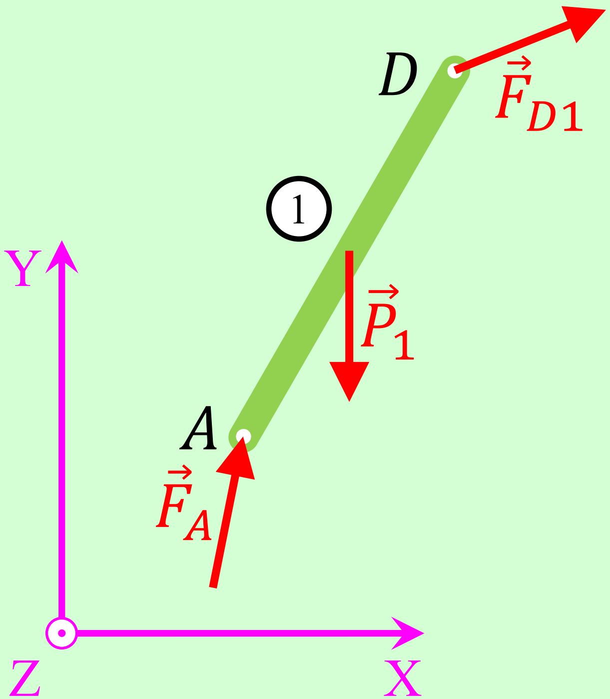


De $\vec{P}_1$ y $\vec{P}_2$ se conocen sus módulos y orientaciones.

De $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$, $\vec{F}_{D1}$ y $\vec{F}_{D2}$ no se conocen módulos ni orientaciones. Por tanto, se desconocen sus componentes X e Y, aunque sí se sabe que las Z es 0.

Por tanto, tenemos 8 incógnitas: F_{A_x}, F_{A_y}, F_{B_x}, F_{B_y}, F_{D1_x}, F_{D1_y}, F_{D2_x} y F_{D2_y}. Necesitamos pues 8 ecuaciones.

Aplicando las condiciones de equilibrio a la barra 1, y utilizando para los momentos el punto A (elección arbitraria), es



$$\vec{P}_1 + \vec{F}_A + \vec{F}_{D1} = \vec{0}$$

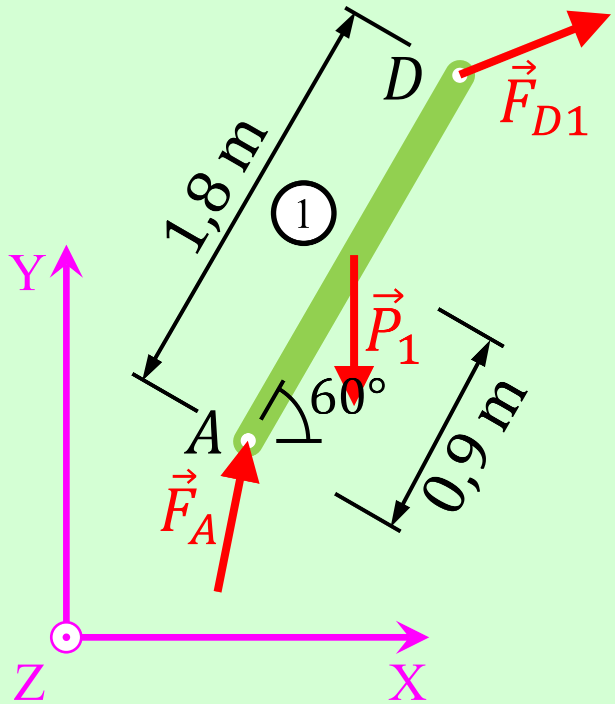
$$A \Rightarrow \overrightarrow{M}_{\vec{P}_1} + \overrightarrow{M}_{\vec{F}_A} + \overrightarrow{M}_{\vec{F}_{D1}} = \vec{0}$$

De la primera expresión, resulta

$$(0; -300; 0) + \left(F_{A_x}; F_{A_y}; 0\right) + \\ + \left(F_{D1_x}; F_{D1_y}; 0\right) = (0; 0; 0)$$

$$\begin{cases} F_{A_x} + F_{D1_x} = 0 \ (1) \\ -300 + F_{A_y} + F_{D1_y} = 0 \ (2) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Todos los momentos respecto al punto A tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación



$$\vec{M}_{\vec{P}_1} + \vec{M}_{\vec{F}_A} + \vec{M}_{\vec{F}_{D1}} = \vec{0}$$

resulta

Fuerza de brazo 0 m.

$$\left(-300 \times (0{,}9 \cos 60°)\right) + 0 +$$

$$+\left[\left(-F_{D1_x} \times (1{,}8 \operatorname{sen} 60°)\right) + \right.$$

$$\left. + F_{D1_y} \times (1{,}8 \cos 60°)\right] = 0$$

- Fuerza de módulo 300 N.
- Brazo 0,9 cos 60° (SI).
- Sentido hacia dentro del plano de la página.

- Componente F_{D1_x}.
- Brazo 1,8 sen 60° (SI).
- Si $F_{D1_x} > 0$, sentido hacia dentro del plano de la página.

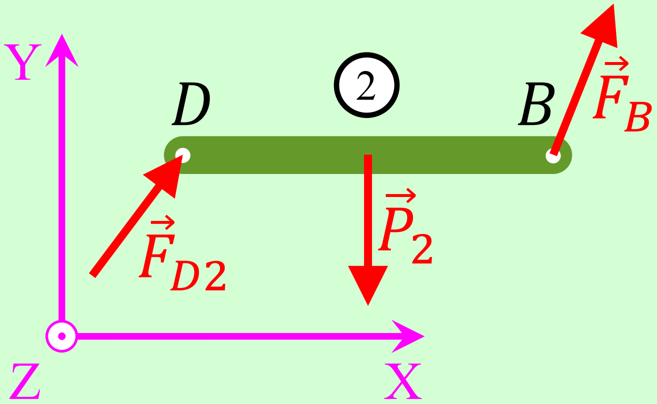
- Componente F_{D1_y}.
- Brazo 1,8 cos 60° (SI).
- Si $F_{D1_y} > 0$, sentido hacia fuera del plano de la página.

Por tanto, $-135 - 1{,}559 F_{D1_x} + 0{,}9 F_{D1_y} = 0$ (3)

Aplicando las condiciones de equilibrio a la barra 2, y utilizando para los momentos el punto B (elección arbitraria), es

$$\vec{P}_2 + \vec{F}_B + \vec{F}_{D2} = \vec{0}$$

$$B \Rightarrow \vec{M}_{\vec{P}_2} + \vec{M}_{\vec{F}_B} + \vec{M}_{\vec{F}_{D2}} = \vec{0}$$

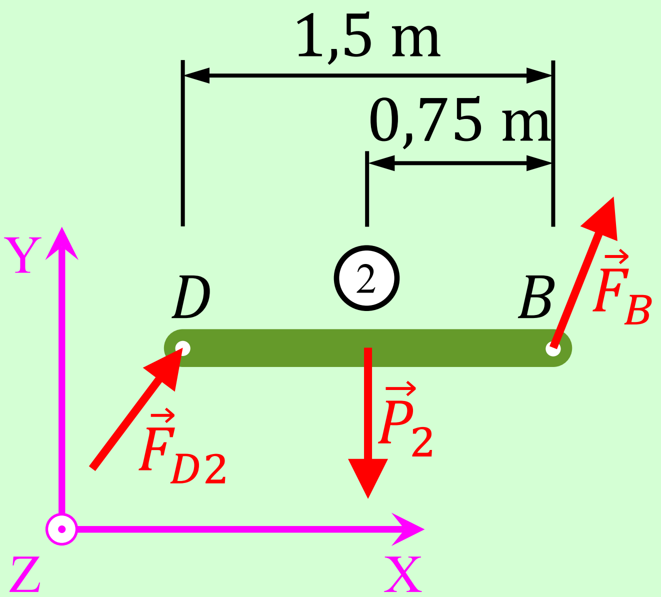


De la primera expresión, resulta

$$(0; -200; 0) + \left(F_{B_x}; F_{B_y}; 0\right) +$$
$$+ \left(F_{D2_x}; F_{D2_y}; 0\right) = (0; 0; 0)$$

$$\begin{cases} F_{B_x} + F_{D2_x} = 0 \ (4) \\ -200 + F_{B_y} + F_{D2_y} = 0 \ (5) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Todos los momentos respecto al punto B tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación



$$\overrightarrow{M}_{\vec{P}_2} + \overrightarrow{M}_{\vec{F}_B} + \overrightarrow{M}_{\vec{F}_{D2}} = \vec{0}$$

resulta

$$200 \times 0{,}75 + 0 + \\ + \left[0 + \left(-F_{D2_y} \times 1{,}5\right)\right] = 0$$

Fuerza de brazo 0 m.

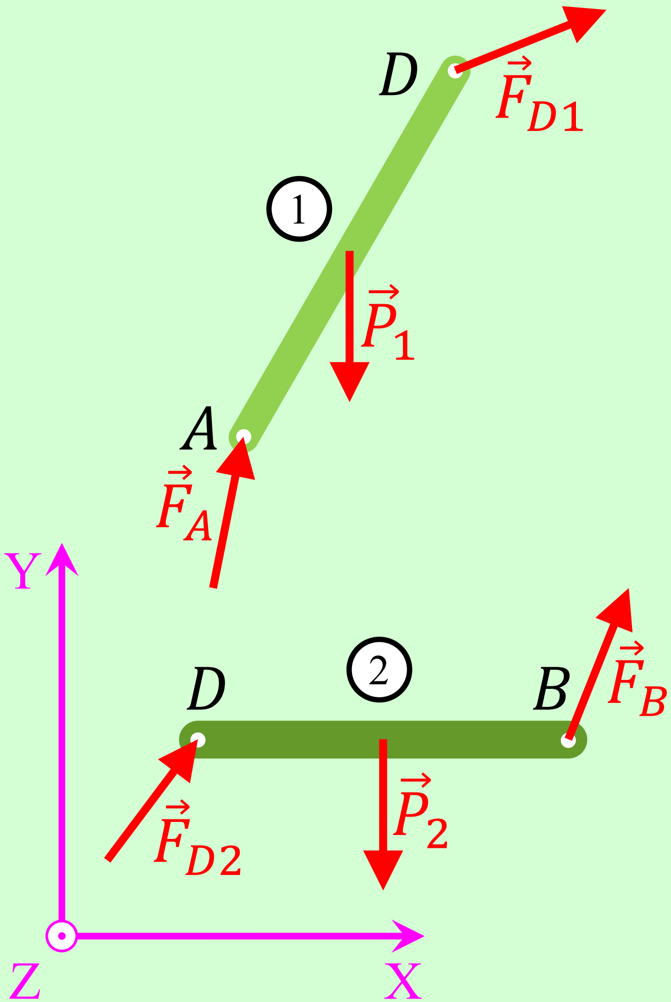
- Fuerza de módulo 200 N.
- Brazo 0,75 m.
- Sentido hacia fuera del plano de la página.

- Componente F_{D2_x}.
- Brazo 0 m.

- Componente F_{D2_y}.
- Brazo 1,5 m.
- Si $F_{D2_y} > 0$, sentido hacia dentro del plano de la página.

Por tanto, $150 - 1{,}5F_{D2_y} = 0$ (6)

Por último, nótese que $\vec{F}_{D1}$ y $\vec{F}_{D2}$ son las fuerzas que las barras se ejercen mutuamente a través de la articulación en D.



Por tanto, en virtud de la tercera ley de Newton, se tiene que

$$\vec{F}_{D1} = -\vec{F}_{D2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(F_{D1_x}; F_{D1_y}; 0\right) = -\left(F_{D2_x}; F_{D2_y}; 0\right)$$

$$\begin{cases} F_{D1_x} = -F_{D2_x} & (7) \\ F_{D1_y} = -F_{D2_y} & (8) \end{cases}$$

Recapitulando:

$$\begin{cases} F_{A_x} + F_{D1_x} = 0 \text{ (1)} \\ -300 + F_{A_y} + F_{D1_y} = 0 \text{ (2)} \\ -135 - 1{,}559F_{D1_x} + 0{,}9F_{D1_y} = 0 \text{ (3)} \\ F_{B_x} + F_{D2_x} = 0 \text{ (4)} \\ -200 + F_{B_y} + F_{D2_y} = 0 \text{ (5)} \\ 150 - 1{,}5F_{D2_y} = 0 \text{ (6)} \\ F_{D1_x} = -F_{D2_x} \text{ (7)} \\ F_{D1_y} = -F_{D2_y} \text{ (8)} \end{cases}$$

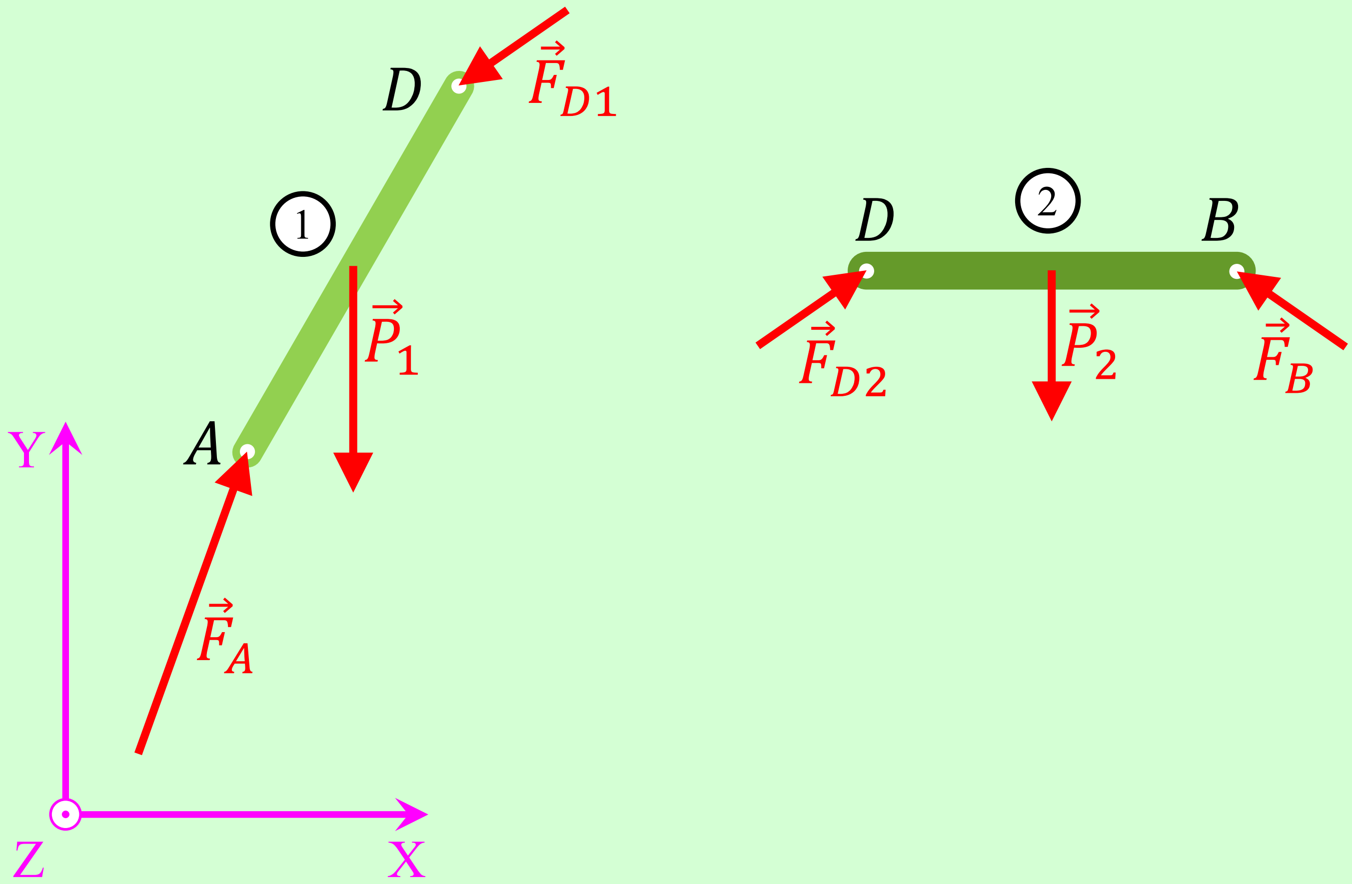
Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$F_{A_x} = 144{,}3 \text{ N}$$
$$F_{A_y} = 400 \text{ N}$$
$$F_{B_x} = -144{,}3 \text{ N}$$
$$F_{B_y} = 100 \text{ N}$$
$$F_{D1_x} = -144{,}3 \text{ N}$$
$$F_{D1_y} = -100 \text{ N}$$
$$F_{D2_x} = 144{,}3 \text{ N}$$
$$F_{D2_y} = 100 \text{ N}$$

Por tanto, las fuerzas ejercidas sobre las barras en las articulaciones son:

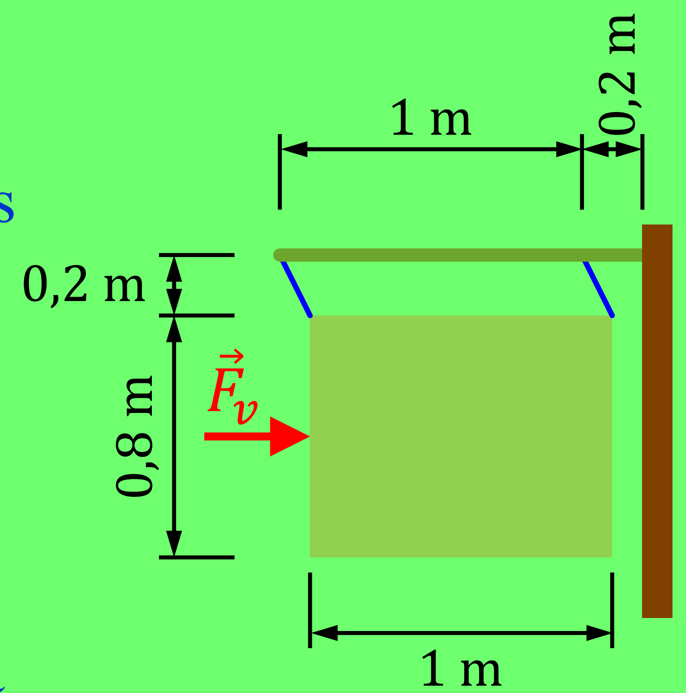
$$\vec{F}_A = (144{,}3; 400; 0) \text{ N} \qquad \vec{F}_{D1} = (-144{,}3; -100; 0) \text{ N}$$
$$\vec{F}_B = (-144{,}3; 100; 0) \text{ N} \qquad \vec{F}_{D2} = (144{,}3; 100; 0) \text{ N}$$

A continuación aparecen representadas las fuerzas actuantes, a escala y con sus orientaciones correctas.



Ejercicio 10

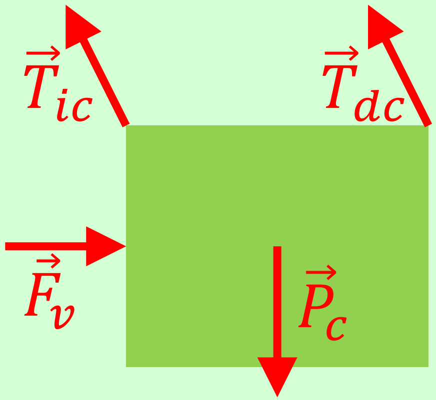
Sea el sistema de la figura, donde un cartel está colgando, mediante dos cables ideales, de una barra horizontal empotrada en una pared. Los módulos de los pesos del cartel y de la barra son 200 N y 50 N, respectivamente. Sobre el cartel actúa un viento cuya acción equivale a una fuerza $\vec{F}_v$ horizontal hacia la derecha de módulo 72,79 N, aplicada en el punto medio del borde izquierdo.



a) Analizando el cartel obténgase, en el estado de equilibrio, los módulos T_i y T_d de las tensiones en los cables izquierdo y derecho, respectivamente, y el ángulo θ que estos forman con la vertical.

b) Analizando la barra obténgase, en el estado de equilibrio, la fuerza y el momento a los que equivale el sistema de fuerzas que actúan en el empotramiento.

a) El primer paso es realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, el cartel en este caso.

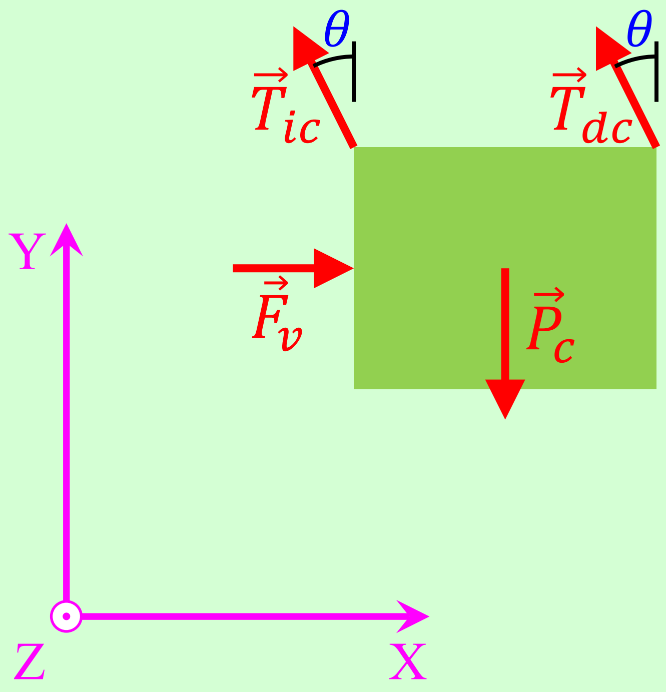


Las fuerzas que actúan sobre el cartel son:

- $\vec{P}_c$: peso del cartel.
- $\vec{F}_v$: fuerza equivalente a las ejercidas por el viento sobre el cartel.
- $\vec{T}_{ic}$: fuerza ejercida por el cable izquierdo sobre el cartel.
- $\vec{T}_{dc}$: fuerza ejercida por el cable derecho sobre el cartel.

Como consecuencia de la acción de estas fuerzas, el cartel está en equilibrio.

Hay que establecer un sistema de referencia dextrógiro, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.

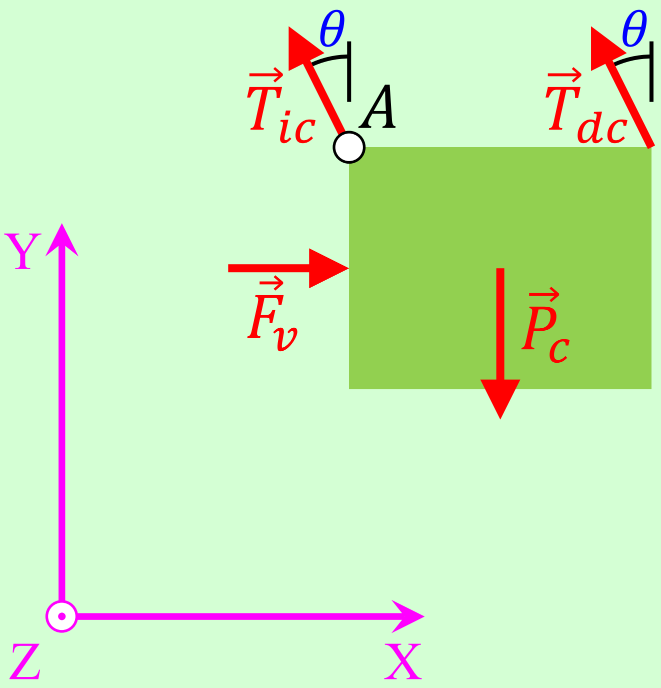


De $\vec{P}_c$ y $\vec{F}_v$ se conocen sus módulos y orientaciones.

De $\vec{T}_{ic}$ y $\vec{T}_{dc}$ no se conocen módulos ni orientaciones. Sin embargo, sí se sabe que ambas fuerzas tienen la misma orientación, que corresponde con el ángulo θ desconocido para el que el cartel se encuentra en equilibrio.

Por tanto, tenemos 3 incógnitas: T_{ic}, T_{dc} y θ. Necesitamos pues 3 ecuaciones.

Aplicando las condiciones de equilibrio al cartel, y utilizando para los momentos el punto A (elección arbitraria), es



$$\vec{P}_c + \vec{F}_v + \vec{T}_{ic} + \vec{T}_{dc} = \vec{0}$$

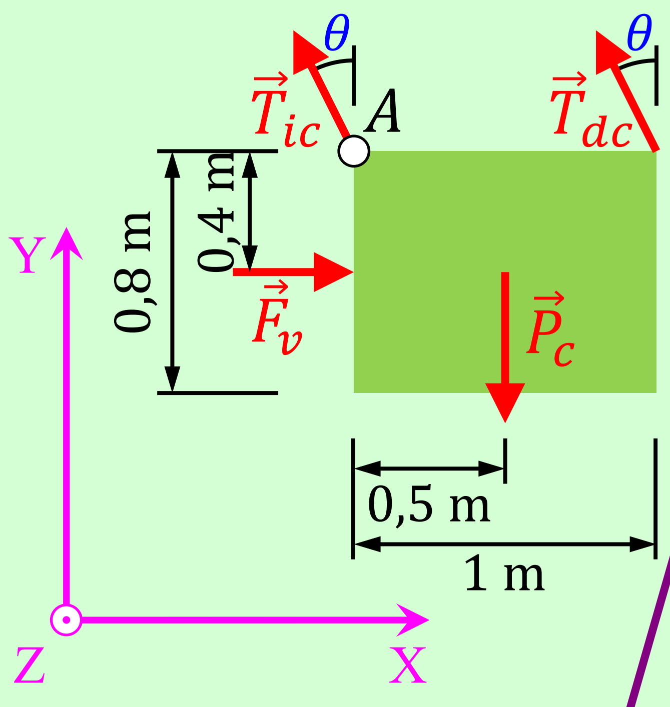
$$A \Rightarrow \vec{M}_{\vec{P}_c} + \vec{M}_{\vec{F}_v} + \vec{M}_{\vec{T}_{ic}} + \vec{M}_{\vec{T}_{dc}} = \vec{0}$$

De la primera expresión, resulta

$$(0; -200; 0) + (72{,}79; 0; 0) +$$
$$+(-T_{ic} \operatorname{sen} \theta \,; T_{ic} \cos \theta \,; 0) +$$
$$+(-T_{dc} \operatorname{sen} \theta \,; T_{dc} \cos \theta \,; 0) = (0; 0; 0)$$

$$\begin{cases} 72{,}79 - T_{ic} \operatorname{sen} \theta - T_{dc} \operatorname{sen} \theta = 0 \\ -200 + T_{ic} \cos \theta + T_{dc} \cos \theta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Todos los momentos respecto al punto A tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación



$$\vec{M}_{\vec{P}_c} + \vec{M}_{\vec{F}_v} + \vec{M}_{\vec{T}_{ic}} + \vec{M}_{\vec{T}_{dc}} = \vec{0}$$

resulta

Fuerza de brazo 0 m.

$$(-200 \times 0{,}5) + 72{,}79 \times 0{,}4 + 0 +$$

$$+ [(T_{dc} \operatorname{sen} \theta) \times 0 + (T_{dc} \cos \theta) \times 1] = 0$$

- Componente T_{dc} sen θ.
- Brazo 0 m.

- Fuerza de módulo 200 N.
- Brazo 0,5 m.
- Sentido hacia dentro del plano de la página.

- Fuerza de módulo 72,79 N.
- Brazo 0,4 m.
- Sentido hacia fuera del plano de la página.

- Componente T_{dc} cos θ.
- Brazo 1 m.
- Sentido hacia fuera del plano de la página.

Por tanto, $-70{,}88 + T_{dc} \cos \theta = 0$

Recapitulando:

$$\begin{cases} 72{,}79 - T_{ic}\,\mathrm{sen}\,\theta - T_{dc}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \\ -200 + T_{ic}\cos\theta + T_{dc}\cos\theta = 0 \\ -70{,}88 + T_{dc}\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene

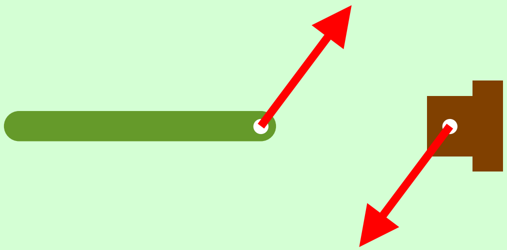
$$\theta = 20{,}00°$$

$$T_{ic} = 137{,}4\ \mathrm{N}$$

$$T_{dc} = 75{,}43\ \mathrm{N}$$

b)

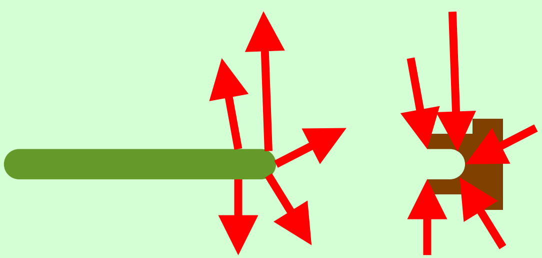
Una articulación impide el desplazamiento relativo entre los sólidos en contacto.



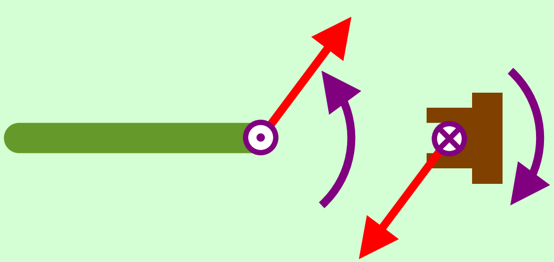
Esto se consigue porque se ejercen mutuamente las fuerzas necesarias, opuestas entre sí en virtud de la tercera ley de Newton.

Una articulación sí permite el giro relativo entre los sólidos.

Un empotramiento impide tanto el desplaza-miento como el giro relativos entre los sólidos en contacto.

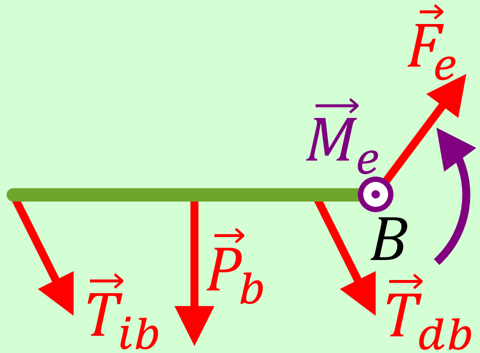


Esto se consigue porque se ejercen mutuamente las fuerzas necesarias, opuestas entre sí en virtud de la tercera ley de Newton.



El sistema de fuerzas que actúa sobre cada uno de los sólidos es equivalente a su resultante más el correspondiente momento.

Vamos a realizar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo objeto de análisis, la barra en este caso.



Las fuerzas que actúan sobre la barra son:

$\vec{P}_b$: peso de la barra.

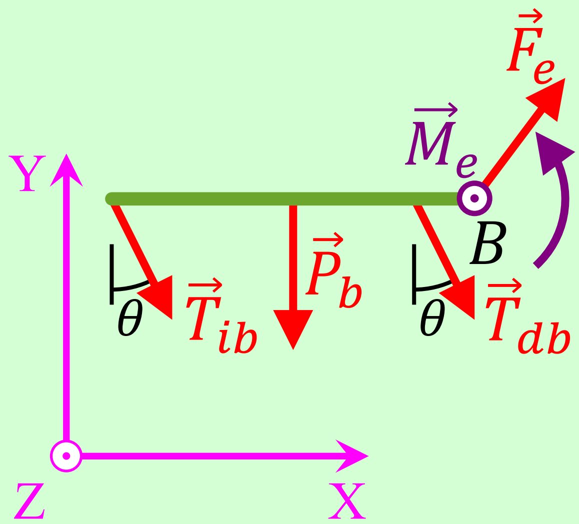
$\vec{T}_{ib}$: fuerza ejercida por el cable izquierdo sobre la barra.

$\vec{T}_{db}$: fuerza ejercida por el cable derecho sobre la barra.

Además, actúan las fuerzas ejercidas sobre la barra en el empotramiento en B, que equivalen a su resultante $\vec{F}_e$ más su correspondiente momento $\vec{M}_e$.

Como consecuencia de estas acciones, la barra está en equilibrio.

Hay que establecer un sistema de referencia dextrógiro, si el enunciado no especifica uno. Aquí hemos elegido el que se muestra en la figura.



De $\vec{P}_b$ se conocen su módulo y orientación.

De $\vec{T}_{ic}$ y $\vec{T}_{dc}$ se conocen sus módulos ya que, al ser cables ideales, se tiene que

$T_{ib} = T_{ic} = 137{,}4$ N ; $T_{db} = T_{dc} = 75{,}43$ N

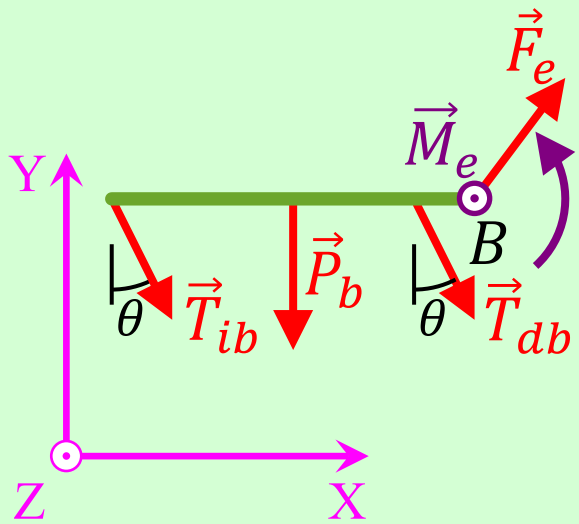
También se conocen sus orientaciones, puesto que ya se sabe que $\theta = 20{,}00°$.

De $\vec{F}_e$ no se conocen módulo ni orientación. Por tanto, se desconocen sus componentes X e Y, aunque sí se sabe que la Z es 0.

De $\vec{M}_e$ se sabe que es perpendicular al plano de la página, pero no si su sentido es hacia dentro o hacia fuera. Por tanto, se desconoce su componente Z, aunque sí se sabe que la X y la Y son 0.

Por tanto, tenemos 3 incógnitas: F_{e_x}, F_{e_y} y M_{e_z}. Necesitamos pues 3 ecuaciones.

Aplicando las condiciones de equilibrio a la barra, y utilizando para los momentos el punto B (elección arbitraria), es



$$\vec{P}_b + \vec{F}_e + \vec{T}_{ib} + \vec{T}_{db} = \vec{0}$$

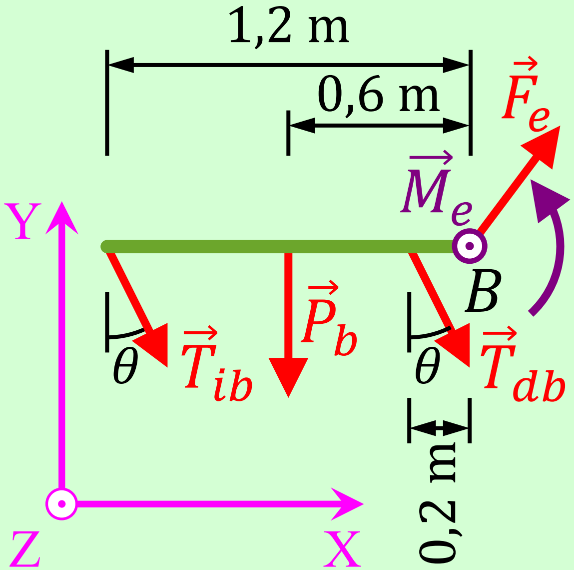
$$B \Rightarrow \vec{M}_{\vec{P}_b} + \underbrace{\vec{M}_{\vec{F}_e} + \vec{M}_e}_{\text{Momento de las fuerzas ejercidas sobre la barra en el empotramiento.}} + \vec{M}_{\vec{T}_{ib}} + \vec{M}_{\vec{T}_{db}} = \vec{0}$$

De la primera expresión, resulta

$$(0;-50;0) + \left(F_{e_x}; F_{e_y}; 0\right) +$$
$$+(137{,}4 \text{ sen } 20{,}00°; -137{,}4 \text{ sen } 20{,}00°; 0) +$$
$$+(75{,}43 \text{ sen } 20{,}00°; -75{,}43 \text{ sen } 20{,}00°; 0) =$$
$$= (0;0;0)$$

$$\begin{cases} F_{e_x} + 72{,}79 = 0 \\ F_{e_y} - 250{,}0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Todos los momentos respecto al punto B tienen componentes X e Y nulas. Utilizando únicamente la componente Z de la ecuación



$$\vec{M}_{\vec{P}_b} + \vec{M}_{\vec{F}_e} + \vec{M}_e + \vec{M}_{\vec{T}_{ib}} + \vec{M}_{\vec{T}_{db}} = \vec{0}$$

resulta

- Componente T_{ib} sen θ.
- Brazo 0 m.

- Componente $T_{ib} \cos\theta$.
- Brazo 1,2 m.
- Sentido hacia fuera del plano de la página.

$$50 \times 0{,}6 + 0 + M_{e_z} +$$
$$+ [(137{,}4 \operatorname{sen} 20{,}00°) \times 0 +$$
$$+(137{,}4 \operatorname{sen} 20{,}00°) \times 1{,}2] +$$
$$+ [(75{,}43 \operatorname{sen} 20{,}00°) \times 0 +$$
$$+(75{,}43 \operatorname{sen} 20{,}00°) \times 0{,}2] +$$

- Fuerza de módulo 50 N.
- Brazo 0,6 m.
- Sentido hacia fuera del plano de la página.

Fuerza de brazo 0 m.

- Componente T_{db} sen θ.
- Brazo 0 m.

- Componente $T_{db} \cos\theta$.
- Brazo 0,2 m.
- Sentido hacia fuera del plano de la página.

Por tanto, $M_{e_z} + 199{,}1 = 0$

Recapitulando:

$$\begin{cases} F_{e_x} + 72{,}79 = 0 \\ F_{e_y} - 250{,}0 = 0 \\ M_{e_z} + 199{,}1 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene

$$F_{e_x} = -72{,}79\ \mathrm{N}$$
$$F_{e_y} = 250{,}0\ \mathrm{N}$$
$$M_{e_z} = -199{,}1\ \mathrm{N \cdot m}$$

Por tanto,

$$\vec{F}_e = (-72{,}79; 250; 0)\ \mathrm{N}$$
$$\vec{M}_e = (0;\ 0; -199{,}1)\mathrm{N \cdot m}$$