

**Modelización de la volatilidad condicional
en índices bursátiles. Comparativa modelo
Egarch versus Red Neuronal
Backpropagation**

JAVIER OLIVER MUNCHARAZ

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Departamento de Economía y Ciencias Sociales



**UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA**

**MODELIZACIÓN DE LA VOLATILIDAD CONDICIONAL
EN ÍNDICES BURSÁTILES**

**COMPARATIVA MODELO EGARCH VERSUS RED
NEURONAL BACKPROPAGATION**

TESIS DOCTORAL

Presentada por:

Javier Oliver Muncharaz

Dirigida por:

Dr. Fernando García García

Dr. Francisco Guijarro Martínez

Valencia, Septiembre de 2013

Colección Tesis Doctorales

© Javier Oliver Muncharaz

© 2015, de la presente edición: Editorial Universitat Politècnica de València
Telf.: 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es

ISBN: 978-84-9048-387-2 (versión impresa)

Queda prohibida la reproducción, distribución, comercialización, transformación, y en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de todo o parte de los contenidos de esta obra sin autorización expresa y por escrito de sus autores.

Agradecimientos

En primer lugar quiero mostrar mi agradecimiento a mis directores D. Fernando García García y D. Francisco Guijarro Martínez por su magnífica dirección y gran ayuda con sus aportaciones y comentarios que, sin duda alguna, he tomado en gran consideración para la elaboración y desarrollo de esta Tesis.

También quiero agradecer a toda mi familia su apoyo durante toda mi vida tanto en el ámbito académico como en el ámbito profesional y personal.

Y, por encima de todo, a mi mujer M^a Carmen por estar en todo momento dándome ánimo para realizar el presente trabajo apoyándome en los momentos de flaqueza.

Resumen

El estudio de la volatilidad condicional es necesario para una correcta valoración del riesgo de los activos financieros (acciones, bonos, índices,...) y productos derivados (futuros y opciones). Una buena predicción de dicha volatilidad es necesaria, por ejemplo, para la diversificación de carteras, valoración de opciones financieras, medidas de riesgo como el VaR,...Por tanto, es necesario construir modelos capaces de estimar dicha volatilidad. Actualmente, los modelos econométricos GARCH son los más utilizados para predecir la volatilidad condicional. En el presente trabajo se ha estudiado la volatilidad condicional para diversos índices bursátiles, seleccionando un modelo de la familia ARMA-GARCH. Se ha comparado inicialmente un modelo general con el modelo ARMA-EGARCH, seleccionando finalmente este modelo dado que éste recoge las asimetrías existentes en la volatilidad.

Por otro lado, las redes neuronales, y en concreto, la red Backpropagation, pueden ser una alternativa para la predicción de la volatilidad. En el presente trabajo se realiza una comparativa entre el modelo econométrico seleccionado y la red neuronal, demostrando que las redes obtienen mejores resultados en la predicción de la volatilidad condicional en los casos estudiados. El estudio se ha realizado para varios índices bursátiles con diferentes tamaños y zonas geográficas y con datos de baja y alta frecuencia.

Resum

L'estudi de volatilitat condicional és necessari per a una correcta avaluació del risc d'actius financers (accions, bons, índexs bursàtils,...) i productes derivats (futurs i opcions). Una predicció bona d'aquesta volatilitat s'exigeix, per exemple, per la diversificació de carteres, valoració d'opcions financeres, mesures de risc com el VaR....Per tant, és necessari construir models capaços d'estimar la volatilitat. En la actualitat, els models econòmics GARCH són els més utilitzats per predir la volatilitat condicional. En aquest treball s'ha estudiat la volatilitat condicional per diversos índexs bursàtils amb un model ARMA-GARCH. Inicialment s'ha comparat un model general amb el model ARMA-EGARCH, seleccionant finalment aquest últim, ja que arreplega les asimetries existents en la volatilitat dels índexs.

D'altra banda, les xarxes neuronals i en particular, la xarxa de tipus Backpropagation, poden ser una alternativa per a la predicció de volatilitat. En el present treball és fa una comparació entre el model econòmic seleccionat i la xarxa neuronal, demostrant que les xarxes actuen millor en la predicció de la volatilitat condicional en els casos estudiats. L'estudi va ser realitzat per diversos índexs bursàtils, amb diferents estructures i zones geogràfiques i amb dades de baixa i alta freqüència.

Summary

The study of conditional volatility is necessary for a correct valuation of the risk of the financial assets (stocks, bonds, stock index,...) and derivatives (futures and options). A good prediction of this volatility is necessary, for example, for the diversification of portfolios, valuation of financial options, measures of risk such as VaR,... Therefore, it is necessary to construct models able to consider this volatility. GARCH econometric models are adapted to predict conditional volatility. In the present work conditional volatility for diverse stock-exchange index has been studied, selecting a model of the family ARMA-GARCH. A general model with model ARMA-EGARCH has been compared, being finally the last model selected because this one gathers the existing asymmetries in volatility.

On the other hand, the neuronal networks, in particular, the Backpropagation network, can be an alternative for the prediction of volatility. In the present study a comparative between the ARMA-EGARCH econometric model and the neuronal network is made, demonstrating that the networks obtain better results in the prediction of conditional volatility. The study has been undertaken for several stock-exchange index with different sizes and geographic zones and with low and high frequency data.

Índice

I. Introducción y Objetivos	17
1. Introducción y Objetivos	19
II. Evolución histórica de la volatilidad	27
2. Evolución histórica de la volatilidad	29
III. Modelización de la Volatilidad: Modelos GARCH ..	39
3. Modelización de la Volatilidad: Modelos GARCH	41
3.1. Concepto de Volatilidad	41
3.2. Medidas de Volatilidad	44
3.3. Modelos Univariantes.....	48
3.4. Modelos Multivariantes	62
3.4.1. Modelo de corrección constante.....	64
3.4.2. Modelo Vech.....	64
3.4.3. Modelo BEKK	66
3.5. Estimación de los modelos ARCH.....	67
IV. Las Redes Neuronales Artificiales	69
4. Las Redes Neuronales Artificiales	71
4.1. Introducción	71
4.2. Fundamentos Biológicos.....	76
4.3. Estructura y Elementos de las RNA	80
4.3.1. Las neuronas artificiales	80
4.3.2. Estado de Activación.....	83
4.3.3. Función de Activación o de Transferencia.....	84
4.3.4. Función de salida.....	85
4.3.5. Mecanismos o Reglas de Aprendizaje	89
4.3.6. Aprendizaje supervisado	92
4.3.7. Aprendizaje no supervisado	96

4.3.8. Relación entre la información de entrada y salida de la RNA.....	99
4.4. RNA con conexiones hacia adelante: Backpropagation.....	101
4.4.1. El Aprendizaje Backpropagation: La Regla Delta Generalizada	102
4.4.2. Estructura y Aprendizaje de la Red Backpropagation	106
V. Estudio comparativo entre modelo EGARCH y la Red Neuronal Backpropagation: Aplicación sobre la volatilidad condicional de índices bursátiles internacionales	115
5. Estudio comparativo entre el modelo EGARCH y la Red Neuronal Backpropagation: Aplicación sobre la volatilidad condicional de índices bursátiles internacionales	117
5.1. Introducción	117
5.2. Modelización de la volatilidad condicional mediante el modelo ARMA-EGARCH	123
5.3. Modelización de la volatilidad condicional mediante Red Neuronal Backpropagation	152
5.4. Conclusiones	164
VI. Estudio comparativo entre el modelo EGARCH y la Red Neuronal Backpropagation: Aplicación sobre la volatilidad condicional en el índice IBEX 35 con datos de alta frecuencia	115
6. Estudio comparativo entre el modelo EGARCH y la Red Neuronal Backpropagation: Aplicación sobre la volatilidad condicional en el índice IBEX 35 con datos de alta frecuencia.....	175
6.1. Introducción	175

6.2. Modelización de la volatilidad condicional mediante el modelo ARMA-EGARCH con datos de alta frecuencia	176
6.3. Modelización de la volatilidad condicional mediante Red Neuronal BackPropagation con datos de alta frecuencia.....	192
6.4. Conclusiones	199
VII. Conclusiones Finales y futuros trabajos	205
7. Conclusiones finales y futuros trabajos	207
VIII. Bibliografía	215
8. Bibliografía	217
IX. Anexos	215
9. Anexos	233
9.1. Anexo 1 Dax	233
9.2. Anexo 2 Nasdaq 100.....	270
9.3. Anexo 3 NIKKEI 225	275
9.4. Anexo 4 S&P 500.....	280
9.5. Anexo 5 Ibex 35.....	285
9.5.1. A.5.1 Ibex 35 datos baja frecuencia.....	285
9.5.2. A.5.2 Ibex 35 datos alta frecuencia.....	289

Índice de Figuras

Figura 2-1: Volatilidad mensual anualizada S&P 500.....	34
Figura 2-2: Volatilidad mensual anualizada NIKKEI 225	35
Figura 2-3: Volatilidad mensual anualizada IBEX-35	36
Figura 2-4: Volatilidad mensual anualizada DAX	37
Figura 4-1: Gráfico de una neurona	78

Figura 4-2: Esquema de la estructura de una red neuronal	81
Figura 4-3: Esquema del funcionamiento de transmisión	82
Figura 4-4: Función de activación escalón	87
Figura 4-5: Función de activación lineal o identidad.....	87
Figura 4-6: Función de activación lineal-mixta	88
Figura 4-7: Función de activación sigmoideal	89
Figura 4-8: Estructura de la Red Backpropagation.....	107
Figura 5-1: Histograma de la rentabilidad diaria del DAX.....	125
Figura 5-2: Test h de Durbin para un retardo en el índice NASDAQ 100 semanal.....	135
Figura 5-3: Test Breusch-Godfrey para dos retardos en el índice DAX diario.....	137
Figura 5-4: Test ARCH para cinco retardos aplicados al índice S&P500 semanal.....	141
Figura 5-5: Histograma de los residuos del modelo ARMA(2,2)- GARCH(1,1) en el índice DAX mensual	144
Figura 5-6: Test ARCH del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) en el índice NIKKEI-225 mensual.....	145
Figura 5-7: Histograma de los residuos del modelo ARMA(2,2)- GARCH(0,1) en el índice DAX mensual	148
Figura 5-8: Tiempo de computación de la red neuronal en el índice S&P 500 semanal en la ventana uno: 17 segundos	157
Figura 5-9: Inputs seleccionados para la red neuronal en el índice NASDAQ 100 diario para la ventana cinco.....	158
Figura 6-1: Test h de Durbin para un retardo en el índice IBEX 35 con datos de cinco minutos	180

Figura 6-2: Test Breusch-Godfrey para dos retardos en el índice IBEX 35 con datos de cinco minutos.....	183
Figura 6-3: Test ARCH para cinco retardos en el índice IBEX-35 con datos de 60 minutos.....	186
Figura 6-4: Histograma de residuos del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) en el índice IBEX-35 15 minutos	187
Figura 6-5: Histograma de residuos del modelo ARMA(1,1)-EGARCH(2,2) en el índice IBEX-35 15 minutos	189
Figura 6-6: Tiempo de computación de la red neuronal en el índice IBEX-35 15 minutos ventana cuatro: 1 min 11 seg.	195
Figura 6-7: Inputs seleccionados en la red neuronal en el índice IBEX-35 10 minutos ventana uno	196

Índice de Tablas

Tabla 5-1: Ventanas muestrales y de predicción.....	122
Tabla 5-2: Estadísticos descriptivos de la serie de rendimientos para todos los índices considerados.....	126
Tabla 5-3: Test de raíces unitarias Dickey-Fuller Aumentado (DFA) sin constante y tendencia.....	128
Tabla 5-4: Test de raíces unitarias Dickey-Fuller Aumentado (DFA) con constante y sin tendencia	129
Tabla 5-5: Test de raíces unitarias Dickey-Fuller Aumentado (DFA) con constante y tendencia	130
Tabla 5-6: Test de raíces unitarias Phillips-Perron (PP) sin constante y tendencia.....	131
Tabla 5-7: Test de raíces unitarias Phillips-Perron (PP) con constante y sin tendencia	132

Tabla 5-8: Test de raíces unitarias Phillips-Perron (PP) con constante y con tendencia	134
Tabla 5-9: Modelos ARMA seleccionados siguiendo el criterio Schwartz	138
Tabla 5-10: Modelos GARCH seleccionados siguiendo el criterio Schwartz.....	142
Tabla 5-11: Modelos EGARCH seleccionados siguiendo el criterio Schwartz.....	147
Tabla 5-12: Errores de predicción del modelo EGARCH con datos diarios.....	149
Tabla 5-13: Errores de predicción del modelo EGARCH con datos semanales	150
Tabla 5-14: Errores de predicción del modelo EGARCH con datos mensuales	151
Tabla 5-15: Errores de predicción de la Red Neuronal con datos diarios.....	161
Tabla 5-16: Errores de predicción de la Red Neuronal con datos semanales.....	162
Tabla 5-17: Errores de predicción de la Red Neuronal con datos mensuales.....	163
Tabla 5-18: Fallos de la Red Neuronal versus modelo EGARCH	165
Tabla 5-19: Porcentaje de reducción del error de predicción Red Neuronal versus EGARCH con datos diarios	169
Tabla 5-20: Porcentaje de reducción del error de predicción Red Neuronal versus EGARCH con datos semanales ...	170
Tabla 5-21: Porcentaje de reducción del error de predicción Red Neuronal versus EGARCH con datos mensuales ...	171
Tabla 6-1: Ventanas muestrales y de predicción.....	176

Tabla 6-2: Test de raíces unitarias Dickey-Fuller Aumentado (DFA) sin constante y tendencia.....	177
Tabla 6-3: Test de raíces unitarias Dickey-Fuller Aumentado (DFA) con constante y sin tendencia.....	177
Tabla 6-4: Test de raíces unitarias Dickey-Fuller Aumentado (DFA) con constante y tendencia	178
Tabla 6-5: Test de raíces unitarias Phillips-Perron (PP) sin constante y tendencia.....	178
Tabla 6-6: Test de raíces unitarias Phillips-Perron (PP) con constante y sin tendencia	179
Tabla 6-7: Test de raíces unitarias Phillips-Perron (PP) con constante y con tendencia	179
Tabla 6-8: Modelos ARMA seleccionados siguiendo el criterio Schwartz	184
Tabla 6-9: Modelos GARCH seleccionados siguiendo el criterio de Schwartz	186
Tabla 6-10: Modelos EGARCH seleccionados siguiendo criterio Schwartz	188
Tabla 6-11: Errores de predicción del modelo EGARCH con datos de alta frecuencia en el índice IBEX-35	191
Tabla 6-11: Errores de predicción del modelo EGARCH con datos de alta frecuencia IBEX-35 (cont.)	192
Tabla 6-12: Errores de predicción en la Red Neuronal con datos de alta frecuencia en el índice IBEX-35.....	198
Tabla 6-12: Errores de predicción en la Red Neuronal con datos de alta frecuencia en el índice IBEX-35 (cont.).....	199
Tabla 6-13: Fallos de la Red Neuronal versus modelo EGARCH	201

Tabla 6-14: Porcentaje de reducción del error de predicción Red Neuronal versus EGARCH con datos alta frecuencia en el índice IBEX-35.....	204
--	-----

I. Introducción y Objetivos

1. Introducción y Objetivos

En las últimas décadas hemos asistido a un gran desarrollo y expansión de los mercados financieros y de los activos que se negocian en ellos. Todo ello derivado, por un lado, de la globalización internacional de los mercados, destacando la desregularización de los mercados domésticos, y la liberación de flujos de capital a nivel internacional. Por otro lado se encuentra el rápido y continuo desarrollo a nivel de telecomunicaciones y de sistemas de información, con los que se ha logrado dicha globalización. Todo esto da la posibilidad a los inversores, en general, de realizar una correcta y más eficiente colocación de su inversión, dado que aumentan las posibilidades de asignación del capital, así como una reducción de costes de transacción.

El estudio sobre el grado de volatilidad así como su comportamiento en los mercados financieros ha suscitado un gran interés desde hace décadas. Algunos autores como Gertler (1988) afirman que la volatilidad de los mercados financieros puede afectar a la economía real ya que el crecimiento de las empresas podría verse afectado por su capacidad de endeudamiento. Puede verse en Bernanke (1983) un estudio sobre los efectos no monetarios producidos por la propagación de la crisis de la gran depresión del 29 en Estados Unidos en relación a la alta volatilidad de los mercados financieros en general y bursátil en particular que se produjo

durante esos años. Este autor indica que estas variaciones de precios en los mercados pueden provocar cambios importantes en las decisiones de inversión de las empresas, principalmente en las pequeñas y medianas y a su vez, en la economía en general.

La volatilidad juega un factor muy importante en la diversificación de carteras dado que el riesgo asumido en éstas viene determinado por la evolución e intensidad de la primera. Por tanto, un incremento de la volatilidad podría afectar en el proceso de selección de activos para la cartera. Solnik (1974) muestra cómo la diversificación internacional de carteras mejora la reducción del riesgo en comparación con carteras nacionales. También plantea cómo de efectiva es la diversificación respecto al riesgo de la cartera así como el número de activos que deben formarla. Grauer y Hakansson (1987) realizan un estudio sobre los beneficios de la diversificación internacional de carteras y cómo los cambios de volatilidad afectan a la composición de la misma.

El Valor en Riesgo o Value at Risk (VaR) es una medida del riesgo de mercado de una cartera (Jorion,1997; Mascareñas,2008) muy utilizada en la actualidad por los gestores de carteras y fondos de inversión. La volatilidad como medida de riesgo no indica per se al inversor qué dirección tendrán las cotizaciones o precios. Por tanto, se hace necesaria una medida estadística que calcule la máxima pérdida posible que puede sufrir una cartera determinada durante un periodo

de tiempo concreto (VaR). Existen con carácter general tres métodos básicos para su medición y cálculo. El primero de ellos se basa en la utilización de las volatilidades históricas, lo que implica tener una medida del riesgo retrospectiva que puede no coincidir con el riesgo de la cartera existente en el momento actual, y mucho menos futuro. En el segundo método se obtiene la distribución de los rendimientos de la cartera también a partir de datos históricos, basándose en la matriz de varianzas-covarianzas de los activos de la cartera y en el supuesto de normalidad. Por último, el tercer método se basa en la simulación de Monte Carlo, es decir, realizando múltiples simulaciones de la posible evolución que los rendimientos de la cartera pueden darse a partir de los datos históricos. En la actualidad existen variantes sobre los tres métodos básicos para obtener el VaR, como por ejemplo el uso de modelización GARCH para así sustituir el supuesto de distribución normal por el de distribución condicional ya que la primera supone que los rendimientos de la cartera tienen varianza constante y no autocorrelacionados. Sin embargo Fama y French (1989) llegan a la conclusión de que los rendimientos de las acciones presentan una fuerte autocorrelación en el largo plazo. Puede verse una revisión de las diversas metodologías de cálculo del VaR en Martínez, J et al. (2005).

Obtener una medida y un modelo eficaz de predicción de volatilidad es de vital importancia para el *trading* con opciones financieras, bien para realizar coberturas (*hedge*) bien para la inversión en este mercado, beneficiándose el

inversor del apalancamiento que ofrecen este tipo de activos. Esto es así dado que en la formulación de valoración de opciones planteada por Black y Scholes (1973) y posteriormente Merton (1973) aparece la volatilidad como uno de los parámetros principales para el cálculo de las primas de las opciones. En este caso, si se dispone de una predicción de volatilidad futura para un momento del tiempo concreto, dicha fórmula nos informaría del valor teórico que tendrían las primas de las opciones en ese momento, pudiendo el inversor tomar una posición en el mercado en función del valor que dichas primas tengan en el momento actual.

Una vez planteados tres motivos importantes sobre el por qué es necesaria la modelización y predicción de la volatilidad (diversificación y selección de carteras, cálculo del VaR y valoración de opciones). En la primera parte de este trabajo se describe su comportamiento así como su evolución histórica. Seguidamente y como parte fundamental de nuestro análisis, pasaremos a la modelización de la volatilidad.

El objetivo del presente trabajo es la comparación de un modelo econométrico de la familia GARCH y una red neuronal de tipo Backpropagation para la estimación y predicción la varianza condicional sobre varios índices bursátiles internacionales. La hipótesis es que las redes neuronales artificiales tienen la ventaja de ser capaces de encontrar relaciones más complejas entre las variables y, por

tanto, tienen mayor capacidad de predicción de la volatilidad frente a los modelos clásicos econométricos.

Otro de los objetivos planteados está relacionado en la selección del modelo econométrico para la modelización de la volatilidad haciendo una comparativa entre el modelo GARCH y el modelo EGARCH, demostrando que estos últimos recogen las asimetrías existentes en la volatilidad de los índices bursátiles tal y como se sugiere en gran parte de la literatura financiera.

Un tercer objetivo en la comparativa entre los modelos econométricos y la red neuronal artificial viene dado por el análisis de la robustez de los resultados frente a la frecuencia de los datos, forma de cálculo del índice así como su localización geográfica.

En el capítulo 2 se realiza una revisión histórica de la evolución de la volatilidad en los índices bursátiles. Para ello se han escogido índices bursátiles diferentes en tamaño, construcción y ubicación geográfica. También se comparan los resultados obtenidos con algunos estudios relacionados en la literatura financiera. El objetivo es identificar si realmente la volatilidad se ha incrementado o no en los últimos años, incluyendo algunos periodos de crack bursátiles.

En el capítulo 3 se realiza una revisión de los principales modelos de la familia GARCH que se utilizan para la

modelización de la volatilidad condicional. Se detallan tanto los modelos univariantes como los multivariantes, aunque estos últimos suelen emplearse generalmente para estudios de transmisión de volatilidad.

En el capítulo 4 se expone inicialmente una visión general de qué son las redes neuronales, cómo se construyen y su proceso de aprendizaje. Posteriormente se profundiza en la red neuronal Backpropagation, indicando sus principales características así como su algoritmo de aprendizaje, la regla delta generalizada. Esta red será la utilizada para el estudio comparativo pues se trata de una de las redes más utilizadas, no sólo en finanzas, dada su capacidad de generalización.

En el capítulo 5 se estudia, para varios índices internacionales y para datos de baja frecuencia (diarios, semanales y mensuales), el modelo econométrico seleccionado, en este caso, un modelo asimétrico EGARCH verificando, tal y como dice la literatura financiera, que dicho modelo capta las asimetrías existentes en la volatilidad condicional, comparándolo con un modelo GARCH más general. En una segunda parte se plantea una red neuronal Backpropagation para la predicción de la volatilidad condicional para dichos índices realizando una comparativa con el modelo econométrico. El capítulo concluye con los resultados obtenidos en función de los parámetros utilizados para la comparación de ambos modelos.

En el capítulo 6 se plantea un estudio con datos de alta frecuencia (5,10,15,30 y 60 minutos) para el índice Ibex-35 en la comparativa entre un modelo EGARCH y la red neuronal Backpropagation para determinar si los resultados que se esperan obtener para datos de baja frecuencia también se confirman con datos de alta frecuencia, ampliando así el estudio, pues la mayoría de estudios que realizan esta comparativa se basan, generalmente, en datos diarios. Se concluye con los resultados obtenidos con datos de alta frecuencia.

En el capítulo 7 se presentan las principales conclusiones finales que se han encontrado en la comparativa del modelo econométrico seleccionado y la red neuronal, tanto para datos de baja como de alta frecuencia. Los resultados obtenidos verifican que la red neuronal mejora los resultados de la predicción de la volatilidad condicional. También se presentan las líneas de investigación futuras a partir de los resultados obtenidos en este trabajo.

Finalmente se recoge la relación de las referencias bibliográficas consultadas para la elaboración del presente trabajo así como un anexo que resume algunos de los cálculos realizados presentando la mayoría del proceso de estimaciones para el Dax con datos diarios y de forma más abreviada para el resto de timeframes e índices.

II. Evolución histórica de la volatilidad

2. Evolución histórica de la volatilidad

Siguiendo a Bajo, et al.(1994),el comportamiento de la volatilidad en los mercados financieros se explicaría por las variables económicas tanto a nivel macroeconómico como a nivel microeconómico que podrían afectar al valor de las acciones. En este caso, bajo el supuesto del mercado eficiente, en las cotizaciones de los títulos deben estar reflejadas todas las variables y expectativas. Ahora bien, no existen evidencias claras sobre la existencia de una alta correlación entre la volatilidad y las variables económicas (Schwert 1989), al menos en el largo plazo. Otros factores que podrían explicar el comportamiento de la volatilidad (a corto plazo) podrían ser cambios e innovaciones en los mercados, como por ejemplo la aparición de los mercados derivados, así como las nuevas tecnologías. Por último otro de los factores que podrían explicar el comportamiento de la volatilidad sería el factor psicológico. En este caso, los inversores provocan los shocks de volatilidad, fundamentalmente en momentos de pánico bursátil, lo que indicaría la existencia de asimetrías en la distribución del comportamiento de la misma.

Hamilton y Lin (1996) encuentran evidencias de un incremento de la volatilidad en los mercados financieros en los ciclos económicos de recesión. Errunza y Hogan (1998) llegan a la misma conclusión.

Liljeblom y Stenius (1997) también encuentran una evidencia estadística de la existencia de relación entre las variables macroeconómicas y la volatilidad de los mercados de valores, si bien sólo explica un pequeño porcentaje de ésta.

Por otro lado, para el mercado australiano, Kearney y Daly (1998) y Daly (2008) encuentran una relación significativa entre la volatilidad de los rendimientos de las acciones y la variabilidad de la inflación y de los tipos de interés.

Binder y Merges (2001) también encuentran evidencias de la relación de variables económicas y el comportamiento de la volatilidad.

Rodríguez et al. (2002) mediante un modelo intertemporal indican que la volatilidad observada en el mercado puede predecirse, al menos en parte por la variables macroeconómicas fundamentales.

Diebold y Yilmaz (2007) realizan un estudio de corte transversal para diferentes países encontrando evidencias positivas. Pierdzioch et al. (2008) encuentran relación entre los ciclos económicos, concretamente en los ciclos comerciales y de negocios con variaciones en la volatilidad.

Abugri (2008) encuentra una evidencia muy clara y constante para los mercados de Latinoamérica para factores económicos globales, sin embargo no obtiene la misma consistencia para variables económicas locales de cada uno de estos mercados.

Los autores Nihat, et al. (2009) también encuentran que una parte de la variabilidad de la volatilidad se debe en parte por los factores económicos macro teniendo un menor peso el comportamiento irracional de los inversores en momentos con una economía y políticas más estables.

En cuanto a la evolución histórica de la volatilidad en los mercados financieros, principalmente organizados, existe la creencia en la comunidad financiera de que la volatilidad ha aumentado a lo largo del tiempo con una tendencia positiva. Existen numerosos estudios que rechazan esta afirmación. Como ejemplo tenemos el shock del 19 de Octubre de 1987, en el que se tenía la percepción de un incremento importante de volatilidad. Jones y Wilson (1989) realizan un estudio sobre la volatilidad del mercado bursátil con una comparativa de un siglo, desde 1885 hasta 1989, y llegan a la conclusión de que considerando todo este periodo no se encuentran evidencias de que exista un incremento sustancial de volatilidad. Ahora bien, también es cierto que sí admiten cierto grado de aumento de volatilidad en los años 80 si ésta es medida diariamente, pero este aumento desaparece en cuanto se toman medidas mensuales de volatilidad, destacando que la

volatilidad de los años 80 es incluso más moderada que la de los años de la gran depresión. Beckett y Sellon (1989), en su estudio sobre el índice S&P, también confirman la no evidencia de aumentos significativos de volatilidad, a excepción de los días 16, 19 y 20 de Octubre de 1987 en los que sí hubo incremento de volatilidad diaria. En su estudio sobre la volatilidad del mercado bursátil, Shiller (1989) indica que la volatilidad de los años 80 fue incluso inferior a la de los años de la gran depresión del 29. En Kupiec (1991) puede verse un estudio sobre la evolución de la volatilidad bursátil de 15 países de la OCDE. En este caso llega a la conclusión de que efectivamente en los años 80 la volatilidad de los mercados de estos países se incrementó en algunas fechas concretas como en Octubre de 1987 o en el “minicrash” de Octubre de 1989 considerándose este incremento de un corto periodo transitorio, y volviendo inmediatamente la volatilidad a niveles mucho más bajos o “normales”. Sin embargo esos cortos periodos transitorios provocaron cierto incremento de la volatilidad media en esa década.

A continuación se procede al análisis y estudio de la evolución histórica de las últimas décadas de la volatilidad de diferentes índices bursátiles. Para ello la volatilidad se ha calculado mediante la desviación de las rentabilidades mensuales anualizadas.

En la figura 2-1 puede observarse la evolución de la volatilidad mensual anualizada del índice S&P 500 dónde

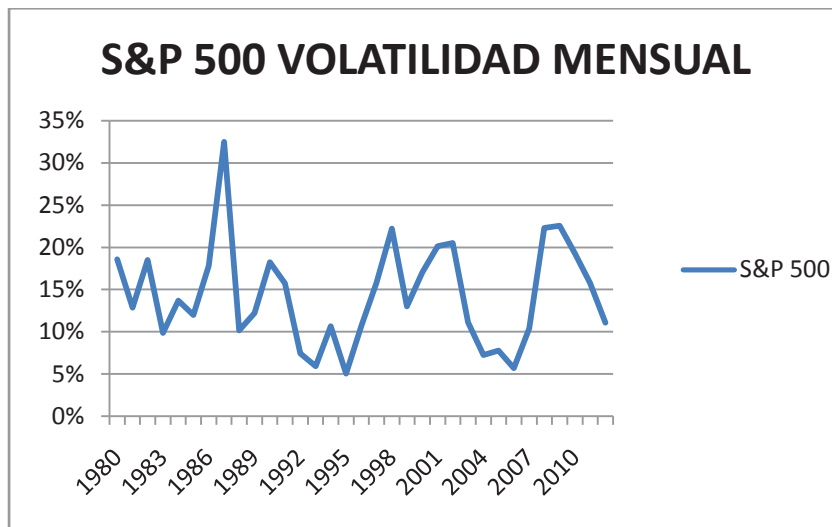
efectivamente puede confirmarse el incremento de volatilidad en el crack del 87 así como otro repunte de la volatilidad en el periodo 1994-1998 coincidiendo con la crisis del 94, motivado por, entre otros, la crisis energética y la crisis del sistema monetario Europeo en 1992-93, (Ayuso, et al. (1995)), crisis financiera asiática de 1997 y explosión de las punto com en el 2000. En la última parte del gráfico se observa cómo se incrementó la volatilidad en el inicio de la crisis actual en 2007 (Schwert 2011) alcanzando su máximo en 2009 y a partir de este momento comienza un claro descenso de la volatilidad en dicho índice llegando a unos niveles de volatilidad media en torno al 10%.

Si comparamos estos resultados con otro índice bursátil de otra zona geográfica, por ejemplo, el índice NIKKEI 225 podemos observar que efectivamente la volatilidad mensual anualizada se incrementa en 1987. Sin embargo, el efecto que tuvo el minicrash de Octubre de 1989 sobre este índice fue mucho mayor que para el índice S&P 500. Así, durante el año 89 al 90 el S&P 500 aumentó su volatilidad en 6 puntos porcentuales, mientras que el índice NIKKEI 225 aumentó en ese periodo 30 puntos.

Al igual que ha ocurrido con el índice S&P 500 en referencia a la crisis actual, el índice NIKKEI 225 también ha aumentado la volatilidad desde el 2007 iniciando su tendencia bajista desde inicios del año 2009, aunque mientras el S&P 500

aumentó en torno a 14 puntos su volatilidad, el NIKKEI 225 lo hizo sobre 25 puntos porcentuales (ver figura 2-2).

Figura 2-1: Volatilidad mensual anualizada S&P 500



Fuente: Elaboración propia

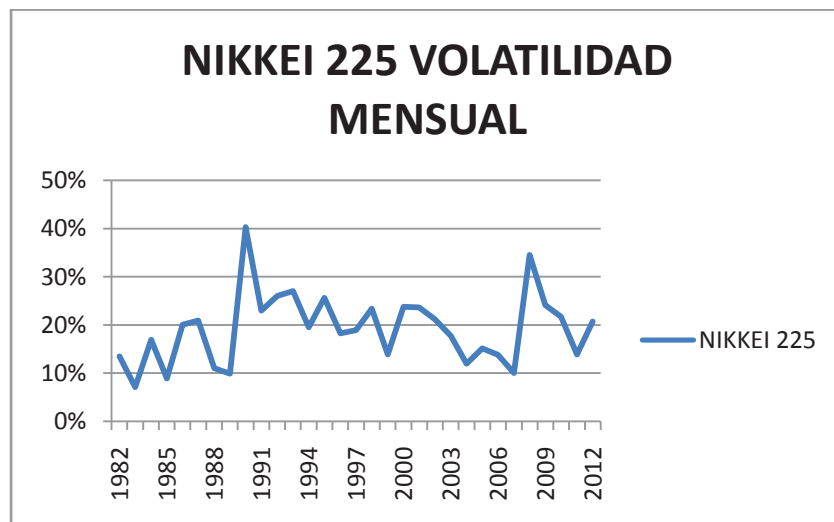
Si ahora observamos el índice IBEX-35 (figura 2-3) se confirma, al igual que en el índice americano, el aumento de volatilidad durante la crisis financiera asiática de 1997 con un incremento de 17 puntos porcentuales.

Desde el 2007 la volatilidad del índice IBEX-35 ha iniciado una tendencia alcista alcanzando unos niveles máximos de volatilidad en torno al 32% a finales del 2012.

Mientras que el resto de índices estudiados, así como otro de los índices europeos, como el DAX alemán (figura

2-4), se observa a finales del 2012 que la volatilidad después de haber alcanzado un máximo parece descender acercándose a sus niveles medios de volatilidad, el IBEX-35 aún no puede confirmarlo. Este hecho podría estar motivado por los problemas del sector bancario, sector inmobiliario, así como los datos negativos de las variables macro que han provocado grandes incertidumbres en los mercados españoles tanto de renta variable como de renta fija, incrementándose la prima de riesgo hasta niveles históricos.

Figura 2-2: Volatilidad mensual anualizada NIKKEI 225

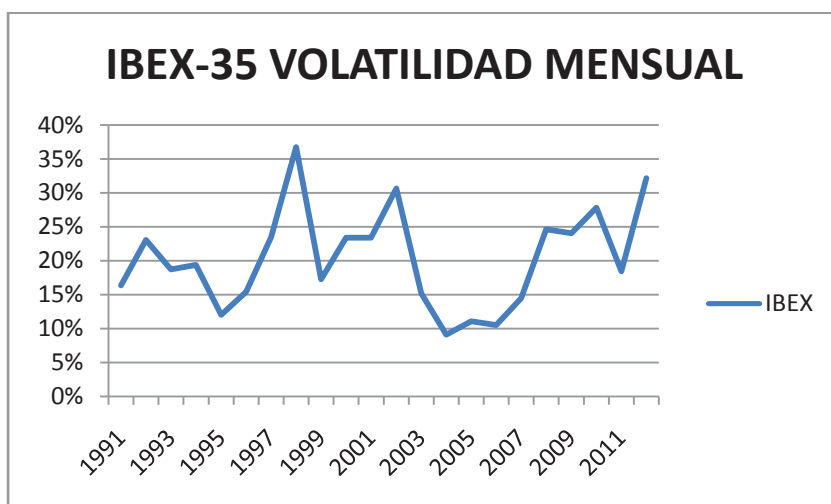


Fuente: Elaboración propia

Con la aparición y posterior desarrollo de los mercados de derivados financieros, y en concreto, derivados sobre índices bursátiles, se ha dado una serie de posibilidades al inversor que antes o eran imposibles de realizar o los grandes costes de transacción lo impedían. Con estos nuevos

activos derivados, se pueden realizar coberturas en las carteras de los inversores de una forma más rápida y menos costosa, reduciendo así el riesgo de éstas, ya que realizar múltiples operaciones directas en contado para ajustar las carteras resultaba muy costoso; ha incrementado el flujo de información en la formación de precios en el mercado de contado.

Figura 2-3: Volatilidad mensual anualizada IBEX-35

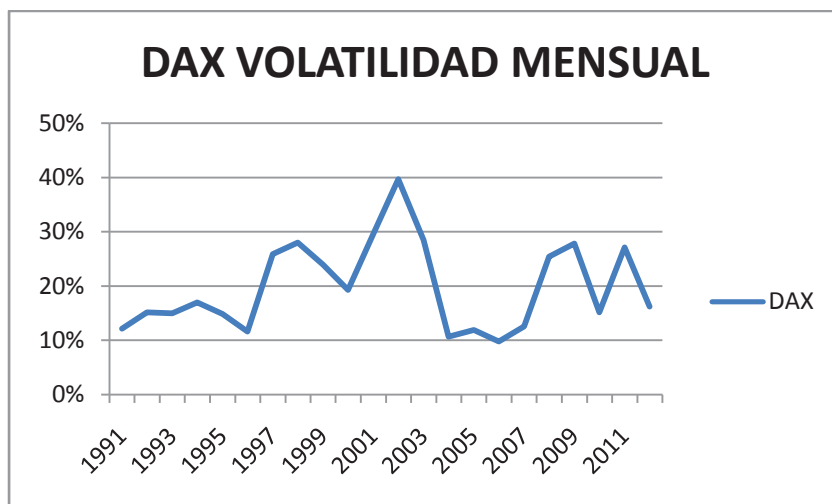


Fuente: Elaboración propia

La aparición de los primeros mercados de derivados sobre índices bursátiles en 1982 (el primer contrato de futuros sobre índice bursátil fue implantado en el mercado Kansas City Board of Trade teniendo como subyacente el Value Line Composite Index) recibió críticas muy duras, debido a que su implantación coincidió con periodos de alta volatilidad en los mercados de contado. A partir de este momento se estableció una discusión importante sobre si la creación de

mercados derivados desestabiliza o no el mercado de contado. A pesar de las críticas suscitadas, son claras las ventajas, entre otras, de liquidez y cobertura, que proporcionan los mercados derivados a los inversores. Aunque en la práctica en determinados vencimientos y para activos concretos puede haber cierto movimiento provocado por la transmisión de la volatilidad de un mercado a otro, no por ello se desestabiliza (Edwards 1988).

Figura 2-4: Volatilidad mensual anualizada DAX



Fuente: Elaboración propia

III. Modelización de la Volatilidad: Modelos GARCH

3. Modelización de la Volatilidad: Modelos GARCH

3.1. Concepto de Volatilidad

Desde los años 80, fundamentalmente desde el crack bursátil del 87, se han incrementado notablemente los estudios, tanto teóricos como empíricos, sobre la volatilidad y su modelización dada, su importancia en los mercados financieros. Por ejemplo, en la valoración de acciones se encuentran múltiples trabajos en los que se determina la importancia de una correcta especificación del modelo de volatilidad; así, tenemos a Merton (1980) y French et al.(1987), que exponen que la esperanza del rendimiento del mercado está relacionada con la volatilidad del mercado de contado.

El concepto de volatilidad se puede definir de forma sencilla como la velocidad de los movimientos de los precios como expresa Lamothe (1993) citando a Natemberg (1988); o también es el posible rango de variaciones de precios. Otra definición algo más formal sería aquella que da Peiró (1992), siendo volatilidad la variabilidad del rendimiento de un activo, que en definitiva es una medida de riesgo. Esta variabilidad del rendimiento de los precios se produce por las noticias e información (innovaciones) que aparecen en el mercado, dado que éstas afectan a las expectativas de los inversores. Lógicamente, gran parte de la información será de naturaleza económico-financiera. La repercusión que tendrán

las noticias vendrá dada por la mayor o menor diferencia entre los datos reales y lo que habían estimado los inversores. Existe un tipo de información o noticias que son casi impredecibles y cuyas consecuencias no son fáciles de determinar. Entre estas podemos destacar noticias políticas y fenómenos naturales. Las características principales de la información que afecta a la variabilidad de los precios son tres. En primer lugar, la información no siempre llega distribuida de una forma uniforme a lo largo del tiempo, sino que aparece frecuentemente en bloques y no siempre distribuida normalmente. En segundo lugar, según el carácter de las noticias tendrán un efecto diferente sobre la volatilidad. En múltiples estudios se ha visto que las noticias negativas incrementan la volatilidad en mayor medida que las noticias positivas, Nelson (1990). En tercer lugar, el efecto de la llegada de la nueva información al mercado no siempre es inmediato, sino que ésta necesita ser analizada e incorporada al precio. Por último, cuanto más grande sea el impacto de las noticias, más tiempo durarán sus efectos sobre la volatilidad.

Después de haber definido el concepto de volatilidad se hace necesario distinguir varios tipos de volatilidad existentes: volatilidad histórica, implícita y futura. La volatilidad histórica se puede definir como una medida retrospectiva de la volatilidad y refleja el comportamiento de la variabilidad de los precios en el pasado. Para el cálculo de esta volatilidad se analizan, por definición, las series históricas de los precios. Las variables para su cálculo pueden basarse

según Lamothe (1993) bien en los precios de cierre, bien en base al máximo y mínimo de las sesiones de negociación. En función del periodo de tiempo elegido para el cálculo de la volatilidad podríamos obtener volatilidades diarias, semanales, mensuales, anuales, etc. También hay que tener en cuenta que es diferente calcular la volatilidad con varios años de una serie histórica que sólo con varios meses. No obstante existe una correlación muy importante entre la volatilidad calculada para diferentes periodos de tiempo (Novales 2011).

Para entender el concepto de volatilidad implícita hemos de situarnos en el contexto de los mercados derivados, y más concretamente, en las opciones financieras. En el mercado se utiliza de forma general la fórmula de Black-Scholes para valorar este tipo de instrumento financiero. Dicho modelo de valoración requiere bien la volatilidad, bien la prima de la opción para calcular uno u otro. La volatilidad implícita podríamos definirla como aquella que se obtiene utilizando como dato de entrada la prima de la opción que se está negociando en el mercado. Así pues, para el cálculo de la volatilidad implícita, con carácter general, es necesario seleccionar un modelo de valoración que sea utilizado por la gran mayoría del mercado (Modelo Black-Scholes o el modelo de Merton). Esta volatilidad reflejará la volatilidad que se está negociando o que subyace en un momento concreto del tiempo.

Por último, podemos definir la volatilidad futura como aquella que cualquier inversor quisiera saber. Es decir, se trata de la volatilidad que habrá de hecho en un momento $t+1$. Los diferentes modelos que se construyen para su estimación utilizan bien la volatilidad histórica, bien la volatilidad implícita, ya que son las únicas herramientas posibles. Puede destacarse la relación entre volatilidad implícita e histórica, mediante los conos de volatilidad como instrumento inicial de predicción de la volatilidad futura. A pesar de la utilización de la volatilidad implícita en la predicción de la volatilidad futura, destaca Lamothe (1993) que se trata de un estimador sesgado cuando se aproxima a alguna de las bandas del cono de volatilidad histórica. Los modelos de la familia ARCH y GARCH son los que mejores resultados parecen obtener en la predicción de la volatilidad. En Gourieoux (1993) se plantean los diferentes modelos de la familia Arch y su aplicación en finanzas.

3.2. Medidas de Volatilidad

Una vez acotada de forma más o menos generalizada las definiciones sobre el concepto de volatilidad más comúnmente aceptadas, se presenta el problema de disponer de una medida lo más correcta posible que nos indique la variabilidad de los rendimientos de los activos. La estadística proporciona las herramientas adecuadas para el cálculo de la volatilidad. Dado que existen diferentes formas temporales de cálculo del rendimiento de un título, índice o activo financiero (diarios, mensuales,...) y varias formas de

medir la dispersión o variabilidad de dichos rendimientos, surgen, pues, diferentes medidas de volatilidad. Siguiendo a Peiró (1992), se presenta a continuación una de las medias de volatilidad más utilizadas en la literatura financiera. Se trata de la desviación típica muestral de los rendimientos diarios correspondientes a un mes concreto.

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (R_{ik} - \bar{R}_k)^2}{n}} \quad [3.1]$$

donde R_{ik} con $i = 1, 2, \dots, n$, corresponde a los diferentes rendimientos diarios del mes k , que tiene n días de negociación, \bar{R}_k es la media muestral de los rendimientos diarios del mes k . Esta medida se puede utilizar para periodos largos (rendimientos semanales, mensuales,...).

Fama (1989) plantea una desviación típica móvil con una ventana compuesta por 12 rendimientos mensuales en la que se elimina el rendimiento más alejado a la vez que se añade uno nuevo. Esta forma de obtener la serie de datos de la volatilidad es mucho más suave que con la fórmula anterior, favoreciendo así su estudio.

Ahora bien, cuando se deja de lado estas medidas estadísticas muestrales y se plantea que los rendimientos siguen un proceso estocástico, aparece el problema de que no es posible calcular la desviación típica de los rendimientos teniendo una sola observación, dado que cada

rendimiento se considera una variable aleatoria independiente. El análisis de la volatilidad, ante estas circunstancias, se deberá realizar mediante mecanismos de estimación. Así tenemos a French et al. (1987) que desarrollan una estimación de la volatilidad mensual, a través de los rendimientos diarios, expresados de forma logarítmica. Utiliza, por tanto, la varianza del rendimiento expresado en logaritmos como medida de volatilidad.

$$Var(R_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov(R_{ik}, R_{jk}) = \sum_{i=1}^n Var(R_{ik}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov(R_{ik}, R_{jk}) \quad [3.2]$$

$i \neq j$

donde R_k es el rendimiento mensual, expresado en logaritmos, correspondiente al mes k . Suponiendo que la esperanza de los rendimientos es cero $E(R_{ik})=0$, para todo i , se tiene que $Var(R_{ik})=E(R_{ik}^2)$ y $Cov(R_{ik}, R_{jk})=E(R_{ik} R_{jk})$. De esta forma se tiene como estimadores de estos los siguientes:

$$\hat{Var}(R_{ik}) = R_{ik}^2$$

$$\hat{Cov}(R_{ik}, R_{jk}) = R_{ik} R_{jk} \quad [3.3]$$

Si los rendimientos están incorrelados entre sí, la estimación de la volatilidad queda como sigue:

$$\hat{Var}(R_k) = \sum_{i=1}^n R_{ik}^2 \quad [3.4]$$

Si suponemos que los rendimientos están correlados con orden 1 la estimación de la volatilidad será:

$$\hat{Var}(R_k) = \sum_{i=1}^n R_{i=1}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} R_{ik} R_{i+1k} \quad [3.5]$$

Expresión que utilizan en su trabajo French et al. (1987). Por otro lado, como apuntan Ayuso et al. (1995), el concepto de volatilidad está asociado al movimiento de la variable rendimiento de precios, es decir, se asimila al concepto de riesgo. Éste viene medido por la varianza condicional que se expresa de la siguiente forma:

$$h_t \equiv V_t(X_{t+i}) \equiv E_t(X_{t+i} - E_t(X_{t+i}))^2 \quad [3.6]$$

donde h_t es la varianza condicional (volatilidad) y E_t es la esperanza condicional con la información disponible hasta el momento t . Esta será la expresión que se utilizará de ahora en adelante al referirnos a la volatilidad.

Queda fuera de este trabajo, por no ser objeto del mismo, un análisis interesante que relaciona el volumen de los mercados financieros y la volatilidad. Pueden verse algunos de estos estudios en Kho (1996), Olema (1996), García (1998), Lee (2002), Rodríguez (2002), Leung (2008) y Mubarik (2009).

Hemos visto alguna de las formas más habituales en la literatura financiera de medir la volatilidad. Se plantea ahora su modelización para poder realizar estudios

sobre su valoración y evolución, para un activo concreto o para un mercado.

Dado que el rendimiento se puede descomponer en una parte anticipada (condicional) y otra no anticipada, muchos autores han utilizado un término que refleje la variación condicional de los precios, generalmente expresado como $h^{1/2}$. Esto unido a la idea planteada por Mandelbrot (1963) y citada por muchos autores como Engle et al. (1987), de que “ después de variaciones grandes en los precios siguen variaciones grandes de cualquier signo, mientras que variaciones pequeñas en precios van seguidas de variaciones pequeñas”; da lugar a una serie de modelos que reflejan en buena medida este comportamiento de la volatilidad. A continuación se verán de forma resumida los modelos más generales y utilizados en la literatura financiera, y siguiendo la clasificación realizada por Pagan (1996) se clasificarán en modelos univariantes y modelos multivariantes.

3.3. Modelos Univariantes

En los modelos univariantes, como su nombre indica, sólo se expresará la volatilidad condicional de la única variable dependiente, existiendo, pues, una sola ecuación en medias. Engle (1982) introdujo por primera vez un modelo que representaba la volatilidad condicional de una serie de datos, llamado autorregresivo condicionalmente heterocedástico,

Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (ARCH).

Con la aparición de los modelos ARCH (Autorregresivos Condicionalmente Heterocedásticos), Engle propone un nuevo proceso en el que se relaja la suposición de varianza constante, es decir, se plantea un modelo con media cero, que sigue un proceso serialmente incorrelado, en el que las varianzas condicionales son no constantes y las varianzas no condicionales siguen siendo constantes. Estos modelos contrastan notablemente con los modelos convencionales de series temporales y econométricos que existían hasta entonces. Estos nuevos modelos presentan, pues, una varianza condicional, que depende de la información disponible, y que varía todo el tiempo en función de los residuos pasados, manteniendo constante su varianza incondicional. En Engle (1982) se presenta formalmente por primera vez, de forma general, el modelo ARCH. En Engle y Ng (1993) se puede ver el mismo modelo pero con un planteamiento pensando en un mercado de acciones. Siguiendo a estos autores se puede explicar el modelo ARCH de la siguiente forma:

Tomando y_t como el ratio de rendimiento de un título bursátil o acción (sin perder generalidad, también podría tratarse de un índice bursátil o de cualquier otro activo financiero) del momento $t-1$ a t , y siendo F_{t-1} la información pasada de las variables relevantes hasta el momento t ; la esperanza del rendimiento es el valor de la esperanza

condicional con la información disponible hasta ese momento. Es decir, la esperanza condicional del rendimiento (m_t) es igual a $m_t = E(y_t | F_{t-1})$. Por otro lado, tenemos la volatilidad que será expresada como la varianza condicional del rendimiento, $h_t = \text{Var}(y_t | F_{t-1})$. Dado que nos encontramos en un ambiente con cierto grado de incertidumbre, puede haber un rendimiento inesperado en el momento t , que se define como $\varepsilon_t = y_t - m_t$, que no es más que el residuo de una estimación. Cuando hacemos referencia al mercado bursátil, ε_t se asocia a una medida de la nueva información que se incorpora al mercado en el momento t . Cuando ε_t es positivo (un incremento inesperado del rendimiento) implica que se ha incorporado al mercado información de carácter positivo, esto es, buenas noticias; mientras que cuando ε_t es negativo (un decrecimiento inesperado en el rendimiento) implicará la llegada de malas noticias. Un valor elevado de $|\varepsilon_t|$ implicará que la información que se ha producido es significativa, y por tanto, relevante, ya que produce un gran efecto inesperado en los precios.

Engle (1982) sugiere que la varianza condicional h_t se puede modelizar como una función de retardos de ε_t . Esto significa que la volatilidad dependerá de la información pasada. El modelo ARCH desarrollado para un orden de p retardos (ARCH (p)) se puede expresar de la siguiente forma:

$$y_t = \varepsilon_t h^{1/2}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad [3.7]$$

donde α_0 y $\alpha_1 \dots \alpha_p$ son parámetros constantes. El efecto de un shock en el pasado sobre la volatilidad actual está determinado por α_i , siendo $i \leq p$. Generalmente se espera que la información más antigua tenga un menor efecto sobre la volatilidad actual. Es decir, que $\alpha_i < \alpha_j$ siendo $i > j$.

En Engle et al. (1987) se desarrolla un modelo ARCH en el que la desviación estándar de cada observación afecta a la media. De esta forma, cambios en la varianza condicional afectan de forma directa a la esperanza del rendimiento de un activo. Este modelo resuelve algunas de las paradojas que se planteaban en estudios empíricos, donde al incluir la heterocedasticidad, los tests estadísticos dejan de ser insesgados, requisito que suele ser preferido en los estimadores para un buen modelo. La consecuencia directa de esta paradoja empírica es la significatividad errónea de algunas variables. Formalmente se puede escribir como :

$$Y_t | X_t, \pi_t \sim N(\beta'X_t + \sigma h_t, h_t^2)$$

$$h_t^2 = \alpha'W_t + \gamma'Z_t \quad [3.8]$$

donde X_t y Z_t son $k \times 1$ y $j \times 1$ vectores de variables exógenas y de variables dependientes retardadas. El vector Z_t incluye una constante, donde su coeficiente representa el componente

constante de la varianza de h_t . W es una matriz $q \times p$ de constantes fijadas que se utilizan para imponer restricciones a la parametrización de la respuesta de la varianza condicional a los retardos de los residuos al cuadrado. El caso menos restringido sería aquel en que la matriz W sea la matriz identidad. Este modelo resuelve el problema de que variables que aparentemente se utilizan en la predicción de los excesos de rendimientos, son correladas con la prima de riesgo y si se incluye una función de la varianza condicional en el regresor, pierden su significatividad aparente.

En muchos trabajos empíricos en los que se ha aplicado el modelo ARCH, se encuentra el problema de que muchos de ellos violaban las restricciones de no negatividad impuestas por el modelo, debido a que se introducía, de forma arbitraria, una estructura lineal fija de retardos en la ecuación de la varianza condicional, con el fin de poder reflejar la larga persistencia detectada en muchas de las series económicas utilizadas. Por este motivo, Bollerslev (1986) desarrolla un modelo Generalizado Autorregresivo Condicionalmente Heterocedástico, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH) en el que la estructura de retardos es mucho más flexible. A continuación se expone formalmente el modelo general GARCH (p,q):

$$\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$ht = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} = \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)h_t \quad [3.9]$$

donde

$$p \geq 0; q > 0$$

$$\alpha_0 > 0; \alpha_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, q$$

$$\beta_i \in [0, 1], \dots, p$$

siendo ε_t el valor de un proceso estocástico de tiempo discreto, que al igual que se dijo en el modelo ARCH, puede representar una medida de la información que llega al mercado de acciones y ψ_{t-1} será la información disponible hasta el momento t . En este caso se ha asumido, al igual que en el caso ARCH, que la distribución condicional es normal, aunque podría darse otras distribuciones que no invalidarían dichos modelos.

Se puede observar fácilmente que para un orden $p=0$, el modelo general (GARCH) se convierte en el modelo presentado por Engle, el modelo ARCH(q); y para un orden $p=q=0$, se trataría de un proceso de ruido blanco. La diferencia fundamental entre los dos modelos reside en que mientras en el modelo ARCH(q) la varianza condicional se especifica sólo como una función lineal de varianzas pasadas, en el modelo GARCH (p, q) incorpora en su función a las propias varianzas condicionales desfasadas.

El modelo GARCH descrito anteriormente es uno de los modelos más utilizados para cualquier estudio

relacionado con la volatilidad condicional. Estos modelos, así como sus variantes, están divididos en dos ecuaciones. La primera, la ecuación en medias, describe los datos observados en función de otras variables más un término de error. La segunda ecuación [3.9], especifica la evolución de la varianza condicional del término error de la ecuación en medias como una función de retardos de varianzas condicionales y términos de error. Ghahramani (2008) expone pautas de identificación del modelo.

A continuación vamos a proceder a dar una breve descripción de otros de los modelos más conocidos de la familia GARCH. Para una descripción detallada de los mismos se puede ver Engle y Ng (1993) y Alonso (1995) que realiza una revisión bastante completa describiendo las ventajas y cualidades de unos y otros. También Lundbergh (2002) realiza una evaluación completa de los diversos modelos. Éstos surgen por la diferente forma de tratar la evolución de la volatilidad, así como la incorporación al modelo de medidas que recojan el impacto y posible asimetría de las noticias o innovaciones que llegan al mercado sobre la volatilidad. Puede verse un listado más completo y actualizado de los modelos de la familia ARCH (GARCH) en Bollerslev (2008).

Puede destacarse, por su utilización frecuente en múltiples estudios, el modelo GARCH-M (Engle et al.1987), el modelo ARCH no lineal (Engle y Bollerslev 1986), el modelo ARCH Multiplicativo (Mihoj 1987); (Geweke 1986), (Pantula 1986), el modelo GJR (Glosten et al.1989), (Zakoian 1990), el

modelo Autorregresivo de Desviación Standár (Schwert 1990), entre otros. A continuación se describen brevemente algunos de estos importantes modelos.

Una de las variantes del modelo GARCH utilizadas con cierta frecuencia es el GARCH-M o GARCH en media. Fue propuesto por Engle et al.(1987). Realmente propusieron un modelo ARCH-M que fue generalizado posteriormente. Este modelo se basa en incorporar a la ecuación de la rentabilidad condicionada la varianza condicional. Es decir, que la rentabilidad esperada dependa también de su varianza condicional. Esto puede ser muy adecuado en modelos en los que se espera la existencia de una prima de riesgo, de forma que el rendimiento esperado será mayor conforme aumente su varianza o riesgo. Por tanto, en este tipo de modelos, la varianza condicional se incorpora como variable explicativa en la ecuación de la media, y de esta forma puede estudiarse la influencia que tiene la volatilidad (riesgo) sobre la rentabilidad. Según esto el modelo GARCH-M se presenta como sigue:

$$\text{Ecuación de la media } R_t = \delta + \gamma h_t + h_t^{1/2} \varepsilon_t \quad [3.10]$$

Ecuación varianza condicional

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} = \alpha_0 + A(L) \varepsilon_t^2 + B(L) h_t \quad [3.11]$$

donde $p \geq 0; q > 0$

$$\alpha_0 > 0; \alpha_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, q$$

$$\beta_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, p$$

Siguiendo ε_t una distribución normal con media cero y desviación típica uno. En Guzmán (1998) puede verse una comparativa entre el CAPM y este modelo. Schepper (1999) estudia la distribución de la varianza en un modelo GARCH(1-1)-M.

La forma de incorporar la influencia de la volatilidad condicional en la determinación del rendimiento puede hacerse de varias maneras. Una de ellas tal y como se ha presentado, es incorporar la varianza condicional directamente. Existen otras dos formas, también muy habituales, de esta incorporación bien como logaritmo de la varianza condicional $\log h_t$ bien como la desviación estándar condicional $h_t^{1/2}$.

Otro modelo a destacar es el GARCH Asimétrico, Asymmetric GARCH (AGARCH). Este modelo introduce, aunque de forma sencilla, los posibles efectos asimétricos en la modelización de la varianza condicional, producidos por la diferencia de impacto de la información (noticias) positiva y negativa que se produce en el mercado. En trabajos empíricos es frecuente encontrar que las malas noticias generan mayor volatilidad que las buenas noticias Nelson (1990). En 1976, F. Black, ya argumentó que esta

asimetría se debe al llamado “efecto apalancamiento”, en el que cuando una innovación (nueva información) negativa llega al mercado, se eleva el ratio Deuda/Capital de la acción, con el consiguiente incremento del impacto de las innovaciones futuras sobre el rendimiento de las acciones y, por tanto, sobre el riesgo de la inversión del activo. El modelo AGARCH mantiene la forma lineal del modelo GARCH, pero añade un término que permite obtener respuestas de diferente intensidad a los errores pasados (recordemos que ε_t es la información disponible), en función de si los shocks o impactos son positivos o negativos. Así pues, un valor negativo de dicho parámetro provocará una respuesta asimétrica, con lo que una innovación positiva producirá un menor impacto que las negativas sobre la varianza condicional, es decir, la volatilidad. Puede verse una comparativa más exhaustiva entre los modelos simétricos y asimétricos de la familia GARCH en Henschel (1995).

La ecuación de la varianza condicional del modelo AGARCH(1,1) puede expresarse como:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1(\varepsilon_{t-1} + \gamma)^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad [3.12]$$

donde h_t es la varianza condicional, ε_t es el error e γ es el término que se añade al modelo GARCH(1,1) y será el que recoja la fuerza de los errores pasados. Al igual que en el modelo GARCH los parámetros $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 \geq 0$ han de restringirse a la no negatividad. En Aragón et al. (2004) puede verse un estudio sobre la volatilidad del índice Ibex-35 con el

modelo Garch asimétrico.

Nelson en 1990 plantea el modelo GARCH Exponencial, (Exponential GARCH (EGARCH)). Al igual que el anterior modelo, el modelo EGARCH recoge respuestas asimétricas de la varianza condicional de los residuos pasados (innovaciones). Se diferencia del modelo GARCH y del anterior en que estos requerían de la imposición de restricciones de no negatividad en muchos de sus parámetros, con el objetivo de garantizar la positividad de la varianza condicional, mientras que en el modelo EGARCH no se plantean dichas restricciones. En este caso se asegura la positividad de la varianza condicional tomando ésta una forma funcional logarítmica en la expresión de la varianza condicional que, además, facilita la estimación de sus parámetros.

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \left[\gamma \frac{\varepsilon_{t-j}}{\sqrt{h_{t-j}}} + \left(\frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sqrt{h_{t-j}}} - (2/\pi)^{1/2} \right) \right] \quad [3.13]$$

donde el segundo término de la ecuación representa la

esperanza matemática de $\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}}$ suponiendo una distribución

$$\text{Normal}(0,1), \text{ siendo } E \left[\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} \right] = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2}.$$

La asimetría, en este caso, vendrá recogida por un parámetro γ que multiplica al cociente error/varianza

condicional, retardado un periodo. El parámetro será generalmente negativo, por tanto, shocks positivos en los rendimientos generarán menor volatilidad que shocks o innovaciones negativas. Dicho de otro modo más formal, el coeficiente de los errores positivo será $\beta_i(1+\gamma)$, y para los negativos tendrá un valor de $\beta_i(1-\gamma)$. Así pues con $\beta_i > 0$, un γ positivo implicaría que las innovaciones positivas o noticias “buenas” que llegan al mercado tendrían una influencia menor que las negativas en la volatilidad de los rendimientos de la serie. Por el contrario, con un γ negativo, implica que los shocks o noticias “malas” que llegan al mercado tienen una influencia superior que los positivos en la volatilidad del rendimiento del activo. Un valor de $\gamma = 0$ implicaría que los shocks, tanto positivos como negativos, afectarían de la misma forma. Es decir serían independientes de su signo.

El modelo GARCH Umbral, Threshold GARCH (TGARCH) fue propuesto por primera vez por Rabemananjara y Zakoïan en 1992 y, al igual que en los modelos anteriores, también presenta la posibilidad de recoger las asimetrías sobre la volatilidad. La ventaja de este modelo frente a los anteriores reside en que puede percibir comportamientos cíclicos como respuesta a los diferentes shocks. Una ventaja más directa sobre el modelo EGARCH, es que su especificación es aditiva en vez de exponencial. Se modeliza con desviaciones típicas en vez de varianzas como en el resto de modelos. Es decir, utiliza la desviación estándar condicional como una función

lineal de innovaciones y retardos de las propias desviaciones estándar.

$$h_t^{1/2} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\beta_i^+ \varepsilon_{t-i}^+ - \beta_i^- \varepsilon_{t-i}^-) + \sum_{j=1}^p \alpha_j \sqrt{h_{t-j}} \quad [3.14]$$

donde :

$$\varepsilon_t^+ = \text{Max}(\varepsilon_t, 0)$$

$$\varepsilon_t^- = \text{Min}(\varepsilon_t, 0)$$

Todos los coeficientes α_j positivos. En este modelo se observa claramente que en el caso de igualdad de coeficientes en el momento i , es decir, $\beta_i^+ = \beta_i^-$, implicaría que la influencia del error cometido (innovaciones) sobre la varianza condicional en un momento anterior $t-i$ no dependería del signo. Es decir, existiría simetría en el efecto de los shocks sobre la varianza condicional. Dado que este modelo está restringido desde el punto de vista de la positividad de los coeficientes, sólo es capaz de recoger las asimetrías de una forma lineal. Si eliminamos la restricción de no negatividad de los parámetros α_j , el modelo se planteará de la siguiente forma:

$$h_t^{1/2} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\beta_i^+ \varepsilon_{t-i}^+ - \beta_i^- \varepsilon_{t-i}^-) + \sum_{j=1}^p (\alpha_j^+ \sqrt{h_{t-j}}^+ - \alpha_j^- \sqrt{h_{t-j}}^-) \quad [3.15]$$

donde:

$$\sqrt{h_{t-j}}^+ = \text{Max}(\sqrt{h_{t-j}}, 0)$$

$$\sqrt{h_{t-j}}^- = \text{Min}(\sqrt{h_{t-j}}, 0)$$

En este caso se amplían las posibilidades del modelo para que pueda percibir diferentes comportamientos de la varianza condicional y no sólo de forma lineal como ocurría en el modelo restringido. Por tanto, este modelo puede percibir respuestas asimétricas de la varianza condicional también cíclicas y de forma más flexible que otros modelos y más sencilla, ya que la asimetría se captura de forma aditiva, mientras que, por ejemplo, la forma exponencial del modelo EGARCH es mucho más compleja. En cambio, como inconveniente se debe destacar que la utilización de la desviación condicional estándar, en vez de la varianza condicional como en el resto del modelo, junto al hecho de que pueden obtenerse valores negativos de $h_t^{1/2}$, puede provocar problemas en su interpretación, ya que llega a desvirtuar el concepto de volatilidad, sobre todo en el modelo no restringido.

El modelo ARCH no lineal, Nonlinear ARCH (NARCH), fue presentado por Engle y Bollerslev (1986). Su formulación es la siguiente:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 |\varepsilon_{t-1}|^\gamma + \beta_1 h_{t-1} \quad [3.16]$$

Según estudios realizados por Engle y Ng(1993), este modelo posee una curva de impacto de las noticias o innovaciones sobre la varianza condicional que es simétrica. Ahora bien, según los autores, para el caso de $\gamma < 2$, la respuesta que tendrá la varianza condicional ante shocks extremos será reducida.

El siguiente modelo, llamado modelo de Glosten, Jagannathan, and Runkle, en nombre a sus autores, añaden una variable dicotómica al modelo GARCH con el fin de que ésta recoja las asimetrías de los impactos de las noticias. La expresión del modelo es la siguiente:

$$h_t = \alpha_0 + \beta h_{t-1} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1}^2 \quad [3.17]$$

donde:

$$S_{t-1}^- = 1 \text{ si y solo si } \varepsilon_t < 0$$

$$S_{t-1}^- = 0 \text{ en cualquier otro caso.}$$

En este modelo sólo se recogerá la asimetría negativa en la volatilidad de forma proporcional al cuadrado de las innovaciones negativas, es decir, cuando $\varepsilon_t < 0$, de ahí que ésta aparezca al cuadrado.

3.4. Modelos Multivariantes

Como hemos visto en el apartado anterior, los momentos de segundo orden (varianza), que son desconocidos, pueden ser medidos mediante un modelo con una forma funcional para la varianza condicional, de forma simultánea junto con el momento de primer orden, es decir, mediante los modelos ARCH. Posteriormente, Bollerslev (1986) realiza una extensión y generalización multivariante del modelo, del mismo modo que en la literatura econométrica y financiera se ha realizado una extensión del modelo ARMA para el caso multivariante, pasando a un modelo de vector ARMA (Bollerslev

et al. 1988; Engle y Rodrigues, 1989; Engle et al. 1984; Kaminsky y Peruga , 1990).

En los modelos ARCH, o más general GARCH, multivariantes, la matriz de varianzas-covarianzas dependen de la información presentada en un vector ARMA. Este tipo de modelos son muy utilizados en finanzas, como por ejemplo para la cobertura dinámica de una cartera, para el CAPM, etc.

La extensión de un modelo GARCH univariante en uno multivariante requiere que la matriz condicional de varianzas-covarianzas de dimensión n , cuyas variables, es decir, el error o residuo de la estimación, son aleatorias de media cero, que dependen de la información disponible hasta ese momento, ψ_{t-1} . La característica principal de los modelos GARCH multivariantes reside, pues, en que el efecto autorregresivo de las varianzas se especifica mediante la matriz de varianzas-covarianzas, que debe ser definida positiva por definición. A continuación, de forma resumida, y siguiendo la clasificación realizada por Navarro y Torró (1998), se procede a la exposición de las parametrizaciones más frecuentes para el modelo Bivariante GARCH, BGARCH (1,1), siendo éste un caso específico de los modelos GARCH multivariantes, fácilmente generalizable a dimensión n . En esta clasificación se destacan tres casos que pasamos a describir brevemente en los siguientes apartados.

3.4.1. Modelo de corrección constante

En este modelo la matriz varianzas-covarianzas será de orden 2 x 2, cuya estructura es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{s,t}^2 & \sigma_{sf,t} \\ \sigma_{sf,t} & \sigma_{f,t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{s,t} & 0 \\ 0 & \sigma_{f,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{sf,t} \\ \rho_{sf,t} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{s,t} & 0 \\ 0 & \sigma_{f,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{s,t}^2 & \rho_{sf,t} \sigma_{f,t} \sigma_{s,t} \\ \rho_{sf,t} \sigma_{f,t} \sigma_{s,t} & \sigma_{f,t}^2 \end{bmatrix} \quad [3.18]$$

donde $\rho_{sf,t}$ es el coeficiente de correlación constante, $\sigma_{sf,t}$ es la covarianza entre el mercado de contado y el de futuro, y $\sigma_{s,t}^2$ y $\sigma_{f,t}^2$ son las varianzas del mercado de contado y del de futuro respectivamente (por ejemplo el Índice IBEX-35 y su correspondiente contrato de futuro). Este modelo se ha utilizado frecuentemente en la literatura financiera para hallar una matriz definida positiva. Para ello se debería realizar previamente un estudio sobre la constancia del coeficiente de correlación, ya que no siempre puede ser factible dicha hipótesis de constancia. En el caso GARCH (1,1), el número de parámetros a estimar es muy reducido, siendo de sólo 7.

3.4.2. Modelo Vech

Se trata de un modelo más general que el anterior, puesto que plantea una estructura más dinámica con una matriz varianzas-covarianzas compuesta por una matriz de constantes, otra sobre los residuos o innovaciones y otra sobre las varianzas-covarianzas del periodo anterior. De esta forma

se obtiene una matriz de varianzas-covarianzas que representa con mayor dinamismo la interacción, por ejemplo, entre dos activos y/o mercados. El modelo Vech se plantea como sigue:

$$vech(\Sigma_t) = vech(C) + A \times vech(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon'_{t-1}) + B \times vech(\Sigma_{t-1}) \quad [3.19]$$

siendo $vech ()$ un operador que extrae de la parte inferior de las matrices simétricas sus elementos, transformándolos en un

vector columna. Ej: $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. La matriz de parámetros C

es simétrica y de orden 2×2 , mientras que A y B son matrices de coeficientes de orden 3×3 . Para que en este modelo se obtenga una matriz definida positiva se ha de cumplir que A, B y C sean semidefinidas positivas. Lógicamente esto no tiene por qué darse en todos los mercados ni para todos los activos, en cuyo caso el modelo no sería válido. Desarrollando los operadores $vech ()$, el modelo se desarrolla de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11,t} \\ \Sigma_{12,t} \\ \Sigma_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Sigma_{11,t-1} \\ \Sigma_{12,t-1} \\ \Sigma_{22,t-1} \end{bmatrix} \quad [3.20]$$

Como se observa, hay 21 parámetros, con lo que se dificulta el proceso de estimación. Para resolver este problema se puede suponer que las matrices A y B son

diagonales, con lo que al no permitir relaciones cruzadas entre sus elementos estamos asumiendo que cada varianza y covarianza sólo dependen de sus propios valores y errores de predicción pasados (Bollerslev, 1988). En este modelo BGARCH (1,1), llamado Vech diagonal, sólo se estimarán 9 parámetros obteniendo así una gran reducción de estimaciones.

3.4.3. Modelo BEKK

Este modelo es el más general de los tres. Recibe su nombre por las iniciales de los autores que lo propusieron (Yoshi Baba, Robert Engle, Dennis Kraft y Kenneth Kronen). Para un estudio más completo de dicho modelo puede verse Engle y Kroner (1995), donde se realiza un estudio de los modelos GARCH multivariantes. La expresión del modelo BEKK, en forma compacta, es la siguiente:

$$\Sigma_t = C'C + A' \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A + B' \Sigma_{t-1} B \quad [3.21]$$

donde C, A y B son matrices de parámetros de orden 2x2 y además C es simétrica y ε_t es el vector de residuos $(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})'$. En este modelo se requiere la estimación de 11 parámetros. A pesar de ello, presenta unas ventajas claras sobre los modelos anteriores. Por un lado se asegura la obtención de una matriz varianzas-covarianzas definida positiva y por otro, permite que el coeficiente de correlación varíe, dando mayor dinamismo, mientras que en los otros modelos éste permanecía constante.

3.5. Estimación de los modelos ARCH

En toda la literatura financiera aparecen de forma muy frecuente cinco métodos de estimación de los modelos autorregresivos condicionalmente heterocedásticos (ARCH) y sus variantes. Estos métodos de estimación son los siguientes:

- Método de los momentos generalizados
- Máximoverosimilitud
- Cuasimáximoverosimilitud
- Estimación indirecta
- Estimación bayesiana

De todos ellos, sólo los tres primeros son los más utilizados, ya que reducen considerablemente el tiempo de computación. De hecho, son los que suelen estar implementados en los paquetes informáticos comerciales.

La estimación de los momentos generalizados aplicado a los modelos ARCH fue implementada por Rich et al. (1991) y Glosten et al. (1993) Para la estimación de la función de máximoverosimilitud y de cuasimáximoverosimilitud puede verse Nelson (1990), Engle y Gonzalez-Rivera (1991), Steigerwald (1992) y Linton (1993), entre otros. Para la estimación indirecta, método aplicado a la estimación de la volatilidad en 1992, puede verse Gallant y Tauchen (1997), Gouriéoux et al. (1993). Para la estimación Bayesiana los referentes son Albert y Chib (1993) y Geweke (1994).

IV. Las Redes Neuronales Artificiales

4. Las Redes Neuronales Artificiales

4.1. Introducción

Los sistemas neuronales tienen la misión del control de todas las funciones biológicas. Esto es común para todos los animales. Sin embargo, sólo en los animales superiores cumplen otra función principal relacionada con el comportamiento del individuo y su relación con el entorno a través de la memoria y el pensamiento.

Las redes neuronales artificiales pueden definirse como una serie de algoritmos matemáticos con la función de encontrar relaciones no lineales entre un conjunto de datos determinados. Están basadas en el comportamiento y funcionamiento de las neuronas humanas. También pueden definirse como un nuevo sistema computacional inspirado en fundamentos biológicos (neuronas cerebrales) [Hilera (1995)]. Las redes neuronales se aplican en diversos campos científicos, y en particular en la economía y las finanzas donde gracias a su capacidad en la estimación no paramétrica, modelización y predicción de series temporales, han dado muy buenas soluciones a dichos problemas.

A pesar del gran boom que tienen en la actualidad las redes neuronales artificiales sus orígenes parten de las primeras décadas del siglo XX. En 1913, S. Rusell

planteó un dispositivo hidráulico basado en las redes neuronales, aunque no fue hasta los años cuarenta cuando se plantearon matemáticamente estos modelos. A continuación se realiza una breve reseña histórica de la evolución de las redes neuronales.

1936- Alan Turing. Fue el precursor en el estudio del cerebro humano asimilándolo a la computación.

1943- Warren McCulloch y Walter Pitts, neurofísico y matemático respectivamente, propusieron por primera vez un modelo matemático de red neuronal basado en una teoría que constituía la forma de trabajar de las neuronas. Uno de los problemas principales de este modelo fue que no tenía capacidad de aprendizaje.

1949- Donald Hebb. Precursor en la explicación del aprendizaje de las neuronas, elemento indispensable para la inteligencia humana. La idea principal es que el aprendizaje se produce ante cambios que hacen que una neurona se active. Desarrolló un algoritmo de aprendizaje denominado aprendizaje Hebbiano.

1950- Karl Lashley. Realizó diversas pruebas en las que determinó que la información no es almacenada en el cerebro de forma centralizada si no que se distribuye por todo él.

1954- Marvin Minsky. Obtuvo los primeros resultados con las

redes neuronales junto con Dean Edmons. Crearon una máquina con 40 neuronas, aplicando los modelos y teorías de McCulloch y Pitts, incorporando además el aprendizaje Hebbiano.

1956- Congreso de Dartmouth. Este congreso se considera como referencia en el nacimiento de las redes neuronales artificiales. Fue propuesto por McCarthy. Se acuñó el término “inteligencia artificial”.

1957- Frank Rosenblatt. A partir de los trabajos de Albert Uttley (1956) sobre su modelo llamado Informon, Rosenblatt desarrolla el Perceptron, uno de los modelos más conocidos a la largo de la historia. Se utiliza principalmente en el reconocimiento de patrones. Este modelo es capaz de generalizar reconociendo patrones similares a los que había aprendido previamente. Sin embargo una de sus grandes limitaciones es su incapacidad para realizar clasificaciones de clases no separables linealmente.

1959- Frank Rosenblatt. Escribe el libro “Principios de Neurodinámica” en el que indicaba que el aprendizaje del Perceptron converge hacia un estado finito, bajo ciertas circunstancias.

1960- Bernard Widroff y Marcian Hoff. Desarrollan el modelo Adaline (Adaptative Linear Elements). Éste fue el primer modelo con una aplicación a un problema real. Fue usado para

la eliminación de los ecos en las líneas telefónicas y se utilizó durante varias décadas.

1969- Marvin Minsk y Seymour Papert. En su libro "Perceptrons", plantean las limitaciones de las capacidades del Perceptron. Así pues, demostraron matemáticamente que no era capaz de resolver problemas relativamente fáciles como el aprendizaje de una función no lineal, funciones muy empleadas en la computación y en muchos problemas reales.

1974- Paul Werbos. Desarrolla el algoritmo de aprendizaje de propagación hacia atrás (Backpropagation).

1977- Stephen Grossberg. Plantea la teoría de resonancia adaptada. Se trata de una arquitectura de red que se diferencia de las planteadas hasta la fecha y es capaz de simular la memoria a largo y corto plazo.

1982-1985- John Hopfield. Escribe su libro "Computación neuronal de decisiones en problemas de optimización". Describe un sistema (modelo de Hopfield) basado en sistemas olfativos, obteniendo un modelo construido por elementos interconectados que buscan un estado interno de mínima energía.

1986- David Rumelhart /G. Hinton. Redescubren y desarrollan el algoritmo de propagación hacia atrás (backpropagation).

Desde esa fecha existen numerosos trabajos relacionados con las redes neuronales, de los que pueden destacarse: la Teoría de la Resonancia Adaptativa (ART) desarrollada por Gail Carpenter y Stephen Grossberg en 1986, las máquinas de Boltzman y Cauchy estudiadas por Hinton y Sejnowski en 1986, los mapas Autoorganizados de Teuvo Kohonen (1988), algoritmo support vector networks o support vector machines (SVM) de Vapnik(1995), entre otros.

Uno de los primeros trabajos en los que se comenzó a aplicar las redes neuronales en las finanzas fue realizado por White (1988), en el que estudiaba el precio diario de las acciones de IBM mediante un modelo de red neuronal. A partir de este trabajo surgió un boom de trabajos aplicados a finanzas fundamentalmente relacionados con las cotizaciones bursátiles y tipos de cambio, entre otras variables económicas y financieras. Así, por ejemplo, pueden destacarse otros trabajos pioneros como los de Dutta y Shekhar (1988) quienes estudian la valoración de los bonos mediante redes neuronales. Trippi (1990) y Hawley (1990) que estudian la toma de decisiones de inversión. Tam y Kiang (1992) que estudian las quiebras bancarias. Grudnitski y Osburn (1993) que estudian las cotizaciones de los contratos de futuros del índice S&P y del oro. En Gately (1996) pueden verse diversas aplicaciones de las RNA en predicción financiera. En Montaña (2002) estudia la aplicación de las RNA en el análisis de datos. Como ejemplo, puede verse el estudio de predicción de bancarrotas bancarias (Tam et al 1992).

Otro grupo de trabajos parte de la idea de realizar comparativas entre los modelos clásicos y las redes neuronales relacionadas con la predicción, siendo más favorables las redes cuando los datos están altamente correlacionados, faltan datos o el modelo no es lineal. Se determina que una red neuronal sin capas ocultas intermedias se asemeja a un modelo lineal clásico. Sin embargo, la mayoría de redes neuronales presentan capas ocultas que mejoran la capacidad de aprendizaje y predicción, estando preparadas para captar relaciones más complejas entre las variables (no lineales), ya que, en general, un modelo lineal no es capaz de captar las relaciones no lineales existentes entre múltiples variables financieras.

4.2. Fundamentos Biológicos

Las redes neuronales artificiales se basan fundamentalmente en la estructura y funcionamiento de las neuronas biológicas. En este apartado se describen algunos de los fundamentos biológicos que existen en las mismas. Una de las características principales que las redes neuronales artificiales intentan simular es su sistema de interconexión de procesos mediante las neuronas, formando redes, en las que dichas conexiones se transforman en otras estructuras y funciones a largo y corto plazo. Dichos cambios son los que provocan el aprendizaje y la memoria. Por tanto, serán las neuronas el elemento principal sobre las que las redes neuronales artificiales se fijarán para simular su

comportamiento, estructura y modificaciones para poder realizar la función de aprendizaje.

En el cerebro humano existen aproximadamente unas 10^{11} neuronas y se estima que existen unas 10^{15} interconexiones. Tanto el tamaño como la estructura de la red varía a lo largo del tiempo. La mayoría de neuronas biológicas tienen una serie de partes características y principales como son el núcleo celular, el axón y las dendritas.

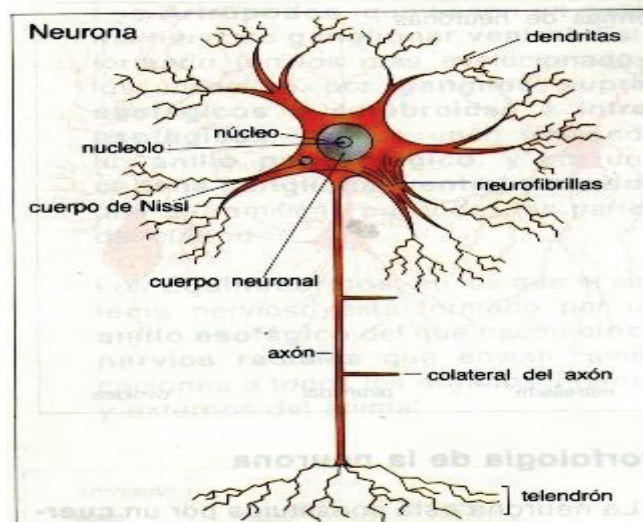
El núcleo celular es el responsable de procesar las señales que en forma de impulsos le llega de otras células a través de las dendritas, generando un nuevo impulso hacia otras células a través del axón. Es decir, la neurona obtiene los datos por las dendritas en forma de impulsos eléctricos. Esto hace que la neurona se active y envíe un impulso eléctrico a otras neuronas mediante el axón. Este impulso libera neurotransmisores que llegan a otras células. Las neuronas no se encuentran unidas unas con otras. Existe un pequeño espacio entre ellas. La conexión o sinapsis se realiza pues mediante los neurotransmisores.

Las transmisiones de una neurona se producen por impulsos eléctricos que modifican la química de los neurotransmisores. El proceso de aprendizaje se produce con estas modificaciones.

Lógicamente existen diferencias entre los

estudios sobre las neuronas biológicas y las artificiales (RNA). Las propiedades físicas de las neuronas y sus conexiones son muy complejas en comparación con los modelos de redes neuronales artificiales. Las estructuras de las RNA son biológicamente imposibles, así como las funciones y algoritmos de aprendizaje. A pesar de estas grandes diferencias, las RNA simulan muy aceptablemente el comportamiento de las neuronas humanas y se obtienen resultados muy parecidos a los procesos biológicos. Es decir, son capaces de aprender de la experiencia, de generalizar a partir de casos anteriores a nuevos casos, y discernir entre características principales a partir de datos de entrada.

Figura 4-1: Gráfico de una neurona



Fuente: blog.periodistadigital.com

Algunas de las ventajas que poseen las RNA y que comparten con las neuronas biológicas son, por ejemplo, su capacidad de aprendizaje adaptativo y la autorganización, o la tolerancia a fallos.

Las RNA pueden realizar aprendizaje adaptativo, es decir, tienen la capacidad de aprender mediante un entrenamiento o experiencia, dado que pueden discernir patrones mediante ejemplos, por lo que no es necesario implementar modelos a priori ni hace falta asignar funciones de distribución probabilística. Son sistemas autoadaptativos por la capacidad de las neuronas de adaptarse y ajustarse. Además son dinámicos, es decir, pueden cambiar constantemente para adaptarse a nuevas condiciones. Durante el proceso de aprendizaje las ponderaciones de las conexiones de las neuronas varían hasta obtener un resultado específico.

Las RNA son autoorganizadas, es decir, pueden crear su propia organización de la información que se le presenta durante el proceso de aprendizaje. La autoorganización consiste en la modificación de la red neuronal para conseguir un objetivo determinado. Esto provoca que las redes puedan responder adecuadamente ante patrones o datos sobre los que no tenía experiencia previa (capacidad de generalización).

La tolerancia a fallos de las RNA se basa en que la destrucción parcial de una red lleva a una modificación en su

estructura, pero pueden permanecer algunas de sus capacidades intactas. Una red aunque tenga fallos en alguna de sus neuronas, seguirá funcionando, aunque, es verdad, se verá influenciado, por este deterioro. Se puede distinguir la tolerancia a fallos relacionada con la distorsión o ruido en los datos de entrada, incluso con datos incompletos, en los que la red es capaz de distinguir patrones.

Las RNA pueden programarse para su ejecución en paralelo pudiendo trabajar incluso en tiempo real.

4.3. Estructura y Elementos de las RNA

4.3.1. Las neuronas artificiales

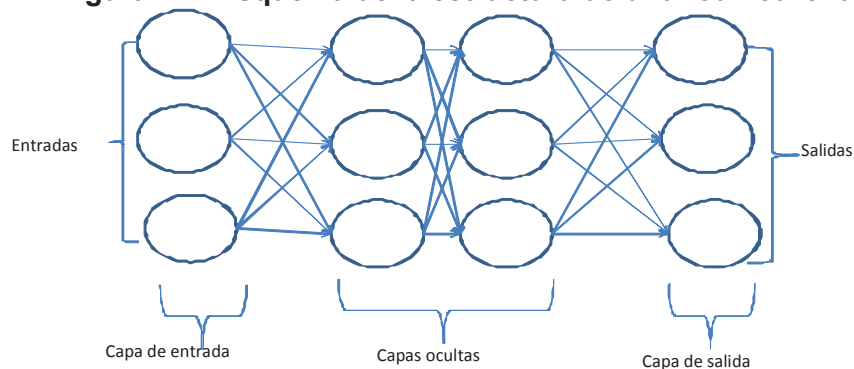
Como se ha dicho anteriormente, las RNA son modelos que intentan simular el comportamiento de las neuronas; por tanto, serán éstas las principales unidades de proceso, que tendrán como mínimo un canal de entrada de la información y uno de salida. Cualquier red neuronal tendrá una o más neuronas que se distribuirán a lo largo de una estructura específica para la resolución de un problema planteado con los datos disponibles.

Existen tres tipos de neuronas. Las primeras son las que reciben los estímulos externos y las que captan la información de entrada a la red. En segundo lugar, tenemos el grupo de neuronas que se encuentran en el intermedio de la

estructura de la red y se encargan del procesamiento de la información y aprendizaje sobre la misma, siendo este grupo las denominadas neuronas ocultas. Por último, se presentan las neuronas que, una vez realizado el proceso de aprendizaje, muestran la información resultante dando respuesta al problema planteado.

Podemos definir como capa o nivel a un conjunto de neuronas que tienen la misma fuente de entrada de datos (puede ser otra capa de neuronas) cuyas salidas se encaminan a una misma dirección (puede ser otra capa de neuronas). La figura 4-2 representa un ejemplo de un esquema de una red neuronal.

Figura 4-2: Esquema de la estructura de una red neuronal



Fuente: Elaboración propia

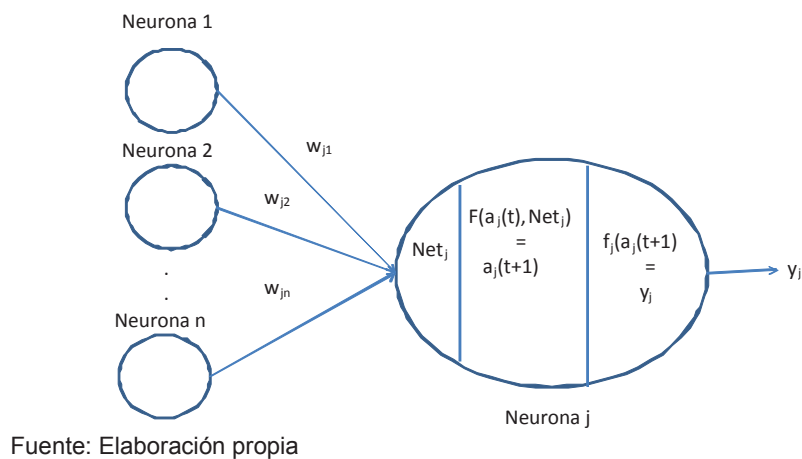
Cada neurona está caracterizada por un estado de activación $a_i(t)$ asociado. Existe una función de salida f_i (también llamada función de transferencia) que modifica dicho estado y lo transforma en una señal de salida y_i . Estas señales serán transmitidas a otras neuronas a través de las conexiones

o sinapsis mediante ponderaciones w_{ij} según alguna regla determinada. La agregación de cada señal de salida por sus ponderaciones que han llegado a la neurona j -ésima se combinan entre ellas de tal forma que constituyen la llamada entrada total Net_j , o regla de propagación, que se trata del cálculo del valor neto que realiza esta neurona con las diferentes señales que han entrado en la misma.

$$Net_j = \sum_i y_i w_{ij} \quad [4.1]$$

La función de activación o de transferencia F estima el nuevo estado de activación $a_j(t + 1)$ de una neurona en un momento posterior teniendo en cuenta el estado de activación anterior $a_j(t)$ y la entrada total calculada Net_j .

Figura 4-3: Esquema del funcionamiento de transmisión



Cuando la regla de propagación o Net_j supera un cierto número (llamado umbral Φ) entonces la neurona se

activa y el número resultante se incorpora a la función de transferencia que dará como resultado las señales de salida y_i . En la figura 4-3 puede verse de forma esquemática el funcionamiento de la transmisión de la información de una neurona.

4.3.2. Estado de Activación

Como se ha indicado anteriormente la neurona biológica puede estar activada (excitada) o permanecer inactiva (no excitada). En el caso de las neuronas artificiales también pueden tener estos dos estados de activación, pero algunas pueden tomar cualquier valor dentro de un intervalo determinado $a_i(t)$. Es decir, los valores de activación pueden ser continuos o discretos. Pueden ser limitados o ilimitados. Si se trata de valores discretos suele tomarse un conjunto pequeño de valores, aunque lo habitual son la elección de valores binarios. Con los números binarios, cuando una neurona se encuentra en un estado activo se representa por 1, mientras que un 0 representa un estado pasivo de la neurona que estará en reposo y no realizará ningún impulso de transmisión de valores o información a otra neurona. En algunos modelos de RNA se consideran conjuntos continuos de valores de estado de activación. Así podemos tener, por ejemplo, el intervalo $[0,1]$ o también $[-1,1]$ muy utilizado en funciones sigmoideas (Tanco, 2003)

4.3.3. Función de Activación o de Transferencia

Esta función sirve para combinar las entradas de información de la neurona con su estado de activación actual para así provocar un cambio en la misma y dar salida o no a nueva información, en función del grado de activación que se produzca. La función F de transferencia o de activación produce nuevos cambios en la neurona a partir del estado actual de la neurona $a_j(t)$ y la combinación de los pesos de las conexiones de la neurona con las entradas de información a la misma, es decir, el Net_j . Con todo esto se produce el nuevo estado de activación de la neurona llamado $a_j(t + 1)$. Por tanto, puede escribirse que $a_j(t + 1) = F(a_j(t), Net_j)$.

La mayoría de ocasiones la función de activación F es la llamada función identidad, esto implica que no se tiene en cuenta el estado de activación actual de la neurona y, por tanto, la información que pasa a la función de salida f_j que se produce en la neurona será exclusivamente el valor de Net_j . Es decir, en este caso se cumple que $y_j = f(Net_j) = f(\sum_{i=1}^n w_{ij} y_i)$. Además esta función de activación o de transferencia no está centrada en origen dado que existe un ligero desplazamiento provocado por las características internas de cada neurona y que son diferentes a cada una de ellas, es decir, el llamado umbral de activación Φ para una neurona. Por tanto, la función de activación se reescribe como $y_j = f(Net_j - \Phi) = f(\sum_{i=1}^n w_{ij} y_i - \Phi)$. Así, cuando el valor de

entrada neta Net_j sea superior al umbral Φ de esa neurona, ésta se activará.

4.3.4. Función de salida

Esta función es la última que presenta la neurona y su tarea no es otra que determinar el valor de salida que transfiere a otras neuronas que se encuentren vinculadas con ella. Como se ha indicado anteriormente, si este valor es inferior al umbral, la neurona no se activará y no producirá ningún resultado a transferir. Dado que los datos de entrada a la neurona están limitados a los valores que pueden tomar los estados de activación de la misma, como se dijo anteriormente, pueden ser valores continuos, binarios,...los valores de salida de la neurona estarán también dentro de dichos rangos.

Los diferentes valores de salida que puede ofrecer la neurona dependen del tipo de función de activación o de transferencia F que se trate. Así pues, pueden destacarse los siguientes tipos principales de función de activación:

a) Función de activación escalón

Este tipo de función se utiliza generalmente cuando las neuronas tienen un estado de activación binario (0,1). La neurona se activará cuando el valor neto de entrada Net_j sea superior o igual al umbral de la neurona y no se activará en caso contrario

$$y_j = f(Net_j - \Phi) \quad [4.2]$$

toma valor 1 cuando $Net_j \geq \Phi$

toma valor 0 cuando $Net_j < \Phi$

En la figura 4-4 puede verse una función de activación de tipo escalón cuando el umbral sea cero.

b) Función de activación lineal o identidad

Esta función puede obtener cualquier número real y el estado de activación coincide con el valor de la entrada neta Net_j .

$$y_j = f(Net_j - \Phi) = Net_j - \Phi \quad [4.3]$$

En la figura 4-5 puede verse un esquema de este tipo de función.

c) Función de activación lineal-mixta

Se trata de una variante de la función de activación lineal. En este caso los valores de estado que puede obtener la neurona se encuentran fijados dentro de un intervalo de números reales.

$$y_j = f(Net_j - \Phi) \quad [4.4]$$

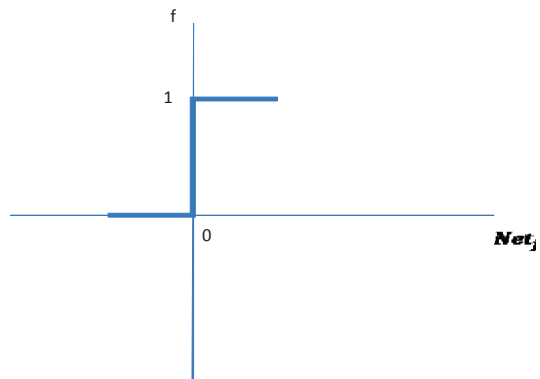
toma valor x cuando $Net_j \leq x + \Phi$

toma valor $Net_j - \Phi$ cuando $x + \Phi < Net_j < X + \Phi$

toma valor X cuando $Net_j \geq X + \Phi$

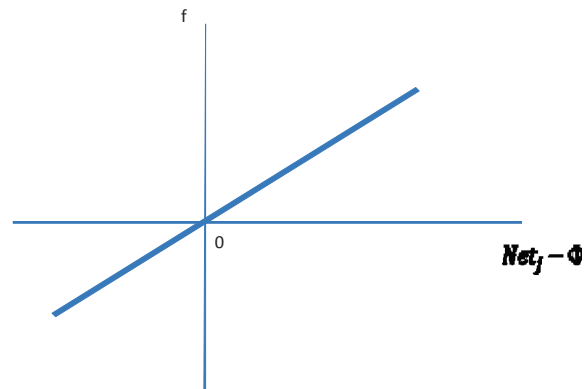
En la figura 4-6 se representa gráficamente esta función de activación.

Figura 4-4: Función de activación escalón



Fuente: Elaboración propia

Figura 4-5: Función de activación lineal o identidad



Fuente: Elaboración propia

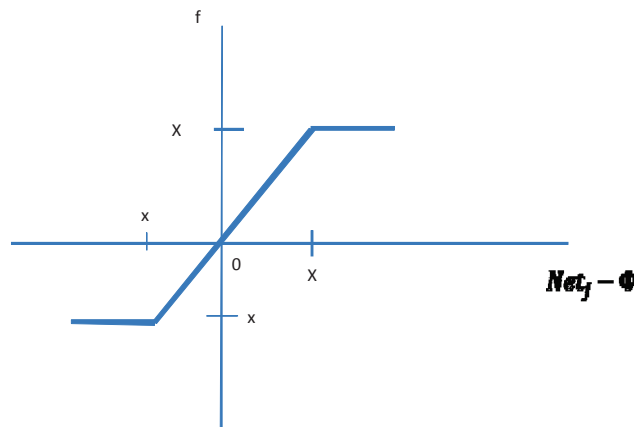
a) Función de activación sigmoial

Se trata de una función de activación continua dentro del intervalo del eje real, con un valor de salida continuo entre cero y uno.

$$y_j = f(\text{Net}_j - \Phi) = \frac{1}{(1+e^{-(\text{Net}_j - \Phi)})} \quad [4.5]$$

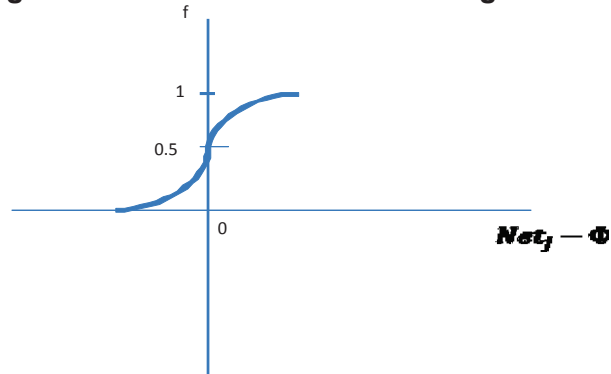
Su gráfica viene representada en 4-7.

Figura 4-6: Función de activación lineal-mixta



Fuente: Elaboración propia

Figura 4-7: Función de activación sigmoideal



Fuente: Elaboración propia

4.3.5. Mecanismos o Reglas de Aprendizaje

El proceso de aprendizaje viene determinado por la variación o modificación de los estados de activación de cada neurona. En las neuronas biológicas se establece que el conocimiento se encuentra en la sinapsis, es decir, está relacionado más con los valores sinápticos de las conexiones neuronales que con las propias neuronas. Asimilando esta cuestión a las redes neuronales artificiales, puede decirse que el conocimiento será representado por los valores de cada peso w_{ij} de las conexiones entre neuronas. Entonces el proceso de aprendizaje provoca cambios en los estados de activación de las neuronas y en sus conexiones variando los pesos la neurona.

La neurona irá aprendiendo y realizando cálculos para encontrar una solución correcta para los datos de entrada.

Éste será el proceso de entrenamiento. Los cambios en el valor de los pesos durante el aprendizaje simula el comportamiento de las neuronas biológicas que están constantemente creando, modificando y destruyendo conexiones entre neuronas. Así, en el caso de las RNA, las neuronas crearán una nueva conexión cuando el valor de su peso sea mayor que cero y se destruirá dicha conexión cuando el peso tome valor cero.

El proceso de aprendizaje finaliza cuando los pesos que tiene cada conexión de cada neurona permanecen ya constantes sin ninguna variación $\frac{dw_{ij}}{dt} = 0$. Por tanto, la clave del aprendizaje reside en qué criterios se sigue para la modificación de cada peso asignado a cada conexión para que la neurona, y la red, aprenda y obtenga nuevas informaciones.

Una de las clasificaciones de los mecanismos de aprendizaje de las RNA son las de RNA con aprendizaje supervisado y RNA con aprendizaje no supervisado. La diferencia fundamental entre ambas es que en el primer caso, aprendizaje supervisado, existe un agente externo (supervisor) con controla el mismo proceso de aprendizaje de las neuronas y de la red.

Otra de las clasificaciones que puede realizarse es si la red puede o no aprender mientras está en funcionamiento. Se llama aprendizaje on line si la red puede aprender mientras está en funcionamiento. Es este caso la red no distingue entre la fase de entrenamiento y de operatividad

de la misma. Los pesos irán modificándose constantemente de forma dinámica mientras la neurona consiga nueva información. Cuando la red tiene un mecanismo de aprendizaje off line, la red deja de estar en funcionamiento cuando se encuentra en la fase de entrenamiento, utilizando un conjunto de datos de entrenamiento. Una vez entrenada la red, entrará en funcionamiento y utilizará otro conjunto de datos para realizar test o pruebas sobre el aprendizaje efectuado. En este caso, los pesos de las neuronas quedan fijados definitivamente una vez concluida la fase de entrenamiento.

Con carácter general los cambios en los pesos se producen a partir del peso existente. Así, el nuevo peso es igual al existente más la variación o cambio que se produce en ese instante.

$$w_{ij}(t + 1) = w_{ij}(t) + \Delta w_{ij}(t) \quad [4.6]$$

donde t es el tiempo de referencia durante el aprendizaje, $w_{ij}(t + 1)$ es el nuevo valor del peso y $w_{ij}(t)$ el valor anterior del peso.

A continuación se describen los diferentes tipos de aprendizaje de RNA siguiendo la distinción entre aprendizaje supervisado y no supervisado.

4.3.6. Aprendizaje supervisado

El aprendizaje supervisado requiere de un agente externo o supervisor que determina, mediante un entrenamiento controlado, las respuestas que debe dar la RNA a partir de la entrada de datos. Este tipo de entrenamiento controlado puede realizarse de tres formas diferentes:

A) Aprendizaje por corrección de error

Este primer tipo de entrenamiento supervisado consiste en que el supervisor va ajustando los pesos de las conexiones de las neuronas en función de las diferencias que se van produciendo entre los valores que se desean obtener y los que realmente ha obtenido la RNA. Un ejemplo simple de este tipo de aprendizaje podría ser el siguiente algoritmo:

$$\Delta w_{ij} = \alpha y_i (d_j - y_j) \quad [4.7]$$

donde:

Δw_{ij} : es la variación del peso (o variación del estado) de la conexión de la neurona i y j

y_i : es el valor de salida de la neurona i

d_j : es el valor de salida deseado para la neurona j

y_j : es el valor de salida de la neurona j obtenido realmente

α : es el factor de aprendizaje que tendrá un valor entre 0 y 1, y que determina la velocidad de aprendizaje de la neurona.

Uno de los primeros modelos que utilizaron este tipo de aprendizaje puede encontrarse en la regla de

aprendizaje del Perceptron, desarrollado por Rosenblatt en 1958 (Rosenblatt, 1958).

Otros algoritmos basados en este tipo de aprendizaje que han evolucionado son, por ejemplo, el propuesto por Widrow y Hoff en 1960, denominado regla delta o del mínimo error cuadrático medio, que mejora la rapidez de aprendizaje de la RNA. Este algoritmo se aplicó principalmente a las RNA ADALINE y MADALINE, que son redes adaptativas lineales y múltiples, respectivamente (Widrow et al. 1960).

Uno de los principales algoritmos más extendidos y utilizados relacionados con este tipo de aprendizaje supervisado es el de la regla delta generalizada o error Backpropagation. Se trata de una generalización del algoritmo propuesto por Widrow y Hoff. Este algoritmo generalizado, a diferencia del anterior, puede utilizarse en estructuras de red multicapa, lo que le da un mayor poder de aprendizaje. Se basa en estructuras de conexiones hacia adelante con múltiples capas y capas ocultas intermedias.

B) Aprendizaje por refuerzo

El aprendizaje por refuerzo se basa en que el supervisor simplemente indica a la RNA una señal de refuerzo si la salida obtenida es satisfactoria (+1) o en caso contrario (-1) penalizando dicha salida. En función de estas señales (mecanismo probabilístico) los pesos de las neuronas irán variando. Este tipo de aprendizaje es mucho más lento que el

anterior, ya que se basa en que no se dispone de la información completa referente al comportamiento deseado de la red ante una entrada de datos.

Algunos de los algoritmos basados en este tipo de aprendizaje son: algoritmo lineal con recompensa y penalización (Linear Reward-Penalty) propuesto por Narendra y Thathacher en 1974, ampliado posteriormente en 1985 por Barto y Anandan proponiendo el algoritmo asociativo con recompensa y penalización (Associative Reward-Penalty) que se aplica en redes con conexiones hacia delante de dos capas y que tienen neuronas de salida con función de activación de tipo estocástico (Barto et al. 1985).

Otro tipo de algoritmo conocido es el de Barto, Sutton y Anderson, que en 1983 presentan Adaptive Heuristic Critic, utilizado en redes de tipo feedforward con tres capas diseñadas de tal forma que la propia red sea capaz de generar las señales de refuerzo para aplicarlas a las neuronas de salida de la red (Barto et al 1983).

C) Aprendizaje estocástico

Este tipo de aprendizaje supervisado se basa principalmente en provocar cambios aleatorios en el valor de los pesos de las conexiones de las neuronas para, posteriormente, realizar una evaluación de los efectos producidos a partir del objetivo deseado y de una distribución de probabilidad determinada.

En el aprendizaje estocástico una vez realizado un cambio en los pesos, se determina si el comportamiento de la red es próximo al deseado, en cuyo caso se aceptaría dicho cambio. En caso contrario, no se aceptará el cambio, siempre en función de una distribución de probabilidad establecida por el supervisor.

Una de las redes más conocidas que utilizan este sistema de aprendizaje supervisado es la denominada Máquina de Boltzmann, propuesta por Ackley, Hinton y Sejnowski en 1985, y que combina este aprendizaje con el aprendizaje Hebbiano (aprendizaje no supervisado que veremos posteriormente) o también lo combina con el aprendizaje supervisado por corrección de error. Se trata de un tipo de red que siempre tiene neuronas ocultas que, mediante ajustes probabilísticos, pueden introducir un ruido en la fase de aprendizaje que irá disminuyendo conforme pase el tiempo de aprendizaje con el objetivo de evitar resultados de mínimos relativos locales, intentando buscar así el mínimo global (cuando el resultado de salida se aproxima al resultado deseado).

Otra red basada en este tipo de aprendizaje es la Cauchy Machine propuesta por Szu en 1986. Se trata de una mejora de la máquina de Boltzmann, haciendo más rápido el aprendizaje en la búsqueda de ese mínimo global.

4.3.7. Aprendizaje no supervisado

Este tipo de aprendizaje se basa en que no es necesario un supervisor para ajustar los pesos de las conexiones de las neuronas. Se trata de un aprendizaje autosupervisado y la red no tiene información referente a si las salidas generadas son o no correctas. Con este tipo de aprendizaje, las RNA encuentran características, correlaciones, etc. en los datos de entrada. Dado que no se le indica a la red qué salida es la correcta, en función del tipo de estructura y del algoritmo de aprendizaje utilizado variará la interpretación de las salidas que proporcione.

Así pues, podemos encontrarnos con salidas que buscan similitudes con los datos de entrada, otras pueden realizar clustering o establecer categorías indicando en las salidas a qué categoría pertenece los datos de entrada, siendo la red la que genera dichas categorías en función de las correlaciones que detecta entre los datos. Otras redes lo que hacen es un mapeo de características (features mapping), siendo las neuronas de salida un mapa topográfico de las características de los datos de entrada.

Se pueden distinguir dos tipos principales de aprendizaje: no supervisado o autosupervisado.

A) Aprendizaje Hebbiano

Este tipo de aprendizaje fue propuesto por Hebb

en 1949 y decía que: “*Cuando un axón de una celda A está suficientemente cerca como para conseguir excitar una celda B y repetida o persistentemente toma parte de su activación, algún proceso de crecimiento o cambio metabólico tiene lugar en una o ambas celdas, de tal forma que la eficiencia de A, cuando la celda a activar es B, aumenta*”. Hebb denomina celdas a un conjunto de neuronas muy interconectadas con una estructura muy compleja. La eficiencia, en este caso, se identifica con la intensidad de las conexiones de las neuronas, es decir, el peso (Hebb, 1949).

El aprendizaje Hebbiano consiste en el ajuste de pesos de las conexiones de las neuronas conforme a la correlación existente entre los valores de activación (salidas) de las dos neuronas conectadas.

$$\Delta w_{ij} = y_i y_j \quad [4.8]$$

donde Δw_{ij} es la variación en el peso en la conexión de la neurona i y j ; y_i es la salida de la neurona i ; y_j es la salida de la neurona j .

Esto indica que si las dos neuronas son activas, se produce un reforzamiento en la conexión entre las dos neuronas. Por el contrario, cuando una está activa y la otra no, se produce un debilitamiento de la conexión, es decir, se penaliza dicha conexión. Como las modificaciones de los pesos se basan en las salidas (estados de activación) de las neuronas ante la información entrante en cada una de ellas, el

aprendizaje es no supervisado.

Este tipo de aprendizaje se utiliza en la Red Hopfield, propuestas por este autor en 1982, red muy conocida e implementada en muchos circuitos integrados. Posteriormente también se ha utilizado en la red Bidirectional Associative Memory propuesta por Kosko (1988).

Una versión de este tipo de aprendizaje hebbiano es el hebbiano diferencial y se basa en utilizar la correlación entre las derivadas en el tiempo de las funciones de activación de las neuronas. Este tipo de aprendizaje se utiliza en la Adaptive Bidirectional Associative Memory propuesta por Kosko (1987)

B) Aprendizaje competitivo y cooperativo

En este tipo de aprendizaje las neuronas compiten y cooperan entre ellas para conseguir un objetivo dado. Ante la información de entrada en la red, busca que las neuronas de salida de la misma obtengan su máximo valor de respuesta posible. Esta competición y cooperación se da en todas las neuronas y en todas las capas de la red. Cuando sean competitivas, las conexiones entre neuronas tendrán conexiones recurrentes de autoexcitación (Activación) y conexiones de inhibición, cuando sean neuronas próximas. Cuando sean de tipo cooperativo las conexiones serán sólo de activación.

Con este tipo de aprendizaje se intenta realizar categorías (clustering) con los datos de entrada a la red. Cuando los datos sean similares serán clasificados en la misma categoría y serán activadas las mismas neuronas de salida. Las distintas categorías son creadas por la propia red neuronal, dado que estamos ante un aprendizaje no supervisado, en base a las correlaciones y características existentes entre los datos de entrada.

Uno de los tipos de redes más conocidos que utilizan este tipo de aprendizaje es el desarrollado por Kohonen en 1988, denominado Learning Vector Quantization, que se aplica en redes con dos capas de tipo feedforward.

Otros modelos con tipo de aprendizaje competitivo son los ART1 y ART2 (Adaptative Resonance Theory) desarrollado por Carpenter y Grossberg en 1987. Se trata de una red de dos capas de tipo feedforward/feedback. Esta red construye un prototipo con la información que recibe de entrada y genera una salida con otro prototipo o ejemplo que aglutina todas las informaciones del mismo tipo o categoría (Carpenter et al 1987).

4.3.8. Relación entre la información de entrada y salida de la RNA

Como se ha indicado, las neuronas conforman un sistema que almacena información aprendida y queda registrada en la misma distribuyéndose por toda la red en

función de los pesos asociados a las conexiones existentes entre las mismas. Puede decirse que una red neuronal tiene cierto tipo de memoria de tipo asociativo, en el que la red ofrece una respuesta ante la entrada de información a la misma.

Existen dos mecanismos básicos para la asociación entre la información de entrada y salida de la red. El primero, heteroasociación, en el que la información es aprendida y asociada por pares de datos. Para este tipo de red se necesitan como mínimo dos capas en la estructura, una para obtener la información de entrada y otra para la salida de la información asociada. Este tipo de redes pueden tener las conexiones de las neuronas hacia adelante (feedforward), utilizadas en las redes Perceptron y Backpropagation, pueden tener conexiones hacia atrás feedforward/feedback como las redes ART y pueden tener también conexiones laterales como las redes Cabam.

El segundo mecanismo de asociación entre la información es la autoasociativa, donde la red aprende algunas informaciones y cuando se le presenta nueva información crea autocorrelaciones entre esta nueva información y la ya aprendida dando como respuesta de salida aquella que más se parezca a las almacenadas. Este tipo de red requiere una capa de neuronas como mínimo en su estructura, en este caso la red comienza a retener y a aprender de los datos de entrada para después ofrecer la respuesta autoasociada a la misma. Si se

quisiera mantener tanto la información de entrada como la de salida sería necesario ir añadiendo capas a la estructura. La red más utilizada con este tipo de conexiones es la de Hopfield. Suele utilizarse para filtrar información y reconstrucción de datos, eliminando el ruido o distorsiones existentes en las informaciones de entrada. También puede utilizarse para problemas de optimización.

4.4. RNA con conexiones hacia adelante: Backpropagation

La red neuronal Backpropagation fue propuesta por Rumelhart, Hinton y Williams en 1986 y trata de construir una red neuronal con más niveles de neuronas que la que se había utilizado con la red Perceptron de Rosenblatt. Se trata de una red que utiliza el aprendizaje supervisado basado en la regla delta o propagación del error hacia atrás, ya visto anteriormente. En el caso de la red Backpropagation este algoritmo de aprendizaje se generaliza para poder utilizarse en una red con más de dos capas (Rumelhart et al. 1986).

El funcionamiento de este tipo de red se realiza en dos fases. Inicialmente, la información entra en las neuronas de la primera capa y genera una asociación de los datos entrada-salida a pares. En segundo lugar, se produce una propagación al resto de neuronas del resto de capas y va comparando las diferentes salidas de las neuronas con la salida que se desea obtener, calculando el error que comete en el aprendizaje. Posteriormente, estos errores de cada neurona

se transmiten hacia atrás desde las neuronas de salida hasta las neuronas de las capas anteriores y directamente conectadas con la salida de la red. De esta forma se determina la contribución de cada neurona en el error total. Con esta nueva información los pesos de las neuronas implicadas van variando, para que cuando los datos que se presenten de nuevo a la red sean similares, el resultado o salida que generen será más próximo al resultado deseado, disminuyendo el error.

La importancia de este tipo de redes reside en su capacidad de autoadaptar los pesos de las neuronas de las capas intermedias que incrementan el potencial de aprendizaje sobre la relación entre los patrones que genera inicialmente la red con las salidas correspondientes. Se trata de la capacidad de generalización, en la que la red es capaz de dar salidas y soluciones muy favorables ante informaciones nuevas sobre las que no se había entrenado anteriormente.

4.4.1. El Aprendizaje Backpropagation: La Regla Delta Generalizada

Como se indicó en el apartado de los algoritmos de aprendizaje, el algoritmo de aprendizaje que se utiliza en la red Backpropagation, está basado en el propuesto por Widrow en 1960, la llamada regla delta, que para este caso se generaliza (regla delta generalizada) para poder utilizarse con una red con conexiones de neuronas hacia adelante

(feedforward) cuyas funciones de activación son de tipo continuo, bien lineal o sigmoideal (como ya se explicó anteriormente), llegando así al algoritmo de retropropagación (backpropagation).

El mecanismo de aprendizaje de la delta generalizada es el mismo que el utilizado en los ajustes de los pesos de las neuronas para las redes Perceptron y Adaline. Es decir, los pesos van variando en proporción de la delta (diferencia entre la salida deseada y la obtenida realmente). Es decir:

$$\Delta w_{ij}(t + 1) = \alpha \delta_{pj} y_{pi} \quad [4.9]$$

donde:

$\Delta w_{ij}(t + 1)$: es la variación del peso entre la neurona i y j que se produce una vez recibe un impulso que las activa.

α : es el factor de aprendizaje que tendrá un valor entre 0 y 1, y que determina la velocidad de aprendizaje de la neurona. Será un valor constante.

y_{pi} : es el valor de salida de la neurona i bajo el patrón de aprendizaje p .

δ_{pj} : es el valor de la delta o diferencia entre la salida deseada y la obtenida realmente.

La diferencia entre la delta y la delta generalizada estriba precisamente en el valor concreto de δ_{pj} que se obtiene. En el caso de la delta se indicó que la diferencia era $(d_j - y_j)$. Es decir, la diferencia entre el valor

deseado de la neurona j y el valor realmente obtenido por la neurona j . Sin embargo, para el caso de la regla delta generalizada, la delta se define como:

$$\delta_{pj} = (d_{pj} - y_{pj})f(net_j) \quad [4.10]$$

donde :

d_{pj} : es el valor de salida deseada de la neurona j para el patrón p

y_{pj} : es el valor de salida de la neurona j mediante el patrón p

$f(net_j)$: es la función de entrada neta de información que recibe la neurona j .

En la delta generalizada, cuando una neurona no sea de salida de la red, es decir, sea intermedia, el error que se genere será función del error cometido por las neuronas que reciben como entrada la salida de dicha neurona. Esto será lo que se ha denominado anteriormente la propagación del error hacia atrás. En este caso la delta generalizada se expresará como sigue:

$$\delta_{pj} = (\sum_k \delta_{pk} w_{kj}) f(net_j) \quad [4.11]$$

donde el parámetro k representa todas aquellas neuronas que están conectadas a la salida de la neurona j . Por tanto, el error que se comete en una neurona en una capa oculta (intermedia) será la suma de los errores que se produzcan en las neuronas que están conectadas a la salida de ésta, siempre ponderado por los pesos correspondientes a cada conexión.

Como se ha indicado anteriormente el parámetro α es el factor de aprendizaje y que determina la velocidad de aprendizaje de la neurona. A mayor tasa de aprendizaje más grandes serán los cambios de los pesos a cada iteración, y por tanto, más rápido será el aprendizaje. Sin embargo, este aprendizaje podría hacer oscilaciones y empeorar los resultados. Para reducir estas oscilaciones, Rumelhart, Hinton y Williams en 1986, proponen una modificación en la variación de incremento de los pesos, incorporando un término denominado momento o β quedando como sigue:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \alpha \delta_{pj} y_{pi} + \beta (w_{ij}(t) - w_{ij}(t-1)) =$$

$$\Delta w_{ij}(t+1) = \alpha \delta_{pj} y_{pi} + \beta \Delta w_{ij}(t) \quad [4.12]$$

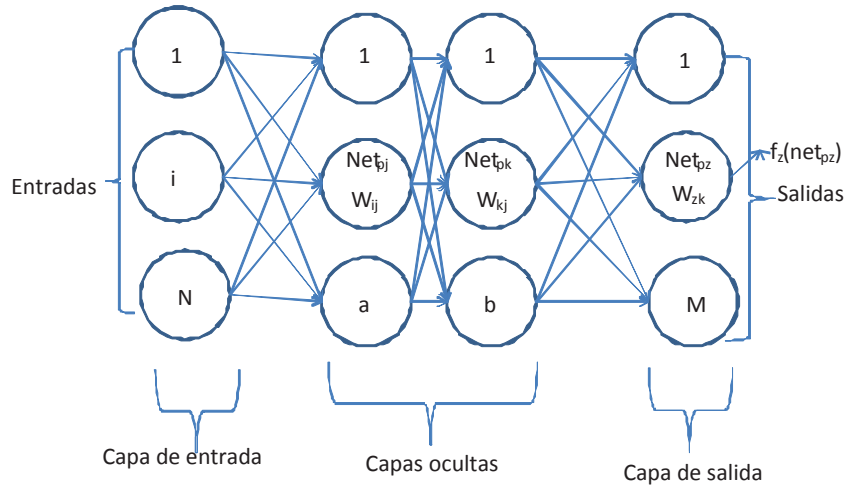
Donde β es una constante que determina el efecto en $t+1$ del cambio de los pesos en el instante t . Con esta constante lo que se consigue es la convergencia de la red con menos iteraciones, pues si en el momento t el incremento de un peso es positivo y en $t+1$ también lo es, entonces el error disminuye más rápidamente. En el caso en que en t el incremento es positivo y en $t+1$ es negativo, el paso de la información y las iteraciones necesarias serán menores ya que se ha pasado por un mínimo de error y para alcanzarlo serán necesarios menos pasos, pues ya ha sido localizado.

4.4.2. Estructura y Aprendizaje de la Red Backpropagation

La red backpropagation presenta una capa de entrada con n neuronas y una capa de salida con m neuronas. En cuanto al número de capas intermedias (ocultas), al menos debe existir una. En las capas intermedias, las neuronas de una capa reciben la información de las salidas de las neuronas de la capa anterior y éstas envían su salida a las neuronas de la siguiente capa. Por tanto, esta estructura de red no presenta conexiones hacia atrás (feedback) ni laterales entre neuronas de la misma capa.

Como se ha indicado, el algoritmo de aprendizaje backpropagation se aplica en dos fases, una hacia adelante y otra hacia atrás. En la primera, hacia adelante, se presenta un patrón de entrada con la información y se propaga por toda la red hasta alcanzar la salida de la misma. Una vez se obtienen estas salidas entra en juego la segunda fase, en la que se comparan las salidas obtenidas por la RNA con los valores de salida deseados o esperados y se obtiene el error. Posteriormente se ajustan los pesos de las neuronas de la última capa ajustados a dicho error y se pasa a la capa anterior (hacia atrás) ajustándose en cada paso los pesos de las neuronas de cada capa hasta llegar a la primera capa. Así tenemos toda la red con todos los pesos modificados y adaptados para el ejemplo o patrón presentado.

Figura 4-8: Estructura de la Red Backpropagation



Fuente: Elaboración propia

En la figura 4-8 puede verse la estructura de una red backpropagation. En este caso, presenta dos capas ocultas aunque sólo una es requerida como mínimo.

La aplicación del algoritmo backpropagation o regla delta generalizada requiere que las neuronas tengan una función de activación de tipo continuo y diferenciable, generalmente serán de tipo sigmoideal, aunque puede utilizarse del tipo lineal.

A continuación se detalla de forma resumida todo el proceso de aprendizaje y entrenamiento de la red dividido en seis fases. El proceso comienza asignando una serie de pesos a las neuronas y termina con la última fase, en la que la red se detiene. Lógicamente habrá una fase anterior

que se irá repitiendo de forma recurrente en la que se irán modificando los pesos mientras la red va aprendiendo.

Fase 1

Inicialmente, se dan valores a los pesos de las neuronas. Generalmente serán valores pequeños y obtenidos de forma aleatoria.

Fase 2

Se presenta a la red el vector o patrón de entrada $X_p : X_{p1}, X_{p2}, \dots, X_{pN}$, y se especifican los datos de salida deseados d_1, d_2, \dots, d_M (estamos ante una red con aprendizaje supervisado). En caso de que la red Backpropagation se utilice para obtener clasificaciones de los datos, las salidas deseadas serán cero excepto la de la clase a la que pertenezca el patrón de entrada.

Fase 3

Se procede a calcular la salida de la red (primera fase del algoritmo hacia adelante) presentándose todas las entradas y calculando cada salida de cada capa hasta llegar a la salida de la red y_1, y_2, \dots, y_M .

Para lograr este objetivo, primero se calculan las entradas netas para las neuronas de las capas ocultas.

$$net_{pj}^h = \sum_{i=1}^N w_{ij}^h x_{pi} + \theta_j^h \quad [4.13]$$

donde el índice h representa la magnitud de la capa oculta (hidden); el subíndice p representa al p -ésimo vector de entrenamiento; la j es la j -ésima neurona oculta. El resto de parámetros ya son conocidos.

A continuación se han de calcular las salidas de las neuronas ocultas en función de las entradas netas correspondientes.

$$y_{pj} = f_j^h(net_{pj}^h) \quad [4.14]$$

Por último se realizan los mismos cálculos (entrada y salida), pero para las neuronas que se encuentran en la capa de salida (capa o , output).

$$net_{pk}^o = \sum_{j=1}^L w_{kj}^o y_{pj} + \theta_k^o$$

$$y_{pk} = f_k^o(net_{pk}^o) \quad [4.15]$$

Fase 4

Una vez finalizado el proceso hacia adelante, comienza el proceso para atrás. Para ello se han de calcular los errores cometidos por todas las neuronas de la red. En el caso de ser una neurona de la capa de salida, el valor de la delta será:

$$\delta_{pk}^o = (d_{pk} - y_{pk}) f_k^o(\text{net}_{pk}^o) \quad [4.16]$$

Como ya se ha indicado en otras ocasiones la función f debe ser derivable, por lo que la función de activación no puede ser de tipo escalón. Por tanto, se pueden utilizar bien la función lineal que como vimos es $f_k(\text{net}_{jk}) = \text{net}_{jk}$ o bien la función de activación sigmoideal $f_k(\text{net}_{jk}) = \frac{1}{1+e^{-\text{net}_{jk}}}$.

La elección de una función u otra depende de los datos de salida de la red que se deseen. Si queremos que las neuronas de salida sean binarias se utilizará la función sigmoideal, ya que esta función es derivable y estable. En cualquier otro caso se pueden utilizar cualquiera de las dos indistintamente.

Si la neurona sobre la que se quiere calcular el error, neurona j , no es una neurona de salida, es decir, es una neurona de capa intermedia, entonces el valor de la delta que se obtiene será:

$$\delta_{pj}^h = f_j^h(\text{net}_{pj}^h) \sum_k \delta_{pk}^o w_{kj}^o \quad [4.17]$$

donde el error de las neuronas en las capas ocultas depende de todos los errores de las neuronas de la capa de salida (proceso de propagación hacia atrás).

Fase 5

Una vez determinados los errores de todas las neuronas, se procede al ajuste de los pesos de cada conexión de cada neurona, empezando desde la capa de salida hacia atrás. Los pesos se ajustarán para reducir la delta generalizada, es decir, la disminución del error.

En el caso de los pesos de las neuronas de la capa de salida se ajustarán así:

$$\begin{aligned}w_{kj}^o(t+1) &= w_{kj}^o(t) + \Delta w_{kj}^o(t+1) \\ \Delta w_{kj}^o(t+1) &= \alpha \delta_{pk}^o y_{pj}\end{aligned}\quad [4.18]$$

Para los pesos de las neuronas de las capas intermedias (ocultas) se ajustarán:

$$\begin{aligned}w_{ji}^h(t+1) &= w_{ji}^h(t) + \Delta w_{ji}^h(t+1) \\ \Delta w_{ji}^h(t+1) &= \alpha \delta_{pj}^h x_{pi}\end{aligned}\quad [4.19]$$

Para acelerar el proceso de aprendizaje se puede incorporar el término *momento*. Para las neuronas de salida el momento será igual a

$$\beta \left(w_{kj}^o(t) - w_{kj}^o(t-1) \right) \quad [4.20]$$

Para el caso de neuronas de capas intermedias u ocultas:

$$\beta (w_{ji}^h(t) - w_{ji}^h(t - 1)) \quad [4.21]$$

Fase 6

Todo este proceso se repite hasta que el término de error se reduce a la mínima expresión para cada patrón aprendido.

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \delta_{pk}^2 \quad [4.22]$$

Aplicando las fases anteriores, el algoritmo backpropagation busca el mínimo del error. Ahora bien, este mínimo puede ser local o global. Como el algoritmo presenta un gradiente descendente se asegura que con el cambio de los pesos se asegura la reducción del error hasta encontrar el mínimo más cercano, por lo que en algún caso el proceso podría detenerse en algún mínimo local y no global. Así pues, según el problema planteado no tiene por qué ser necesaria la reducción al mínimo del error global, podría bastar y ser satisfactoria la solución obtenida con un valor de error de mínimo local.

El control del gradiente decreciente viene determinado por el parámetro α que es la tasa de aprendizaje. En función del número escogido se incrementa o se reduce la velocidad del aprendizaje. A mayor importe, menor tiempo de aprendizaje, pero los saltos que se producen en los pesos son grandes y, por tanto, podría saltarse el mínimo y no poder alcanzarlo. En general suelen aplicarse unos valores entre 0.05 a 0.25.

Cuando la red llega a un mínimo, sea local o global, detiene el aprendizaje. Si se trata de un mínimo del error local y la solución que ofrece la red no es satisfactoria, pueden plantearse algunas soluciones para alcanzar el mínimo global o alcanzar un nuevo mínimo local menor que el anterior. Estas posibles soluciones pueden ser bien añadiendo más capas ocultas, introduciendo cambios en los parámetros de aprendizaje, o comenzar de nuevo el proceso de aprendizaje desde el principio pero con pesos iniciales diferentes. En algunos paquetes informáticos es posible forzar a la red para que continúe con el aprendizaje, a pesar de haber alcanzado un mínimo local.

**V. Estudio comparativo entre modelo
EGARCH y la Red Neuronal
Backpropagation: Aplicación sobre la
volatilidad condicional de índices
bursátiles internacionales**

5. Estudio comparativo entre el modelo EGARCH y la Red Neuronal Backpropagation: Aplicación sobre la volatilidad condicional de índices bursátiles internacionales

5.1. Introducción

En este apartado se presenta una comparativa entre uno de los modelos más utilizados en literatura financiera para la modelización de la volatilidad condicional, el modelo EGARCH, propuesto por Nelson (1990), y una de las redes neuronales más empleadas, la red neuronal Backpropagation, aplicado a índices bursátiles internacionales. La elección de este tipo de modelo econométrico viene por la capacidad que tienen los modelos de la familia GARCH de capturar la persistencia de la volatilidad con series leptocúrticas e incorporan un nivel de equilibrio de volatilidad a largo plazo. Después de un primer estudio con el modelo GARCH general se aplica el modelo EGARCH comparándolos para verificar que este último tipo de modelo capta las asimetrías existentes en las volatilidades de los índices bursátiles provocadas por el diferente comportamiento por parte de los inversores ante noticias buenas o malas (Campbell y Hentschel,1992). En Nelson (1990) puede verse un estudio en profundidad del modelo teórico EGARCH analizando las ventajas de dicho modelo frente al modelo general GARCH dada la dificultad de este último en evaluar si los shocks de volatilidad son o no

persistentes. Casas y Cepeda (2008) analizan la conveniencia de utilizar el modelo EGARCH frente al modelo ARCH y GARCH para la modelización de la volatilidad de la serie de rendimientos bursátiles sobre acciones.

El modelo econométrico finalmente estudiado es una combinación de un modelo ARIMA (ver Uriel et al. 1990, 2000) y un modelo de la familia GARCH, es decir un modelo de tipo ARMA-EGARCH. La justificación del uso combinado viene dado por la existencia de efectos en la rentabilidad provocados por la volatilidad condicional heterocedástica que hace necesaria la estimación conjunta de ambos modelos para determinar la rentabilidad así como la volatilidad de un activo, índice, etc...Puede encontrarse dicha justificación en gran parte de la literatura como Bollerslev et al.(1992, 1994, 1996), Diebold et al.(1995), Chen (1997), Jochum (1999), Karanasos (1999), Diebold (2004), Pellegrini et al.(2007), Deo et al. (2008). En Pérez (2006) puede verse un estudio de la modelización de la volatilidad y del precio del café para el periodo 2002-2006 aplicando el modelo ARMA-GARCH.

Para un estudio en profundidad de los mecanismos de estimación de los modelos ARMA-GARCH puede verse Francq y Zakoïan (2004) en el que se analiza la estimación máximaverosimilitud y quasi-máximaverosimilitud. Este trabajo está basado en autores como Ling y Li (1997;1998), Ling y McAleer (2003a), Ling y Li (2003) y Ling y McAleer (2003b).

Por otro lado, la selección de la red neuronal Backpropagation para este estudio, viene dada, tal y como se ha dicho en el capítulo anterior, por su capacidad de generalización, así como la utilización de la regla delta generalizada y la corrección por el error como método de aprendizaje. Se ha de recordar que tanto el ratio de aprendizaje como el momentum, elementos característicos del proceso de aprendizaje de este tipo de red, ayudan a obtener aprendizajes de la red satisfactorios con una computación muy rápida mediante una combinación adecuada de ambos parámetros.

White (1988) fue el primero en utilizar las redes neuronales aplicadas a activos bursátiles, concretamente a la predicción de los rendimientos y volatilidad de la acción IBM. A pesar de los múltiples estudios realizados, tanto sobre activos bursátiles como con índices, para modelización y predicción de la rentabilidad y volatilidad utilizando redes neuronales, no existen demasiados estudios que realicen una comparativa entre las redes neuronales y otros modelos econométricos (Ripley, 1993). No obstante, sobre todo a partir del año 2000, podemos encontrar algunos estudios que comparan la utilización de redes neuronales con los modelos clásicos de volatilidad y concretamente con el modelo ARMA-GARCH. En García (2002) se resume otras aplicaciones de las RNA en finanzas.

En Collantes (2001), por ejemplo, puede verse una comparativa entre la metodología Box-Jenkins para los modelos ARIMA con una red neuronal que utiliza un algoritmo de aprendizaje de tipo retropropagación.

Yim (2002) realiza un estudio sobre la volatilidad diaria del índice bursátil de Brasil (IBOVESPA). La red neuronal utilizada es la BackPropagation, que será la utilizada en el presente estudio. En este caso, llega a la conclusión de que la incorporación de la volatilidad estimada mediante el modelo ARMA-GARCH mejora los resultados comparados con el modelo econométrico.

Hang et al. (2010) estudian la volatilidad del índice Hang Seng con datos diarios comparando los modelos GARCH, EGARCH y GJR con una red neuronal. Para ello utilizan datos diarios, realizando dos predicciones. En la primera, la muestra para la estimación comprende el periodo del año 1999 al 2004, y para la predicción el año 2005. En la segunda, escogen la muestra de estimación desde inicios del año 1999 al año 2005 y para predicción el año 2006. Las conclusiones a las que llegan son la superioridad de la red neuronal frente a los modelos econométricos en la predicción.

Hossain et al. (2010) estudian la volatilidad diaria en el periodo 1986-2009 para los índices bursátiles NIKKEI 255 y el S&P 500 y los pares de divisas USD/GBP y USD/JPY. Realizan una comparativa entre el modelo econométrico

ARMA-GARCH y dos redes neuronales, una Backpropagation y otra Support-Vector Machine. En ambos casos las redes superaron de nuevo al modelo clásico para la predicción de la volatilidad condicional.

Gutierrez et al. (2011) utilizan una red neuronal Perceptrón multicapa con una función de activación adaptativa de las neuronas y comparan sus resultados con un modelo ARCH para la modelización de la volatilidad de la acción Intel, obteniendo mejores predicciones con la red.

En la mayoría de estos estudios la red seleccionada es la Backpropagation. También cabe destacar que con carácter general para las muestras han empleado datos diarios. Por este motivo, en este apartado se realizará la comparativa del modelo ARMA-EGARCH y la red neuronal con datos de baja frecuencia, es decir, no sólo con datos diarios, sino también semanales y mensuales.

Para dar mayor robustez y validez al estudio se han escogido cinco índices de diverso tamaño y estructura y de diferentes mercados bursátiles. Para ver el tamaño y la forma de cálculo de los índices pueden verse las webs recomendadas en paréntesis. Los dos primeros índices están situados en Europa: el DAX alemán (deutsche-boerse.com) e IBEX-35 (sbolsas.es). El siguiente índice está situado en Asia: el NIKKEI-225 (tse.or.jp). Por último se han seleccionado dos índices Americanos: el NASDAQ-100 (nasdaq.com) y el S&P-

500 (standardandpoor.com). Las estimaciones y predicciones se han calculado para los índices con datos de cierre diarios, semanales y mensuales para determinar si existe o no alguna incidencia o cambio significativo en la comparativa de la capacidad de predicción de los modelos y la frecuencia de los datos.

El periodo muestral escogido para todos los índices parte desde inicios del 2000 hasta finales del 2010. Se han creado cinco ventanas de estimación y predicción que se distribuyen en grupos de seis años para la estimación del modelo y un año para la predicción (ver tabla 5.1):

Tabla 5-1: Ventanas muestrales y de predicción

VENTANA	ESTIMACIÓN		PREDICCIÓN
	INICIO	FIN	AÑO
1	2000	2005	2006
2	2001	2006	2007
3	2002	2007	2008
4	2003	2008	2009
5	2004	2009	2010

Fuente: Elaboración propia

Como se puede observar se ha ido desplazando la ventana inicial un año hacia adelante cada vez. Con ello se pretende verificar que los resultados obtenidos son consistentes en el tiempo. Algunos estudios confirman la conveniencia de realizar las estimaciones y predicciones mediante ventanas desplazadas. Por ejemplo, Bonilla (2002)

utiliza para predecir cada observación las últimas 100 observaciones.

Para poder comparar entre el modelo econométrico y la red neuronal se analizan los errores cometidos en las ventanas de predicción con cada modelo. Se han utilizado cuatro tipos de error de predicción: Error Absoluto Medio (MAE), Error Absoluto Medio Porcentual (MAPE), Error Medio Porcentual (MPE) y Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE) que se describen como:

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\hat{y}_i - y_i| \quad [5.1]$$

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i} \right| \quad [5.2]$$

$$MPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i} \quad [5.3]$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2} \quad [5.4]$$

Siendo y_i el valor observado (rentabilidad del índice), \hat{y}_i el valor de predicción y n el número de predicciones realizadas. Se ha considerado que la red neuronal supera al modelo econométrico si los errores cometidos en la predicción son menores para los cuatro tipos de errores descritos.

5.2. Modelización de la volatilidad condicional mediante el modelo ARMA-EGARCH

En los anteriores apartados se ha realizado una revisión de la familia de los modelos GARCH más utilizados

para el estudio y modelización de la volatilidad condicional. También se ha indicado la conveniencia de estimar un modelo de la familia ARMA-GARCH. También sabemos que la utilización de los modelos EGARCH suelen ser más convenientes para modelizar la volatilidad condicional dado que estos pueden recoger los shocks asimétricos que se producen ante la aparición de diversas noticias en los mercados financieros. Por tanto, en primer lugar se va a estudiar un modelo ARMA-GARCH estudiando a continuación un modelo ARMA-EGARCH, que suele ser más adecuado para la volatilidad condicional de índices bursátiles.

En primer lugar para estudiar la volatilidad condicional se partirá de los cierres diarios, semanales o mensuales según se trate para cada índice y se calcularán sus respectivas rentabilidades continuas como:

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad [5.5]$$

donde :

R_t : es la rentabilidad diaria, semanal o mensual del índice

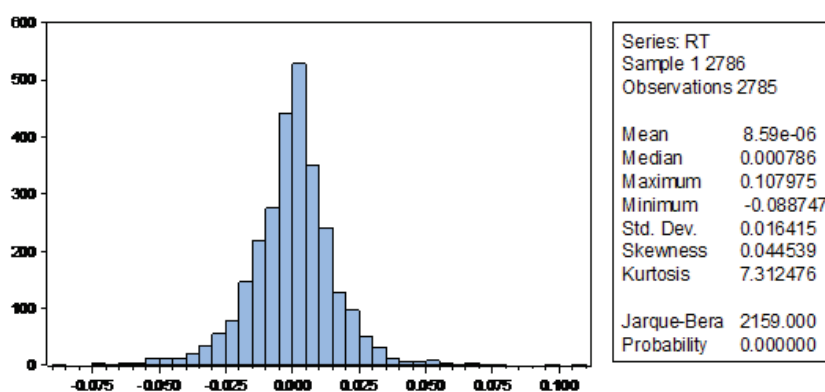
P_t : es el precio de cierre del índice en el momento t

P_{t-1} : es el precio de cierre del índice en el momento anterior a t

Las series de rendimientos, como la mayoría de series de rendimientos bursátiles, suelen ser series leptocúrticas (con kurtosis elevada), asimétricas y rechazan la hipótesis de normalidad. Como ejemplo puede verse el histograma de la rentabilidad diaria para el índice DAX en la

figura 5-1.

Figura 5-1: Histograma de la rentabilidad diaria del DAX



Fuente: Elaboración propia

En la tabla 5-2 se presenta un cuadro resumen con los principales estadísticos descriptivos de cada uno de los índices estudiados.

Se confirma que todas las series de rentabilidades de los índices de la muestra con leptocúrticas, dado que todos los coeficientes de curtosis son superiores a tres. Además, sólo los índices IBEX mensual y S&P mensual tiene un valor de curtosis relativamente cercano a tres (valor de una distribución normal). Este exceso de curtosis es habitual en la mayoría de series financieras siendo Mandebroitt (1963) el primer autor en describir esta cuestión. También se confirma la asimetría de las mismas, generalmente con asimetrías negativas. En todos los casos de la muestra se confirma que la dispersión dista mucho del valor uno (valor de una distribución normal tipificada).

Tabla 5-2: Estadísticos descriptivos de la serie de rendimientos para todos los índices considerados

	Media	Desv.Standard	Asimetría	Curtosis	Jarque-Bera
DAX (d)	8.59E-06	0.016415	0.044539	7.312476	2159.00
DAX (s)	3.40E-05	0.034955	-0.653036	8.452560	750.54
DAX (m)	8.73E-05	0.068553	-0.857430	5.448292	48.76
IBEX (d)	-5.89E-05	0.015352	0.143194	8.927647	4075.13
IBEX (s)	-0.000207	0.032029	-1.061021	9.853233	1228.84
IBEX (m)	-0.000721	0.061390	-0.476185	3.740322	7.9423
NASDAQ(d)	-0.000194	0.021403	0.223182	7.825354	2707.42
NASDAQ(s)	-0.000811	0.042903	-0.657666	8.337506	721.48
NASDAQ(m)	-0.003634	0.085543	-0.719675	4.293340	20.43
NIKKEI (d)	-0.000228	0.015981	-0.460928	7.971647	2893.34
NIKKEI (s)	-0.000985	0.030935	-1.343586	13.73203	3187.43
NIKKEI (m)	0.000647	0.060373	-0.590975	4.384202	49.00
S&P (d)	-5.27E-05	0.013787	-0.115326	10.50574	6501.22
S&P (s)	-0.000238	0.027544	-0.859068	9.779531	1167.82
S&P (m)	-0.000788	0.048028	-0.706700	3.983007	16.17

Fuente: Elaboración propia

(d)= rentabilidad diaria, (s)= rentabilidad semanal, (m)= rentabilidad mensual

El siguiente paso a seguir debe ser el estudio de la estacionariedad de las series de rendimientos para poder aplicar la metodología Box-Jenkins (Pérez, 2008), y así, obtener el proceso ARMA generador. Para determinar la estacionariedad de cada una de las series se han utilizado los test de raíces unitarias Dickey-Fuller Aumentado (DFA) y Phillips-Perron, estimados sin constante ni tendencia, con constante, y con constante y tendencia. Para el cálculo de los retardos para estos test se ha utilizado el criterio de Schwartz y se han calculado para los niveles de significatividad del 1%, 5%

y 10%. La no existencia de raíces unitarias confirmará la estacionariedad de las series. La elección del test DFA viene dada por su capacidad de determinar otros esquemas de autocorrelación, mientras que en su versión simple sólo puede captar esquemas AR(1). Por tanto, en la ecuación de DFA se añaden términos diferenciados de la variable dependiente.

$$\Delta y_t = \mu + \gamma y_{t-1} + \delta_1 \Delta y_{t-1} + \delta_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \delta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad [5.6]$$

Esta especificación se basa en la hipótesis nula $H_0: \gamma = 0$ (implica la existencia de una raíz unitaria y, por tanto, la serie debe diferenciarse) y la hipótesis alternativa $H_1: \gamma < 0$.

Otra ventaja de la utilización de este test reside en que sigue siendo válido aunque la serie presente componentes de medias móviles (MA) tal y como demostrarán Said y Dickey (1984).

En la tablas 5-3, 5-4 y 5-5 se presenta los resultados del test DFA estimado sin constante y sin tendencia, con constante y sin tendencia y, por último, con constante y con tendencia, respectivamente.

El test Phillips-Perron se basa en un contraste no paramétrico para controlar la correlación serial. El test parte de una regresión de un proceso AR(1):

$$\Delta y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad [5.7]$$

Tabla 5-3: Test de raíces unitarias Dickey-Fuller Aumentado (DFA) sin constante y tendencia

	DFA	1%	5%	10%
DAX (d)	-54.83329	-2.565793	-1.940938	-1.616623
DAX (s)	-15.35667	-2.569025	-1.941380	-1.616326
DAX (m)	-10.61778	-2.582872	-1.943304	-1.615087
IBEX (d)	-54.00059	-2.565795	-1.940938	-1.616623
IBEX (s)	-26.01848	-2.569011	-1.941378	-1.616327
IBEX (m)	-10.85189	-2.582872	-1.943304	-1.615087
NASDAQ(d)	-42.07542	-2.565799	-1.940938	-1.616622
NASDAQ(s)	-24.99284	-2.569011	-1.941378	-1.616327
NASDAQ(m)	-10.17702	-2.582872	-1.943304	-1.615087
NIKKEI (d)	-53.04399	-2.565814	-1.940940	-1.616621
NIKKEI (s)	-25.98012	-2.568673	-1.941331	-1.616358
NIKKEI (m)	-17.94483	-2.571511	-1.941721	-1.616099
S&P (d)	-42.15828	-2.565799	-1.940938	-1.616622
S&P (s)	-25.48078	-2.569011	-1.941378	-1.616327
S&P (m)	-9.584476	-2.582872	-1.943304	-1.615087

Fuente: Elaboración propia

Todos los valores del estadístico DFA son inferiores al valor tabulado para los tres niveles de significación (1%, 3% y 5%); por tanto, las series son estacionarias.

A continuación el test raíces unitarias de Phillips-Perron, realiza un ajuste en el estadístico t sobre el coeficiente de la regresión del AR(1). Este ajuste, de tipo no paramétrico, utiliza la corrección Newey-West (Newey et al.1987). La distribución de este test es idéntica a la de DFA y, por tanto, pueden contrastarse con los valores críticos de las tablas de Mackinnon (1986). En las tablas 5-6, 5-7 y 5-8 pueden verse los resultados de este test. Al igual que se ha realizado para el test DFA, se ha estimado sin constante y sin tendencia, con

constante y sin tendencia y, por último, con constante y con tendencia, respectivamente.

Tabla 5-4: Test de raíces unitarias Dickey-Fuller Aumentado (DFA) con constante y sin tendencia

	DFA	1%	5%	10%
DAX (d)	-54.82350	-3.432507	-2.862379	-2.567261
DAX (s)	-15.34312	-3.441593	-2.866392	-2.569413
DAX (m)	-10.57750	-3.481217	-2.883753	-2.578694
IBEX (d)	-53.99136	-3.432514	-2.862382	-2.567263
IBEX (s)	-25.99695	-3.441553	-2.866374	-2.569404
IBEX (m)	-10.81925	-3.481217	-2.883753	-2.578694
NASDAQ(d)	-42.07233	-3.432523	-2.862386	-2.567265
NASDAQ(s)	-24.98222	-3.441553	-2.866374	-2.569404
NASDAQ(m)	-10.17019	-3.481217	-2.883753	-2.578694
NIKKEI (d)	-53.04437	-3.432567	-2.862405	-2.567275
NIKKEI (s)	-25.98340	-3.440600	-2.865954	-2.569179
NIKKEI (m)	-17.92227	-3.448622	-2.869488	-2.571072
S&P (d)	-42.15129	-3.432523	-2.862386	-2.567265
S&P (s)	-25.46098	-3.441553	-2.866374	-2.569404
S&P (m)	-9.546968	-3.481217	-2.883753	2.578694

Fuente: Elaboración propia

Todos los valores del estadístico DFA son inferiores al valor tabulado para los tres niveles de significación, por tanto, las series son estacionarias.

Puede concluirse, por tanto, que todas las series de rentabilidades, tanto diarias, semanales como mensuales, y para todos los índices de la muestra, son estacionarias dado que los valores estadísticos rechazaban la hipótesis nula de existencia de raíces unitarias, tanto para el test DFA como para el PP, así como en los casos de estimación sin constante ni tendencia, con constante y con constante y tendencia, con lo

que se ha evaluado y analizado todo el espectro de posibilidades.

Tabla 5-5: Test de raíces unitarias Dickey-Fuller Aumentado (DFA) con constante y tendencia

	DFA	1%	5%	10%
DAX (d)	-54.83564	-3.961339	-3.411421	-3.127563
DAX (s)	-15.41534	-3.974237	-3.417723	-3.131297
DAX (m)	-10.71010	-4.030157	-3.444756	-3.147221
IBEX (d)	-53.98341	-3.961348	-3.411426	-3.127566
IBEX (s)	-25.97938	-3.974180	-3.417695	-3.131280
IBEX (m)	-10.80259	-4.030157	-3.444756	-3.147221
NASDAQ(d)	-42.13129	-3.961362	-3.411432	-3.127570
NASDAQ(s)	-25.11207	-3.974180	-3.417695	-3.131280
NASDAQ(m)	-10.49922	-4.030157	-3.444756	-3.147221
NIKKEI (d)	-53.04046	-3.961423	-3.411462	-3.127588
NIKKEI (s)	-25.97517	-3.972829	-3.417036	-3.130890
NIKKEI (m)	-18.03841	-3.984195	-3.422569	-3.134162
S&P (d)	-42.15429	-3.961362	-3.411432	-3.127570
S&P (s)	-25.46877	-3.974180	-3.417695	-3.131280
S&P (m)	-9.547782	-4.030157	-3.444756	-3.147221

Fuente: Elaboración propia

Todos los valores del estadístico DFA son inferiores al valor tabulado para los tres niveles de significación, por tanto, las series son estacionarias.

Una vez determinada la estacionariedad de las series se ha procedido a estudiar la autocorrelación de los residuos. Para ello se ha realizado para cada serie de rentabilidades una regresión con diferentes retardos, desde uno hasta cinco. Dado que se está ante modelos AR no es posible la utilización de la d de Durbin-Watson, ya que en uno de sus supuestos, indica que el modelo de regresión no debe

ser autoregresivo, como es el caso. Por tanto, se utilizará el contraste h de Durbin, en el que sí se permite la existencia de retardos de la variable dependiente (la rentabilidad del índice).

Tabla 5-6: Test de raíces unitarias Phillips-Perron (PP) sin constante y tendencia

	PP	1%	5%	10%
DAX (d)	-54.83466	-2.565793	-1.940938	-1.616623
DAX (s)	-24.79544	-2.569011	-1.941378	-1.616327
DAX (m)	-10.65619	-2.582872	-1.943304	-1.615087
IBEX (d)	-54.08248	-2.565795	-1.940938	-1.616623
IBEX (s)	26.01179	-2.569011	-1.941378	-1.616327
IBEX (m)	-10.86343	-2.582872	-1.943304	-1.615087
NASDAQ(d)	-56.48787	-2.565798	-1.940938	-1.616623
NASDAQ(s)	-24.97021	-2.569011	-1.941378	-1.616327
NASDAQ(m)	-10.17702	-2.582872	-1.943304	-1.615087
NIKKEI (d)	-53.15362	-2.565814	-1.940940	-1.616621
NIKKEI (s)	-25.95919	-2.568673	-1.941331	-1.616358
NIKKEI (m)	-17.98795	-2.571511	-1.941721	-1.616099
S&P (d)	-57.85313	-2.565798	-1.940938	-1.616623
S&P (s)	-25.47716	-2.569011	-1.941378	-1.616327
S&P (m)	-9.672494	-2.582872	-1.943304	-1.615087

Fuente: Elaboración propia

Todos los valores del estadístico PP son inferiores al valor tabulado para los tres niveles de significación, por tanto, las series son estacionarias.

La hipótesis nula es la misma que para el contraste d de Durbin-Watson, es decir, la no existencia de autocorrelación en los residuos de orden uno. La hipótesis alternativa presenta dos posibilidades, bien que existe autocorrelación positiva o negativa.

$H_0: \rho(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}) = 0$ No existe autocorrelación

$H_1: \rho(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}) > 0$ autocorrelación positiva

$H_1: \rho(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}) < 0$ autocorrelación negativa

Tabla 5-7: Test de raíces unitarias Phillips-Perron (PP) con constante y sin tendencia

	PP	1%	5%	10%
DAX (d)	-54.82486	-3.432507	-2.862379	-2.567261
DAX (s)	-24.77344	-3.441553	-2.866374	-2.569404
DAX (m)	-10.61734	-3.481217	-2.883753	-2.578694
IBEX (d)	-54.07293	-3.432514	-2.862382	-2.567263
IBEX (s)	-25.99032	-3.441553	-2.866374	-2.569404
IBEX (m)	-10.83130	-3.481217	-2.883753	-2.578694
NASDAQ(d)	-56.48698	-3.432523	-2.862386	-2.567265
NASDAQ(s)	-24.96037	-3.441553	-2.866374	-2.569404
NASDAQ(m)	-10.17019	-3.481217	-2.883753	-2.578694
NIKKEI (d)	-53.15608	-3.432567	-2.862405	-2.567275
NIKKEI (s)	-25.96212	-3.440600	-2.865954	-2.569179
NIKKEI (m)	-17.96564	-3.448622	-2.869488	-2.571072
S&P (d)	-57.84330	-3.432523	-2.862386	-2.567265
S&P (s)	-25.45740	-3.441553	-2.866374	-2.569404
S&P (m)	-9.635814	-3.481217	-2.883753	-2.578694

Fuente: Elaboración propia

Todos los valores del estadístico PP son inferiores al valor tabulado para los tres niveles de significación, por tanto, las series son estacionarias.

El estadístico del contraste h se calcula como

$$h = \rho \sqrt{\frac{n}{1-n\text{Var}(\beta_1)}} \text{ y se distribuye como una } N(0,1), \text{ y para un}$$

nivel de significación del 5%, no se rechaza la hipótesis nula si el valor de h permanece dentro del intervalo $(-1.645;1.645)$.

Para calcular este estadístico es necesario conocer el número

de observaciones (n) de la muestra, la varianza muestral del coeficiente de la variable dependiente retardada de la regresión mediante mínimos cuadrados ordinarios (MCO) y, por último, el valor de ρ . Este parámetro puede calcularse bien realizando una regresión MCO de los residuos obtenidos en la regresión anterior con un retardo, bien de forma muy aproximada a partir del contraste d de Durbin-Watson $\rho \approx 1 - \frac{d}{2}$. Como ejemplo puede verse la figura 5-2 para el estudio de la autocorrelación de los residuos de primer orden para el índice NASDAQ 100 con datos semanales.

Para calcular el estadístico se estimará en primer lugar el valor de ρ , mediante la aproximación descrita anteriormente que será igual a:

$$\rho \approx 1 - \frac{d}{2} = 1 - \frac{2.001800}{2} = -0.0009$$

A continuación puede calcularse el estadístico según la formulación descrita:

$$\begin{aligned} h &= \rho \sqrt{\frac{n}{1 - n\text{Var}(\beta_1)}} = -0.0009 \sqrt{\frac{572}{1 - 572 * (0.041797)^2}} \\ &= -0.02153265 \end{aligned}$$

Este resultado se encuentra dentro del intervalo de aceptación de la hipótesis nula (-1.645;1.645) para nivel de significación del 5%, y por tanto, puede concluirse que no existe autocorrelación de los residuos de orden uno. Para todos los índices de la muestra y tipo de datos se llegó a la misma

conclusión de la no existencia de autocorrelación de los residuos de orden uno dado que todos los estadísticos de este contraste se encontraban dentro de la región de aceptación indicada.

Tabla 5-8: Test de raíces unitarias Phillips-Perron (PP) con constante y con tendencia

	PP	1%	5%	10%
DAX (d)	-54.83564	-3.961339	-3.411421	-3.127563
DAX (s)	-24.83964	-3.974180	-3.417695	-3.131280
DAX (m)	-10.71	-4.030157	-3.444756	-3.147221
IBEX (d)	-54.06473	-3.961348	-3.411426	-3.127566
IBEX (s)	-25.97938	-3.974180	-3.417695	-3.131280
IBEX (m)	-10.81230	-4.030157	-3.444756	-3.147221
NASDAQ(d)	-56.64189	-3.961360	-3.411432	-3.127570
NASDAQ(s)	-25.09855	-3.974180	-3.417695	-3.131280
NASDAQ(m)	-10.48309	-4.030157	-3.444756	-3.147221
NIKKEI (d)	-53.16200	-3.961423	-3.411462	-3.127588
NIKKEI (s)	-25.95425	-3.972829	-3.417036	-3.130890
NIKKEI (m)	-18.06751	-3.984195	-3.422569	-3.134162
S&P (d)	-57.85370	-3.961360	-3.411432	-3.127570
S&P (s)	-25.46877	-3.974180	-3.417695	-3.131280
S&P (m)	-9.626694	-4.030157	-3.444756	-3.147221

Fuente: Elaboración propia

Todos los valores del estadístico PP son inferiores al valor tabulado para los tres niveles de significación, por tanto, las series son estacionarias.

Ahora bien, el estadístico h de Durbin sólo es capaz de determinar la autocorrelación de los residuos de orden uno. Para estudiar un orden superior en los residuos se ha utilizado el contraste de Breusch-Godfrey (1978). Una de las ventajas principales de este contraste reside en que es capaz de analizar la autocorrelación de los residuos incluso ante

procesos AR de orden superior a uno e incluso procesos de medias móviles (MA) en los mismos. Además permite que el modelo de regresión por MCO para obtener los residuos pueda incluir en los coeficientes retardos de la variable dependiente. La hipótesis nula sigue siendo la misma que para la h de Durbin, es decir, la no existencia de autocorrelación. En este caso, vendrá determinado, por la nulidad de los coeficientes de la regresión de los residuos con sus retardos. Para un modelo autorregresivo de los residuos de orden p , $u_t = \varphi_1 u_{t-1} + \varphi_2 u_{t-2} \dots + \varphi_p u_{t-p} + \varepsilon_t$ la hipótesis nula se presenta como:

$$H_0: \varphi_1 = \varphi_2 = \dots \varphi_p = 0 \quad [5.8]$$

Figura 5-2: Test h de Durbin para un retardo en el índice NASDAQ 100 semanal

Dependent Variable: RT
Method: Least Squares
Date: 07/16/11 Time: 19:49
Sample (adjusted): 3 574
Included observations: 572 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000932	0.001794	-0.519888	0.6033
RT(-1)	-0.044171	0.041797	-1.056816	0.2910
R-squared	0.001956	Mean dependent var		-0.000897
Adjusted R-squared	0.000205	S.D. dependent var		0.042891
S.E. of regression	0.042887	Akaike info criterion		-3.457002
Sum squared resid	1.048402	Schwarz criterion		-3.441795
Log likelihood	990.7026	Hannan-Quinn criter.		-3.451070
F-statistic	1.116860	Durbin-Watson stat		2.001800
Prob(F-statistic)	0.291043			

Fuente: Elaboración propia

Este contraste se distribuye como una χ_p^2 , donde

p es el número de retardos de la regresión de los residuos. El valor del contraste se calcula como $\chi^2_{estimado} = n * R^2$, donde n es el número de observaciones y R^2 el coeficiente de determinación de la regresión de los residuos. Si el valor estimado es superior al valor teórico se rechazará la hipótesis nula y existirá autocorrelación de los residuos; en caso contrario, se aceptará la hipótesis nula y, por tanto, no existirá autocorrelación. Como ejemplo puede verse la figura 5-3. En este caso se trata del estudio de la autocorrelación de los residuos de orden dos para el índice DAX diario. Se ha obtenido un valor crítico en tablas para esta distribución al 95% con dos grados de libertad de 5.99 y el valor observado ha sido de 2.009334, inferior al valor crítico, por tanto se acepta la hipótesis nula y se concluye que no existe autocorrelación en los residuos de orden dos. A esta misma conclusión se puede llegar observando el p-valor de la chi-cuadrado que es superior, en este caso, a 0.05 y por tanto se acepta la hipótesis nula. Se estudió la autocorrelación de los residuos hasta cinco retardos para todos los índices y tipo de dato de la muestra llegando a la misma conclusión.

Ya se tiene confirmación de que las series son estacionarias y no presentan autocorrelación en los residuos y, por tanto, puede analizarse el proceso generador ARMA de la serie de rentabilidades. Para ello se han estimado diversos modelos ARMA con diferentes retardos tanto en la parte autoregresiva como en la parte de medias móviles. Se ha seleccionado en cada caso el mejor modelo atendiendo al

criterio Schwartz dado que el criterio AIC tiende a dimensionar por exceso los órdenes de retardo de autocorrelación. Los modelos planteados han sido ARMA(1,0), ARMA(1,1), ARMA(2,2), ARMA(1,2), ARMA(0,1) y ARMA(0,2). Los modelos se han estimado para cada índice y tipo de datos de la muestra (diario, semanal y mensual), como muestra la Tabla 5-9.

Figura 5-3: Test Breusch-Godfrey para dos retardos en el índice DAX diario

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	1.003948	Prob. F(2,2780)	0.3666
Obs*R-squared	2.009334	Prob. ChiSquare(2)	0.3662

Test Equation:

Dependent Variable: RESID

Method: Least Squares

Date: 07/18/11 Time: 13:30

Sample: 3 2786

Included observations: 2784

Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-4.38E-06	0.000311	-0.014103	0.9887
RT(-1)	0.509638	0.665966	0.765262	0.4442
RESID(-1)	-0.510919	0.666203	-0.766913	0.4432
RESID(-2)	-0.003045	0.031796	-0.095755	0.9237
R-squared	0.000722	Mean dependent var	1.22E-18	
Adjusted R-squared	-0.000357	S.D. dependent var	0.016399	
S.E. of regression	0.016402	Akaike info criterion	-5.381407	
Sum squared resid	0.747880	Schwarz criterion	-5.372884	
Log likelihood	7494.918	Hannan-Quinn criter.	-5.378329	
F-statistic	0.669299	Durbin-Watson stat	2.001191	
Prob(F-statistic)	0.570845			

Fuente: Elaboración propia

Tabla 5-9: Modelos ARMA seleccionados siguiendo el criterio Schwartz

INDICE	DIARIO	SEMANTAL	MENSUAL
DAX	ARMA(2,2)	ARMA(1,1)	ARMA(2,2)
IBEX-35	ARMA(2,2)	ARMA(1,1)	ARMA(1,1)
NASDAQ-100	AR(2)	ARMA(2,2)	ARMA(2,2)
NIKKEI-225	ARMA(1,1)	ARMA(1,1)	ARMA(1,1)
S&P-500	AR(2)	ARMA(1,1)	ARMA(1,1)

Fuente: Elaboración propia

La no existencia de autocorrelación en los residuos sólo indica que no existe una relación lineal entre los residuos y sus retardos; sin embargo, puede existir otro tipo de relaciones no lineales (exponencial, cuadrática,..) (de Arce, 1998). En caso de existencia de estos tipos de relación, se podría establecer la modelización de la volatilidad condicional mediante modelos de la familia GARCH. Para evaluar la existencia de la heterocedasticidad de los residuos, es decir, si existen o no procesos autorregresivos condicionalmente heterocedásticos (ARCH) se hace necesario un test específico, el test ARCH. Este test está basado en la comparativa entre el modelo restringido, es decir, sin incluir como variables explicativas los errores al cuadrado retardados, con el modelo incluyendo dichas variables. El cociente de los errores cuadráticos medios de ambos modelos se distribuye como una F-Snedecor con $n-q$ grados de libertad, en el que q representa el número de retardos incluidos. Este contraste se realiza mediante una función de Lagrange. Esta es una versión simplificada. En la versión general, se estima el modelo de los

residuos al cuadrado con q retardados $u_t^2 = \varphi_1 u_{t-1}^2 + \varphi_2 u_{t-2}^2 \dots + \varphi_p u_{t-q}^2 + \varepsilon_t$ siendo la hipótesis nula la existencia de efectos autorregresivos condicionalmente heterocedásticos en los residuos. Para más detalle puede verse Engle, 1982.

$$H_0: \varphi_1 = \varphi_2 = \dots \varphi_q = 0 \quad [5.9]$$

$$H_1: \text{Al menos algún } \varphi_i \neq 0$$

El estadístico del contraste siguiendo una función de lagrange se puede expresar como $T * R^2 \sim \chi_q^2$ donde q es el número de parámetros de la regresión, es decir, el orden de retardos de los mismos, T es el número de observaciones y R^2 el coeficiente de determinación de dicha regresión. Se rechazará la H_0 si el valor del estadístico observado supera el valor crítico para un nivel α de significación.

$$T * R^2 > \chi_q^2(\alpha) \text{ se rechaza la hipótesis nula}$$

En la figura 5-4 puede verse un ejemplo de este test aplicado al S&P 500 con datos semanales. Como se observa ha sido calculado para cinco retardos para dar una mayor amplitud al estadístico y verificar si existen o no componentes autorregresivos más alejados en el tiempo. El valor crítico para un nivel de significación del $\alpha=5\%$ y cinco grados de libertad, dado que el modelo se ha calculado para cinco retardos, es de 11.07. El valor observado del estadístico

ha sido de 51.82, por tanto, se rechaza la hipótesis nula y se puede afirmar que al 95% de significación estadística existen componentes ARCH en los residuos. Este test fue calculado con el mismo nivel de significatividad para todos los índices y tipo de datos. En todos los casos se obtuvo un valor observado superior al valor crítico y, por tanto, se rechazaba la hipótesis nula. Así pues, se hace necesaria la modelización de la volatilidad condicional mediante modelos de la familia GARCH dada la existencia de heterocedasticidad.

En primer lugar se ha planteado un modelo GARCH por ser más genérico para luego realizar una comparación con el modelo EGARCH y determinar cómo este último modelo es capaz de captar la existencia de asimetrías en la volatilidad condicional, siendo por tanto, más adecuado para su modelización. Pueden encontrarse ejemplos de esta comparativa en, Sendra y Bernardo (2004) quienes aplican el modelo GARCH y modelos asimétricos al índice general de la Bolsa de Madrid llegando a la conclusión de que estos últimos obtienen mejores resultados para periodos superiores a uno. Otros autores como Ferreira et al. (2008) verifican que la existencia de asimetrías para los índices S&P 500, FTSE 100, DAX 30, CAC 40 e IBEX 35 son capturadas por los modelos asimétricos EGARCH y TARARCH. Para determinar los retardos de cada modelo GARCH para cada índice se han estimado los siguientes modelos: GARCH(1,1), GARCH(2,2), GARCH(0,1), GARCH(0,2), GARCH(1,0), GARCH(2,0). Se ha utilizado el criterio Schwartz para la elección del mejor retardo.

Figura 5-4: Test ARCH para cinco retardos aplicados al índice S&P500 semanal

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	11.28773	Prob. F(5,561)	0.0000
Obs*R-squared	51.82817	Prob. Chi-Square(5)	0.0000

Test Equation:

Dependent Variable: RESID^2

Method: Least Squares

Date: 07/18/11 Time: 10:48

Sample (adjusted): 8 574

Included observations: 567 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000411	0.000105	3.899928	0.0001
RESID^2(-1)	0.229491	0.042041	5.458736	0.0000
RESID^2(-2)	0.018058	0.043126	0.418726	0.6756
RESID^2(-3)	0.131117	0.042774	3.065360	0.0023
RESID^2(-4)	-0.025630	0.043098	-0.594687	0.5523
RESID^2(-5)	0.092021	0.042012	2.190353	0.0289
R-squared	0.091408	Mean dependent var		0.000744
Adjusted R-squared	0.083310	S.D. dependent var		0.002283
S.E. of regression	0.002186	Akaike info criterion		-9.403198
Sum squared resid	0.002680	Schwarz criterion		-9.357269
Log likelihood	2671.807	Hannan-Quinn criter.		-9.385274
F-statistic	11.28773	Durbin-Watson stat		2.008682
Prob(F-statistic)	0.000000			

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 5-10 pueden verse los retardos seleccionados para cada índice. Como puede observarse el modelo GARCH seleccionado para cada índice y para las tres frecuencias de datos coinciden, siendo además generalmente un GARCH(1,1). Como excepción tenemos, por un lado, el índice NASDAQ-100 para datos diarios que difiere de las otras dos frecuencias. Si bien indicar que el GARCH(2,2) para este índice y datos diarios presentaba un menor valor del criterio de

selección pero empeoraba ligeramente la significatividad de uno de los coeficientes y por este motivo se eligió el GARCH(1,1), aunque las diferencias entre uno y otro eran mínimas y podría haberse escogido el otro modelo sin desvirtuar significativamente los resultados. Por otro lado, el índice IBEX-35 presenta disparidad en los retardos del modelo GARCH para los tres tipos de frecuencia. Esto podría indicar ineficiencias en dicho mercado que podrían ser independientes de la estructura del índice ya que tanto para índices más amplios como el S&P-500 como para índices igual de estrechos como el DAX sí que ha habido similitud en los resultados obtenidos en cada índice para sus tres frecuencias de datos.

Tabla 5-10: Modelos GARCH seleccionados siguiendo el criterio Schwartz

INDICE	DIARIO	SEMANAL	MENSUAL
DAX	ARMA(2,2)- GARCH(1,1)	ARMA(1,1)- GARCH(1,1)	ARMA(2,2)- GARCH(1,1)
IBEX-35	ARMA(2,2)- GARCH(2,1)	ARMA(1,1)- GARCH(1,1)	ARMA(1,1)- GARCH(0,1)
NASDAQ-100	AR(2)-GARCH(1,1)	ARMA(2,2)- GARCH(2,2)	ARMA(2,2)- GARCH(2,2)
NIKKEI-225	ARMA(1,1)- GARCH(1,1)	ARMA(1,1)- GARCH(1,1)	ARMA(1,1)- GARCH(1,1)
S&P-500	AR(2)-GARCH(1,1)	ARMA(1,1)- GARCH(1,1)	ARMA(1,1)- GARCH(1,1)

Fuente: Elaboración propia

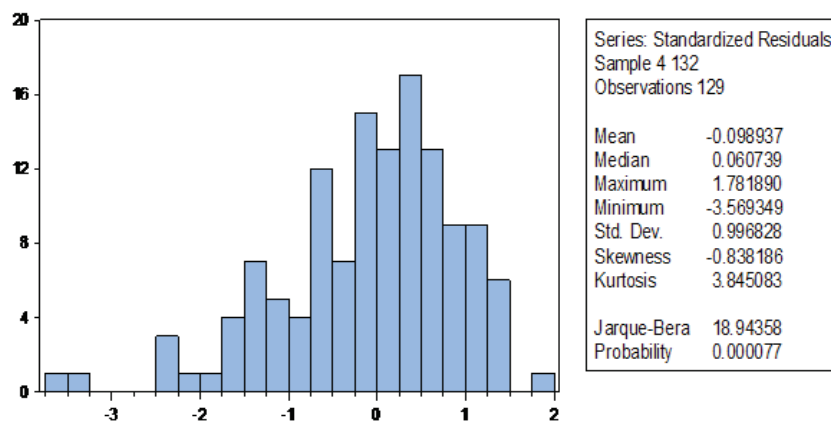
Una vez seleccionado el modelo GARCH estimado con los retardos indicados anteriormente para cada índice y para cada frecuencia de datos se ha estudiado el

histograma de los residuos de cada modelo junto con sus estadísticos principales. Con ello puede determinarse la asimetría existente en los mismos para realizar una comparativa posterior con el modelo EGARCH y verificar que este modelo mejora la modelización de la volatilidad condicional ya que es capaz de captar de forma específica dicha asimetría.

En la figura 5-5 puede verse un ejemplo de histograma de los residuos calculados para el modelo correspondiente al índice DAX diario. Al margen de otras cuestiones como la curtosis, los valores de la media y desviación típica, se observa cierta asimetría negativa. Para todos los índices y frecuencias se han obtenido similares resultados teniendo todas las series una persistencia y asimetría negativa.

Tal y como se ha comentado anteriormente, la presencia de componentes autorregresivos en todas las series de rendimientos verificada mediante el test ARCH, hace necesaria la utilización de los modelos de la familia GARCH para la modelización de la volatilidad condicional. Para comprobar que efectivamente este hecho se ha cumplido en los modelos GARCH estimados, se ha procedido al cálculo del test ARCH para cada uno de ellos.

Figura 5-5: Histograma de los residuos del modelo ARMA(2,2)-GARCH(1,1) en el índice DAX mensual



Fuente: Elaboración propia

En todos los casos y para todas las frecuencias se ha confirmado que la modelización GARCH ha captado dichos componentes autorregresivos dado que el test ARCH aceptaba la hipótesis nula de homocedasticidad dado que el valor observado en cada test era inferior al valor crítico. Por ejemplo, en la figura 5-6 puede verse que el valor observado del test ARCH para el índice NIKKEI-225 mensual tiene un valor de 2.0629, claramente inferior al valor crítico del 11.07 para un nivel de significación del $\alpha=5\%$ y cinco grados de libertad, dado que el estadístico se ha calculado para cinco retardos.

A continuación se ha procedido a la estimación del modelo EGARCH para los siguientes retardos: EGARCH(1,1), EGARCH(2,2), EGARCH(0,1), EGARCH(0,2), EGARCH(1,0), EGARCH(2,0). Se ha utilizado, de nuevo, el criterio Schwartz para la elección del mejor retardo. En la tabla

5-11 pueden verse los resultados. En este caso, existe concordancia en los retardos seleccionados para cada tipo de frecuencia. Así para datos diarios el modelo seleccionado es el

Figura 5-6: Test ARCH del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) en el índice NIKKEI-225 mensual

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	0.407913	Prob. F(5,343)	0.8432
Obs*R-squared	2.062977	Prob. Chi-Square(5)	0.8404

Test Equation:

Dependent Variable: WGT_RESID^2

Method: Least Squares

Date: 07/14/11 Time: 13:06

Sample (adjusted): 8 356

Included observations: 349 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.979698	0.148720	6.587542	0.0000
WGT_RESID^2(-1)	0.039641	0.053975	0.734442	0.4632
WGT_RESID^2(-2)	0.023647	0.053944	0.438366	0.6614
WGT_RESID^2(-3)	-0.008479	0.053953	-0.157156	0.8752
WGT_RESID^2(-4)	-0.055934	0.053965	-1.036493	0.3007
WGT_RESID^2(-5)	0.028128	0.054024	0.520666	0.6029
R-squared	0.005911	Mean dependent var		1.006670
Adjusted R-squared	-0.008580	S.D. dependent var		1.687463
S.E. of regression	1.694687	Akaike info criterion		3.909916
Sum squared resid	985.0836	Schwarz criterion		3.976192
Log likelihood	-676.2803	Hannan-Quinn criter.		3.936299
F-statistic	0.407913	Durbin-Watson stat		2.000148
Prob(F-statistic)	0.843248			

Fuente: Elaboración propia

modelo EGARCH(1,1), para datos semanales el mismo y para datos mensuales el EGARCH(0,1). Para determinar si esta modelización es más adecuada que el modelo GARCH se ha calculado el histograma de los residuos de cada uno de los

modelos para observar si existe una mejora en la asimetría detectada anteriormente. En la figura 5-7 puede verse el histograma de los residuos para el DAX mensual con el modelo EGARCH. Comparando con el histograma obtenido para el modelo GARCH (figura 5-5), puede observarse una reducción de la asimetría de los mismos, así como una mejora tanto en la media como en la desviación típica, así como en el estadístico de la normalidad de los residuos mediante el test Jarque –Bera.

En todos los casos el modelo EGARCH mejoró los resultados de la asimetría, sólo para el caso del S&P 500 diario y semanal los resultados eran muy similares. Se puede concluir, en general, que el modelo EGARCH es preferible al modelo GARCH para los índices bursátiles y para las frecuencias estudiadas.

Una vez demostrado que la modelización EGARCH es preferible al modelo GARCH, se ha procedido a la estimación de cada modelo para cada índice y frecuencia y calculado su predicción para cada una de las cinco ventanas temporales descritas al inicio de este capítulo. Es decir, seis años de periodo de estimación y uno para predicción. De esta forma se han utilizado de media para el periodo de estimación unas 1500 observaciones para cada ventana temporal y para datos diarios, para datos semanales una media de unas 325 observaciones para cada ventana y para datos mensuales unas 72. Para cada una de las ventanas se han realizado, de media, predicciones de 250 observaciones para datos diarios,

50 observaciones para datos semanales y 12 para datos mensuales.

Tabla 5-11: Modelos EGARCH seleccionados siguiendo el criterio Schwartz

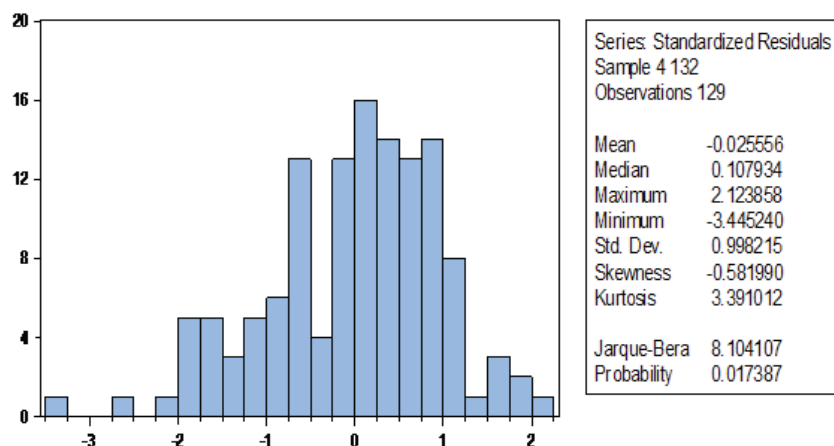
INDICE	DIARIO	SEMANAL	MENSUAL
DAX	ARMA(2,2)- EGARCH(1,1)	ARMA(1,1)- EGARCH(1,1)	ARMA(2,2)- EGARCH(0,1)
IBEX-35	ARMA(2,2)- EGARCH(1,1)	ARMA(1,1)- EGARCH(1,1)	ARMA(1,1)- EGARCH(0,1)
NASDAQ-100	AR(2)- EGARCH(1,1)	ARMA(2,2)- EGARCH(1,1)	ARMA(2,2)- EGARCH(0,1)
NIKKEI-225	ARMA(1,1)- EGARCH(1,1)	ARMA(1,1)- EGARCH(1,1)	ARMA(1,1)- EGARCH(0,1)
S&P-500	AR(2)- EGARCH(1,1)	ARMA(1,1)- EGARCH(1,1)	ARMA(1,1)- EGARCH(0,1)

Fuente: Elaboración propia

En las tablas 5-12, 5-13 y 5-14 se resumen los errores de predicción para cada ventana de estimación y predicción para datos diarios, semanales y mensuales.

En primer lugar se observa un incremento del error de predicción en los modelos econométricos a medida que la frecuencia de datos disminuye, es decir, cuando se pasa de datos diarios a semanales y mensuales coincidiendo con menores datos de observación y de predicción. Esto hace pensar que la eficiencia de los modelos econométricos aplicados disminuye en función de la reducción del número de observaciones.

Figura 5-7: Histograma de los residuos del modelo ARMA(2,2)-GARCH(0,1) en el índice DAX mensual



Fuente: Elaboración propia

En segundo lugar, se ha estudiado si existe alguna relación entre la volatilidad existente en cada ventana y los errores de predicción obtenidos para determinar si hay variaciones significativas en periodos con mayor o menor volatilidad. Para ello, se ha calculado la volatilidad media para cada ventana, índice y frecuencia de datos para determinar en cada uno de ellos si aumenta o disminuye la volatilidad del periodo y comparar los incrementos y/o reducciones de los errores de predicción. No se halló ninguna relación en estos términos, por lo que puede decirse que los errores de predicción son independientes de la mayor o menor volatilidad existente en cada una de las ventanas correspondientes.

Tabla 5-12: Errores de predicción del modelo EGARCH con datos diarios

		MAPE	MAE	MPE	RMSE
DAX (d)	V1	0.06034403	4.8329E -06	0.05534469	0.00219839
	V2	0.04241025	3.5133E -06	0.02980572	0.00187437
	V3	0.0715325	2.1584E -05	-0.06712036	0.00464588
	V4	0.14649749	4.1419E -05	0.14649749	0.00643578
	V5	0.14920134	1.4917E -05	-0.14885857	0.00386227
IBEX (d)	V1	0.03894123	2.6329E -06	0.03628902	0.00162262
	V2	0.02209431	2.3173E -06	0.00570088	0.00152228
	V3	0.37727709	0.00011746	-0.37085945	0.01083 797
	V4	0.10323466	2.1147E -05	0.09235539	0.0045986
	V5	0.04667249	1.5722E -05	0.00288317	0.00396505
NASDAQ(d)	V1	0.02651981	2.4118E -06	0.01621719	0.00155299
	V2	0.098077	1.1912E -05	0.098077	0.00345132
	V3	0.09924255	7.5033E -05	0.07295268	0.0086 6218
	V4	0.02323218	6.1841E -06	-0.01121488	0.00248678
	V5	0.07701402	1.2474E -05	0.00341472	0.00353184
NIKKEI (d)	V1	0.02664632	4.48549E -06	-0.01207718	0.0021179
	V2	0.04108223	5.88421E -06	0.02462141	0.00242574
	V3	0.09631118	8.95968E -05	0.0959 8131	0.00946556
	V4	0.04452386	1.2228E -05	0.02598949	0.00349689
	V5	0.01029381	2.1221E -06	-0.00064018	0.00145675
S&P (d)	V1	0.02801476	9.5491E -07	0.0249319	0.00097719
	V2	0.10680931	7.931E -06	0.1004852	0.0028162
	V3	0.10013846	6.804E -05	0.0988 8992	0.00824866
	V4	0.09321512	3.0229E -05	0.09091297	0.0054981
	V5	0.03284213	4.4669E -06	0.01329442	0.00211351

Fuente: Elaboración propia

Tabla 5-13: Errores de predicción del modelo EGARCH con datos semanales

		MAPE	MAE	MPE	RMSE
DAX (s)	V1	0.08596007	4.7687E05	0.06500729	0.00690556
	V2	0.134235	8.5218E05	0.01249051	0.00923133
	V3	0.22090162	0.00106322	0.08332014	0.03260702
	V4	0.19398548	0.00029368	0.12472565	0.01713695
	V5	0.14670307	0.00011793	-0.06462134	0.01085965
IBEX (s)	V1	0.68247959	0.00019115	0.68247959	0.01382571
	V2	0.15393978	7.9933E05	0.11518744	0.00894053
	V3	0.7092082	0.00141094	0.7092082	0.03756245
	V4	0.64056506	0.00082952	-0.64056506	0.02880144
	V5	0.04280543	7.384E-05	0.0393537	0.008593
NASDAQ(s)	V1	0.5669452	0.00026077	0.5669452	0.01614846
	V2	0.63322077	0.00028195	0.63322077	0.01679146
	V3	0.3178274	0.00074822	0.3178274	0.0273537
	V4	1.11461943	0.00086859	-1.11461943	0.02947184
	V5	0.08322932	6.8004E05	0.00790457	0.00824645
NIKKEI (s)	V1	0.09594171	6.8678E05	0.0489432	0.00828721
	V2	0.12784999	8.2924E05	0.08387344	0.00910626
	V3	0.20622556	0.00098596	0.08949635	0.03140001
	V4	0.09068575	0.00010227	0.07421144	0.01011268
	V5	0.02240243	2.0851E05	-0.01851809	0.00456634
S&P (s)	V1	0.22052852	6.497E-05	0.22052852	0.00806039
	V2	0.74834005	0.00022311	0.74834005	0.014937
	V3	0.20908008	0.0004515	0.1489978	0.02124849
	V4	0.40333869	0.00057661	0.37816805	0.02401268
	V5	0.12486025	7.9582E05	-0.00757284	0.00892089

Fuente: Elaboración propia

Tabla 5-14: Errores de predicción del modelo EGARCH con datos mensuales

		MAPE	MAE	MPE	RMSE
DAX (m)	V1	0.42738851	0.00078698	-0.05331228	0.02805321
	V2	9.22450102	0.01811883	-8.69378362	0.13460622
	V3	0.47139223	0.00539646	0.47139223	0.07346062
	V4	2.38202039	0.00980222	-1.58412287	0.09900614
	V5	0.19593274	0.00040128	-0.0946826	0.02003192
IBEX (m)	V1	0.07961567	0.00021754	-0.07961567	0.01474907
	V2	0.14854635	0.00015904	0.14854635	0.01261101
	V3	0.08069003	0.00070836	-0.07345705	0.02661503
	V4	0.85504422	0.00366281	0.75620056	0.06052115
	V5	0.44768155	0.00284119	0.44768155	0.05330281
NASDAQ(m)	V1	0.11641616	0.00018599	-0.09860948	0.01363798
	V2	0.30765289	0.0003341	0.27387929	0.01827881
	V3	0.68645581	0.0022579	-0.05236675	0.04751733
	V4	0.43294419	0.00174095	0.24896766	0.0417247
	V5	0.26081398	0.00097505	0.26081398	0.03122582
NIKKEI (m)	V1	1.17146471	0.00250033	-1.17146471	0.05000327
	V2	0.30469954	0.00054621	0.30469954	0.0233712
	V3	0.57951148	0.0047694	0.57951148	0.06906086
	V4	0.61618272	0.00228608	-0.61618272	0.04781295
	V5	0.1257499	0.0007293	0.07897342	0.02700555
S&P (m)	V1	0.40789706	0.00012655	-0.40789706	0.01124957
	V2	0.60691155	0.00031837	0.60691155	0.01784291
	V3	0.2999635	0.00109318	0.2999635	0.03306335
	V4	0.70907302	0.00267111	0.40105153	0.05168275
	V5	0.46771704	0.00118151	0.46771704	0.03437314

Fuente: Elaboración propia

5.3. Modelización de la volatilidad condicional mediante Red Neuronal Backpropagation

En este apartado se procede a la predicción de la volatilidad condicional para cada índice, las cinco ventanas y frecuencias de datos descritas en el apartado anterior, mediante una red neuronal tipo Backpropagation (ya descrita en apartados anteriores) por su capacidad de adaptación de los pesos de las neuronas ante los errores que se cometen durante el aprendizaje y que da la posibilidad de dar soluciones muy favorables ante situaciones no aprendidas anteriormente. El aprendizaje de la red está basado, por tanto, en un aprendizaje por corrección del error y es del tipo supervisado, por lo que para su entrenamiento se han de indicar los inputs de entrada que se tienen y las salidas que se desean obtener para dichos inputs.

Para la simulación y entrenamiento de la red neuronal se ha utilizado el programa NeuroGenetic Optimizer de la empresa BioComp Systems Inc, que es una aplicación de 32 bits para Windows que realiza simulación de diversos tipos de redes neuronales.

Generalmente a la red se le indica de todas las observaciones cuáles serán utilizadas para el aprendizaje y cuáles para testear las diferentes redes que van generándose. En este caso, y dado que esta aplicación tiene flexibilidad, se le ha indicado que todas las observaciones las utilice tanto para el aprendizaje como para su testeo. Para ello el programa realiza

una copia de los datos. Este tipo de mecanismo hace que el aprendizaje sea algo más lento, pero de mayor calidad y por tanto, cometiendo menos errores, dado que cuando genera una estructura de red la testea pasando todos los datos de observación por la misma.

En cuanto a las capas ocultas (capas intermedias), este programa permite la existencia de dos (para la existencia de la red Backpropagation es necesario como mínimo una capa oculta). Se ha permitido que se establezcan múltiples conexiones entre las diferentes neuronas y se ha escogido el número máximo de éstas que permite el programa, que son 256 neuronas para cada capa.

En cuanto al ratio de aprendizaje para las dos capas ocultas se ha ido variando de forma indistinta en diferentes entrenamientos e índices. Así, por ejemplo se han utilizado ratios de aprendizaje que varían entre 0.1 a 0.4, en otros casos 0.1 a 0.7 y por último 0.1 a 0.3. Para las capas de salida se han utilizado ratios de 0.1 a 1, 0.1 a 0.5 y 0.1 a 0.3. Para el parámetro del momentum se han establecido ratios entre 0.1 a 0.3 y 0.1 a 0.5. Al establecerse en forma de rango, el programa va optimizando la red variando los mismos.

Las ponderaciones iniciales de los pesos de las conexiones de las neuronas se han establecido en +/- 0.3 ó +/- 1.0 indistintamente en diversos entrenamientos sobre los que el programa realiza diversas pruebas y va optimizando y variando

con el aprendizaje.

Como se ha indicado el número máximo de neuronas a utilizar en cada capa es el máximo permitido por el programa 256 neuronas por capa. En cuanto a los parámetros que se establecen en la población de las neuronas, se establece un máximo de 100 generaciones. Esta población se genera sin restricciones, es decir, el programa localiza aquellos neuronas que son activadas en la primera red que crea para generar el primer patrón y a partir de ese momento comienza el proceso de aprendizaje. Además el patrón de mutación de las neuronas se ha establecido de forma aleatoria con una ratio de un 0.25.

Se ha establecido la posibilidad de que las neuronas puedan utilizar funciones de transferencia de forma indistinta. Así, se han utilizado funciones lineales, logísticas sigmoidal e hiperbólica-tangente sigmoidal.

Los inputs que se han establecido para el aprendizaje de la red dependen de las variables elegidas para cada uno de los modelos econométricos para cada índice para poder permitir una comparación más exacta entre el modelo econométrico seleccionado y la red neuronal. Es decir, se incorporan como inputs la varianza condicional con uno y dos retardos según el modelo econométrico escogido para cada índice. Para la incorporación de la parte ARMA del modelo econométrico como input de la red neuronal, se escoge la

rentabilidad del índice con un retardo o dos según se trate de un modelo AR(1) o AR(2). Indicar que la red neuronal, dada su capacidad de encontrar relaciones más complejas entre las variables, será capaz de descubrir las relaciones existentes en la parte de medias móviles (MA) encontradas en los modelos econométricos por lo que no se incorporan de forma explícita como inputs. Para que la red neuronal pueda crear patrones de comportamiento de las variables y realizar el aprendizaje durante su entrenamiento es necesario incorporar como output la varianza condicional observada.

Una vez la red tiene todos los datos para crear los patrones comienza el proceso de aprendizaje con las ponderaciones iniciales de los pesos. Se crea una primera red y se calculan los errores cometidos comparando el resultado con el patrón de salida. A través del proceso ya estudiado del mecanismo del error de la delta generalizada, la red va modificando los pesos de las neuronas generando una nueva red y de nuevo comienza el proceso. El criterio para detener el entrenamiento es localizar una red cuyos resultados mejoran los errores de predicción para los cuatro tipos de error descrito. Dado que, generalmente, el proceso de entrenamiento converge rápidamente, en caso de que en las primeras redes obtenidas no cumpla este requisito, se ha permitido seguir el entrenamiento durante un tiempo de computación mayor para observar si en ese caso, la red ha encontrado un mínimo de error local y por la configuración impuesta tanto en el ratio de aprendizaje como en el momentum no ha sido capaz de

salvarlo encontrando otro mínimo de error mejor o incluso el mínimo global.

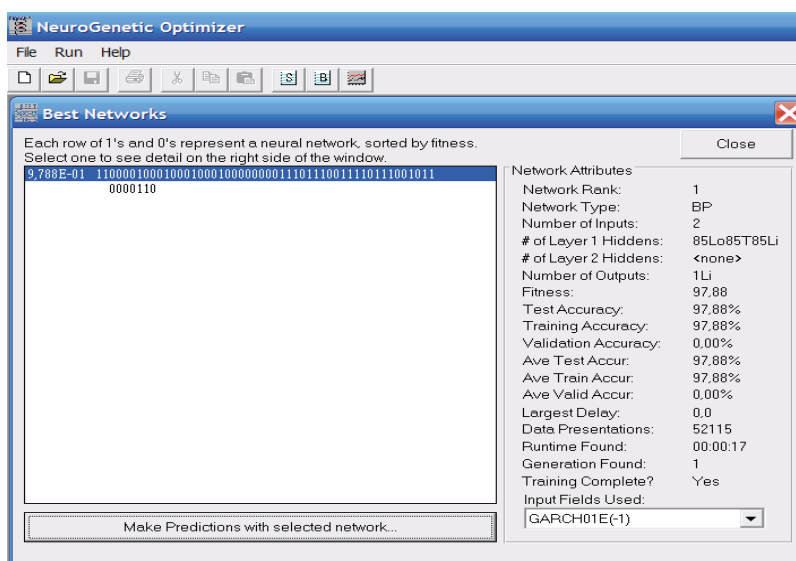
Dado que la red neuronal es capaz de encontrar relaciones más complejas entre los inputs y outputs que las del modelo econométrico, se espera una mejora en los resultados y, por tanto, una reducción en los errores cometidos en la predicción de la volatilidad condicional para cada índice. Al igual que en el caso econométrico, se ha entrenado la red para cada una de las cinco ventanas. Puede verse en la figura 5-8 un ejemplo del tiempo de computación para el S&P 500 semanal para la ventana uno de estimación. El tiempo de computación en este caso ha sido de diecisiete segundos para la obtención de una red que mejora los errores de predicción respecto al modelo econométrico correspondiente. Indicar que, en general, para todos los índices semanales y ventanas de estimación se han requerido tiempos de computación similares. Como excepción podemos encontrar, por ejemplo, el IBEX-35 semanal para la ventana cinco (muestra años 2004-2009, predicción 2010) que ha requerido una hora y diez minutos de computación para encontrar una red que mejora los cuatro tipos de errores de predicción.

Para datos mensuales los tiempos de computación generales han sido también de segundos. Como excepción pueden encontrarse en algún caso tiempos de computación de cinco o seis minutos. Por último, para datos diarios los tiempos habituales de computación van desde un

minuto hasta veinte minutos aproximadamente. Puede observarse cierta tendencia de un aumento de tiempo de computación conforme aumenta la frecuencia de datos.

En cuanto a las características de las redes que se han obtenido puede destacarse, en primer lugar, que los inputs seleccionados finalmente en cada una de las redes y ventanas coinciden en general con los incorporados inicialmente.

Figura 5-8: Tiempo de computación de la red neuronal en el índice S&P 500 semanal en la ventana uno: 17 segundos

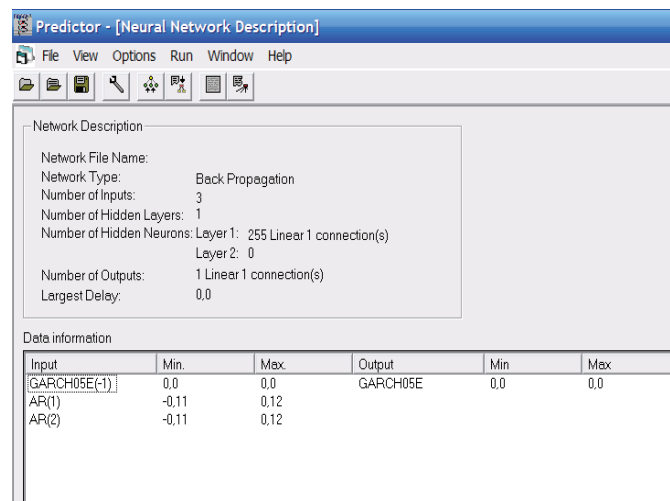


Fuente: Elaboración propia

Es decir, si el modelo econométrico es un AR(2) se han incorporado inicialmente en el entrenamiento de la red dos retardos en de la rentabilidad del índice para la creación de

los patrones. La red neuronal artificial ha incorporado los mismos inputs en la red final seleccionada. Por ejemplo, en la figura 5-9 se puede observar que los inputs utilizados en la red finalmente seleccionada para el índice NASDAQ 100 diario para la ventana de predicción cinco (muestra años 2004-2009, predicción 2010) coincide con las variables del modelo econométrico.

Figura 5-9: Inputs seleccionados para la red neuronal en el índice NASDAQ 100 diario para la ventana cinco



Fuente: Elaboración propia

También puede destacarse que las funciones de transferencia en las neuronas de la capa de salida de la red han sido mayoritariamente de tipo lineal. En cuanto a las funciones de transferencia de las neuronas de las capas intermedias indicar que con un equilibrio de funciones de transferencia puede obtenerse una red que mejora los resultados de predicción. Por tanto, las 255 neuronas se

reparten de igual forma entre las tres funciones de transferencia implementadas en el software, es decir, 85 neuronas con función de transferencia de tipo lineal, 85 logarítmica y 85 tangencial. De hecho, esta es la estructura con la que se inicia la fase de entrenamiento y en la mayoría de casos con esta distribución ha sido suficiente para obtener una red que supera a los resultados del modelo econométrico.

En las tablas 5-15, 5-16 y 5-17 se resumen los errores de predicción para cada ventana de estimación y predicción para datos diarios, semanales y mensuales mediante la red neuronal Backpropagation. Al igual que con el modelo econométrico también se observa cierto incremento del error de predicción a medida que la frecuencia de datos disminuye, es decir, cuando se pasa de datos diarios a semanales y mensuales coincidiendo con menores datos de observación y de predicción. Ahora bien, este incremento sucede en menor medida para el caso de la red neuronal teniendo incluso para muchas ventanas de predicción mejores resultados en frecuencias de datos inferiores. Por tanto, parece evidente que las redes neuronales mejoran su capacidad de generalización mejorando las predicciones y haciendo que éstas no se vean influidas por la frecuencia de datos.

Tampoco se ha detectado relación entre la volatilidad existente en cada ventana y los errores de predicción obtenidos para determinar si hay variaciones significativas en periodos con mayor o menor volatilidad. Para

ello, igual que para el modelo econométrico, se ha calculado la volatilidad media para cada ventana, índice y frecuencia de datos para determinar para cada uno de ellos si aumenta o disminuye la volatilidad del periodo y compararla con los incrementos y/o reducciones de los errores de predicción. Por tanto, puede decirse que los errores de predicción son independientes de la mayor o menor volatilidad existente en la ventana temporal correspondiente.

Tabla 5-15: Errores de predicción de la Red Neuronal con datos diarios

		MAPE	MAE	MPE	RMSE
DAX (d)	V1	0.05276384	3.5678E-06	-0.02200645	0.00188886
	V2	0.03709813	3.1921E-06	-0.01135457	0.00178664
	V3	0.03063524	1.6851E-05	-0.00071188	0.00410501
	V4	0.0219346	6.6893E-06	0.0096265	0.00258636
	V5	0.04409063	6.4322E-06	0.00446736	0.00253618
IBEX (d)	V1	0.02796937	1.8968E-06	-0.00748221	0.00137726
	V2	0.01857397	1.8638E-06	-0.00230644	0.0013652
	V3	0.03404154	1.9136E-05	0.01231183	0.00437445
	V4	0.02865107	6.1566E-06	0.01818517	0.00248124
	V5	0.01830667	5.539E-06	0.00511365	0.0023535
NASDAQ(d)	V1	0.02139183	1.8776E-06	-0.0110704	0.00137024
	V2	0.04074057	4.1746E-06	-0.00465493	0.00204319
	V3	0.03269958	2.5477E-05	1.96E-05	0.00504746
	V4	0.02156072	5.576E-06	-0.00443664	0.00236135
	V5	0.01711998	2.3681E-06	-0.00808855	0.00153888
NIKKEI (d)	V1	0.02386095	4.1338E-06	-0.00371194	0.00203318
	V2	0.02756956	3.7455E-06	-0.01272848	0.00193534
	V3	0.03069255	4.9138E-05	0.01217824	0.00700985
	V4	0.02710572	7.7549E-06	0.00676936	0.00278477
	V5	0.01700505	3.0879E-06	-0.00562706	0.00175723
S&P (d)	V1	0.11709184	4.7035E-06	-0.00902656	0.00216876
	V2	0.01709326	1.447E-06	0.00077397	0.00120292
	V3	0.03118105	2.5162E-05	0.00904152	0.00501621
	V4	0.02292984	6.2862E-06	0.00142902	0.00250723
	V5	0.0298233	3.9434E-06	0.0016127	0.00198581

Fuente: Elaboración propia

Tabla 5-16: Errores de predicción de la Red Neuronal con datos semanales

		MAPE	MAE	MPE	RMSE
DAX (s)	V1	0.04158507	1.9069E-05	-0.00943234	0.00436686
	V2	0.05960751	3.405E-05	-0.01630137	0.00583521
	V3	0.14829592	0.00095868	0.06685038	0.0309625
	V4	0.13015145	0.00016953	0.09205579	0.01302038
	V5	0.09704982	6.0629E-05	-0.03249153	0.00778648
IBEX (s)	V1	0.17679826	4.322E-05	0.176745	0.00657422
	V2	0.08834133	4.7768E-05	0.06245769	0.00691141
	V3	0.21429115	0.00064346	0.16815883	0.02536643
	V4	0.17912673	0.00046038	0.13152316	0.02145657
	V5	0.04032626	6.3514E-05	0.02290299	0.00796956
NASDAQ(s)	V1	0.08211236	3.8179E-05	0.00647512	0.00617895
	V2	0.07715606	3.614E-05	0.01802911	0.00601169
	V3	0.07864503	0.00026773	0.06552711	0.01636232
	V4	0.06309003	5.8691E-05	0.01442396	0.00766098
	V5	0.02156526	1.6751E-05	-0.00399908	0.0040928
NIKKEI (s)	V1	0.08663206	6.0533E-05	0.03725803	0.00778027
	V2	0.02356532	1.994E-05	0.00524987	0.00446539
	V3	0.06486482	0.00082465	0.00555754	0.02871676
	V4	0.05795799	6.8193E-05	0.00897216	0.0082579
	V5	0.04047377	3.4581E-05	0.00833148	0.00588054
S&P (s)	V1	0.06704592	2.0499E-05	0.04711102	0.00452759
	V2	0.14649095	5.4215E-05	0.03138987	0.00736309
	V3	0.19421853	0.00040821	0.06910326	0.0202043
	V4	0.10752433	0.00018244	0.04122435	0.01350711
	V5	0.04595036	2.3336E-05	0.00746058	0.00483076

Fuente: Elaboración propia

Tabla 5-17: Errores de predicción de la Red Neuronal con datos mensuales

		MAPE	MAE	MPE	RMSE
DAX (m)	V1	0.61673449	0.00045292	-0.24007518	0.021282
	V2	0.11687245	0.00014603	-0.04547505	0.01208438
	V3	0.1981202	0.00264397	0.13601727	0.05141954
	V4	0.06941375	0.00033967	0.03236726	0.01843015
	V5	0.17966211	0.00035856	-0.00229693	0.0189357
IBEX (m)	V1	0.02794815	7.2622E-05	0.00963387	0.00852185
	V2	0.09118989	0.00010718	-0.06191784	0.01035282
	V3	0.06956947	0.00058751	0.06956947	0.02423859
	V4	0.0683903	0.0003456	-0.00148599	0.01859033
	V5	0.07620406	0.00049216	0.07620406	0.02218464
NASDAQ(m)	V1	0.10254235	0.00015169	0.07462093	0.01231605
	V2	0.30335025	0.00032962	0.23683655	0.01815545
	V3	0.37563485	0.00123773	-0.04316255	0.03518133
	V4	0.14313648	0.0004198	0.11991226	0.02048908
	V5	0.15215404	0.00056872	0.15215404	0.02384793
NIKKEI (m)	V1	0.12862978	0.00027321	0.12862978	0.01652917
	V2	0.09813353	0.00017938	0.09797616	0.01339325
	V3	0.55047545	0.00471102	0.43740508	0.06863687
	V4	0.26297769	0.00124855	0.24678976	0.03533477
	V5	0.07559495	0.00042804	0.01697032	0.02068917
S&P (m)	V1	0.06686905	2.1302E-05	0.03153179	0.00461541
	V2	0.13070524	7.5228E-05	0.05204261	0.00867339
	V3	0.06121656	0.00021678	0.01031243	0.01472334
	V4	0.27033535	0.00133711	0.12557016	0.03656648
	V5	0.16590047	0.0004966	0.15014922	0.02228448

Fuente: Elaboración propia

5.4. Conclusiones

En este apartado se va a proceder a exponer las principales conclusiones que pueden extraerse de la comparativa entre el modelo econométrico EGARCH y la red neuronal Backpropagation aplicado a los índices bursátiles descritos y para las cinco ventanas temporales de predicción.

En este punto debe recordarse que en el entrenamiento de la red neuronal no se buscaba encontrar la mejor red neuronal posible para la predicción de la volatilidad condicional, sino simplemente demostrar que con una estructura simple de red neuronal como la Backpropagation es relativamente sencillo mejorar la capacidad predictiva en comparación con el modelo econométrico. Durante la fase de entrenamiento, se ha seleccionado en cada caso la primera red que mejorara resultados para los cuatro tipos de error descritos, sin tener en cuenta la cuantificación de la reducción del error cometido dado que el entrenamiento se interrumpía de inmediato. De las setenta y cinco ventanas que se han predicho (cinco ventanas por cada índice y para las tres frecuencias de datos) sólo en seis ha habido uno o más de un tipo de error que no ha mejorado respecto del modelo econométrico, es decir, sólo un 8% de las redes seleccionadas no ha superado al modelo econométrico. En la figura 5-18 pueden verse estas seis ventanas con el detalle de qué tipo de error ha fallado. Sólo en una de ellas, la ventana cinco para el

NIKKEI 225 diario, la red neuronal no ha podido mejorar los resultados para ninguno de los cuatro tipos de error.

Tabla 5-18: Fallos de la Red Neuronal versus modelo EGARCH

		MAPE	MAE	MPE	RMSE
DAX (m)	V1	0	1	0	1
IBEX (d)	V5	1	1	0	1
NASDAQ(d)	V5	1	1	0	1
NIKKEI (d)	V5	0	0	0	0
NIKKEI (s)	V5	0	0	1	0
S&P (d)	V1	0	0	1	0

Fuente: Elaboración propia

1: la red neuronal mejora resultados; 0: el modelo econométrico mejora resultados

Se observa que en las ventanas en las que la red neuronal no ha superado al modelo econométrico se centran en la ventana uno y fundamentalmente en la cinco. Esto no quiere decir que la red neuronal funcione peor en dichas ventanas dado que para la ventana uno ha fallado en dos ventanas sobre quince (cinco índices por tres frecuencias de datos) y para la ventana cinco ha fallado cuatro sobre quince. Tampoco que el motivo tenga que ver con variaciones de mayor o menor volatilidad en dichas ventanas respecto al resto de índices y frecuencias y otras ventanas dado que en todas se han producido dichas variaciones y la red neuronal ha superado al modelo econométrico en la mayoría.

Tal y como se ha indicado, las redes neuronales elegidas para cada ventana de predicción no son la mejor posible dado que el entrenamiento se interrumpía cuando ésta ya superaba al modelo econométrico o bien cuando pasado un tiempo establecido de 2 horas no mejoraba. Esto implica, que en muchas de ellas con un tiempo algo superior de entrenamiento (algunas redes se entrenaron en pocos segundos o minutos) y/o diferentes combinaciones en las funciones de transferencia de las neuronas (se recuerda que muchas de ellas tenían un equilibrio de 85 neuronas para los tres tipo de función de transferencia), podrían mejorarse aún más los resultados y se podría llegar a que las redes neuronales superaran en un 100% al modelo econométrico. La mejora de la red neuronal artificial respecto al modelo econométrico, no se debe a ningún sobreentrenamiento de la red, ya que en ésta se ha considerado un periodo para el entrenamiento y otro diferente para el testeo de la red seleccionada, siendo este último el utilizado para la comparación entre ambos modelos.

También indicar que se ha utilizado una arquitectura de red, la Backpropagation, existiendo otras arquitecturas más complejas que podrían llevar a mejores optimizaciones de resultados.

Si bien es cierto que la capacidad de generalización de las redes neuronales es un hecho y que han demostrado una mayor capacidad de predicción que el modelo

econométrico, también es cierto que, en algunos casos, en función de la configuración del proceso de aprendizaje (el ratio de la delta generalizada y el momentum) la red podría caer en un mínimo local necesitando mayor tiempo de computación para salir de él y encontrar otro mínimo. En estos casos es preferible detener el proceso de entrenamiento y comenzar de nuevo dado que la red comienza a entrenarse en otro punto diferente con otros pesos en las neuronas y la convergencia podría ser más rápida. Por tanto, la figura del supervisor, su habilidad y experiencia en el entrenamiento se hace necesaria.

Una de las principales críticas que suele hacerse a las redes neuronales tiene que ver con la llamada “caja negra”; es decir, al proceso interno de la red neuronal que ocurre en las capas ocultas. El argumento principal es que en los modelos econométricos puede obtenerse una relación más clara entre las variables mientras que esto no sucede en la red neuronal. Esta cuestión puede ser cierta desde un punto de vista conceptual más lineal, pero de alguna forma sí puede encontrarse una relación entre los inputs y outputs pero con otra conceptualización. Para ello debe recordarse el mecanismo de aprendizaje de las redes neuronales que reside en las neuronas, las funciones de transferencia y sobre todo los pesos de cada neurona. La red neuronal es capaz de seleccionar qué inputs son los adecuados para obtener patrones de aprendizaje correctos y los pesos de las neuronas representan de forma indirecta la contribución de dichos inputs en la predicción, por tanto, sí existe una relación entre los

inputs de la red y los outputs pero de forma global y a través de dichos pesos de cada una las neuronas activadas en el proceso de aprendizaje.

En las tablas 5-19, 5-20 y 5-21 se establecen los porcentajes de reducción del error de predicción de las redes neuronales respecto a los modelos EGARCH para todos los índices, para cada frecuencia de datos, para las cinco ventanas de predicción y para los cuatro tipos de errores descritos.

Los resultados obtenidos indican que la red neuronal mejora las predicciones de la volatilidad condicional de los índices bursátiles frente al modelo ARMA-EGARCH para datos de baja frecuencia. Estos resultados son coincidentes con otros estudios como, por ejemplo, Yim (2002) analiza la volatilidad diaria del índice BOVESPA. En Hossain et al. (2010) se verifica la mejora de resultados de la red neuronal frente al modelo econométrico para los índices NIKKEI 225, S&P 500 y las divisas USD/JPY y USD/GBP para el periodo 1986-2009. Lahmiri (2012) estudia la volatilidad condicional para los índices bursátiles de Marruecos y Arabia Saudí con un modelo ARMA-EGARCH y una red Backpropagation obteniendo resultados en la misma línea descrita.

**Tabla 5-19: Porcentaje de reducción del error de predicción
Red Neuronal versus EGARCH con datos diarios**

		MAPE	MAE	MPE	RMSE
DAX (d)	V1	-13%	-26%	-60%	-14%
	V2	-13%	-9%	-62%	-5%
	V3	-57%	-22%	-99%	-12%
	V4	-85%	-84%	-93%	-60%
	V5	-70%	-57%	-97%	-34%
IBEX (d)	V1	-28%	-28%	-79%	-15%
	V2	-16%	-20%	-60%	-10%
	V3	-91%	-84%	-97%	-60%
	V4	-72%	-71%	-80%	-46%
	V5	-61%	-65%	77%	-41%
NASDAQ(d)	V1	-19%	-22%	-32%	-12%
	V2	-58%	-65%	-95%	-41%
	V3	-67%	-66%	-100%	-42%
	V4	-7%	-10%	-60%	-5%
	V5	-78%	-81%	137%	-56%
NIKKEI (d)	V1	-10%	-8%	-69%	-4%
	V2	-33%	-36%	-48%	-20%
	V3	-68%	-45%	-87%	-26%
	V4	-39%	-37%	-74%	-20%
	V5	65%	46%	779%	21%
S&P (d)	V1	318%	393%	-64%	122%
	V2	-84%	-82%	-99%	-57%
	V3	-69%	-63%	-91%	-39%
	V4	-75%	-79%	-98%	-54%
	V5	-9%	-12%	-88%	-6%

Fuente: Elaboración propia

**Tabla 5-20: Porcentaje de reducción del error de predicción
Red Neuronal versus EGARCH con datos semanales**

		MAPE	MAE	MPE	RMSE
DAX (s)	V1	-52%	-60%	-85%	-37%
	V2	-56%	-60%	31%	-37%
	V3	-33%	-10%	-20%	-5%
	V4	-33%	-42%	-26%	-24%
	V5	-34%	-49%	-50%	-28%
IBEX (s)	V1	-74%	-77%	-74%	-52%
	V2	-43%	-40%	-46%	-23%
	V3	-70%	-54%	-76%	-32%
	V4	-72%	-45%	-79%	-26%
	V5	-6%	-14%	-42%	-7%
NASDAQ(s)	V1	-86%	-85%	-99%	-62%
	V2	-88%	-87%	-97%	-64%
	V3	-75%	-64%	-79%	-40%
	V4	-94%	-93%	-99%	-74%
	V5	-74%	-75%	-49%	-50%
NIKKEI (s)	V1	-10%	-12%	-24%	-6%
	V2	-82%	-76%	-94%	-51%
	V3	-69%	-16%	-94%	-9%
	V4	-36%	-33%	-88%	-18%
	V5	81%	66%	-55%	29%
S&P (s)	V1	-70%	-68%	-79%	-44%
	V2	-80%	-76%	-96%	-51%
	V3	-7%	-10%	-54%	-5%
	V4	-73%	-68%	-89%	-44%
	V5	-63%	-71%	-1%	-46%

Fuente: Elaboración propia

Tabla 5-21: Porcentaje de reducción del error de predicción Red Neuronal versus EGARCH con datos mensuales

		MAPE	MAE	MPE	RMSE
DAX (m)	V1	44%	-42%	350%	-24%
	V2	-99%	-99%	-99%	-91%
	V3	-58%	-51%	-71%	-30%
	V4	-97%	-97%	-98%	-81%
	V5	-8%	-11%	-98%	-5%
IBEX (m)	V1	-65%	-67%	-88%	-42%
	V2	-39%	-33%	-58%	-18%
	V3	-14%	-17%	-5%	-9%
	V4	-92%	-91%	-100%	-69%
	V5	-83%	-83%	-83%	-58%
NASDAQ(m)	V1	-12%	-18%	-24%	-10%
	V2	-1%	-1%	-14%	-1%
	V3	-45%	-45%	-18%	-26%
	V4	-67%	-76%	-52%	-51%
	V5	-42%	-42%	-42%	-24%
NIKKEI (m)	V1	-89%	-89%	-89%	-67%
	V2	-68%	-67%	-68%	-43%
	V3	-5%	-1%	-25%	-1%
	V4	-57%	-45%	-60%	-26%
	V5	-40%	-41%	-79%	-23%
S&P (m)	V1	-84%	-83%	-92%	-59%
	V2	-78%	-76%	-91%	-51%
	V3	-80%	-80%	-97%	-55%
	V4	-62%	-50%	-69%	-29%
	V5	-65%	-58%	-68%	-35%

Fuente: Elaboración propia

**VI .Estudio comparativo entre el
modelo EGARCH y la Red
Neuronal Backpropagation:
Aplicación sobre la volatilidad
condicional en el índice IBEX 35
con datos de alta frecuencia**

6. Estudio comparativo entre el modelo EGARCH y la Red Neuronal Backpropagation: Aplicación sobre la volatilidad condicional en el índice IBEX 35 con datos de alta frecuencia

6.1. Introducción

En este apartado se presenta una comparativa entre el modelo EGARCH y la red Backpropagation, al igual que en el capítulo anterior, pero esta vez aplicado a índices bursátiles con datos de alta frecuencia. El objetivo es determinar si los resultados obtenidos también pueden extenderse a este tipo de datos o si, por el contrario, existen diferencias.

El estudio se ha aplicado al índice Ibex-35 y se han escogido como datos de alta frecuencia datos de 5, 10, 15, 30 y 60 minutos.

El periodo muestral escogido es idéntico al elegido en el capítulo anterior, es decir, desde inicios del 2000 hasta finales del 2010. Así mismo, se han creado las mismas cinco ventanas de estimación y predicción que también se distribuyen en grupos de seis años para la estimación del modelo y un año para la predicción (tabla 6-1).

Tabla 6-1: Ventanas muestrales y de predicción

VENTANA	ESTIMACIÓN		PREDICCIÓN
	INICIO	FIN	AÑO
1	2000	2005	2006
2	2001	2006	2007
3	2002	2007	2008
4	2003	2008	2009
5	2004	2009	2010

Fuente: Elaboración propia

Para comparar el modelo econométrico y la red neuronal se han utilizado los cuatro tipos de errores de predicción ya descritos.

6.2. Modelización de la volatilidad condicional mediante el modelo ARMA-EGARCH con datos de alta frecuencia

El procedimiento a seguir para el estudio del modelo econométrico es idéntico al utilizado en el capítulo anterior, pero en este caso, con frecuencias más altas. Por tanto, en el primer paso se ha estudiado la existencia o no de raíces unitarias en la serie de rendimientos para el índice IBEX-35 y para las frecuencias de 5,10,15,30 y 60 minutos con el objetivo de determinar la estacionariedad de dichas series y poder aplicar, de nuevo, la metodología Box-Jenkins. De nuevo se ha utilizado los test de raíces unitarias Dickey-Fuller Aumentado (DFA) y Phillips-Perron, estimados sin constante ni tendencia, con constante, y con constante y tendencia. Para el

cálculo de los retardos para estos test se ha utilizado el criterio Schwartz y se ha calculado para los niveles de significatividad del 1%, 5% y 10%. La no existencia de raíces unitarias confirmará la estacionariedad de las series (tablas 6-2, 6-3 y 6-4).

Tabla 6-2: Test de raíces unitarias Dickey-Fuller Aumentado (DFA) sin constante y tendencia

	DFA	1%	5%	10%
IBEX (5)	-381.4681	-2.564970	-1.940826	-1.616699
IBEX (10)	-382.9607	-2.564978	-1.940827	-1.616698
IBEX (15)	-215.8501	-2.564986	-1.940828	-1.616698
IBEX (30)	-219.4432	-2.565008	-1.940831	-1.616696
IBEX (60)	-51.93206	-2.565055	-1.940837	-1.616691

Fuente: Elaboración propia

Todos los valores del estadístico DFA son inferiores al valor tabulado para los tres niveles de significación, por tanto, las series son estacionarias.

Tabla 6-3: Test de raíces unitarias Dickey-Fuller Aumentado (DFA) con constante y sin tendencia

	DFA	1%	5%	10%
IBEX (5)	-381.4676	-3.430205	-2.861360	-2.566714
IBEX (10)	-382.9595	-3.430227	-2.861370	-2.566719
IBEX (15)	-215.8492	-3.430249	-2.861379	-2.566725
IBEX (30)	-219.4412	-3.430312	-2.861407	-2.566740
IBEX (60)	-51.93139	-3.430442	-2.861465	-2.566770

Fuente: Elaboración propia

Todos los valores del estadístico DFA son inferiores al valor tabulado para los tres niveles de significación, por tanto, las series son estacionarias.

Tabla 6-4: Test de raíces unitarias Dickey-Fuller Aumentado (DFA) con constante y tendencia

	DFA	1%	5%	10%
IBEX (5)	-381.4673	-3.958065	-3.409817	-3.126612
IBEX (10)	-382.9587	-3.958097	-3.409833	-3.126621
IBEX (15)	-215.8487	-3.958128	-3.409848	-3.126630
IBEX (30)	-219.4399	-3.958217	-3.409892	-3.126656
IBEX (60)	-51.93168	-3.958402	-3.409982	-3.126710

Fuente: Elaboración propia

Todos los valores del estadístico DFA son inferiores al valor tabulado para los tres niveles de significación, por tanto, las series son estacionarias.

Tabla 6-5: Test de raíces unitarias Phillips-Perron (PP) sin constante y tendencia

	DFA	1%	5%	10%
IBEX (5)	-530.6266	-2.564970	-1.940826	-1.616699
IBEX (10)	-383.1331	-2.564978	-1.940827	-1.616698
IBEX (15)	-310.5073	-2.564986	-1.940828	-1.616698
IBEX (30)	-219.5872	-2.565008	-1.940831	-1.616696
IBEX (60)	-155.9315	-2.565055	-1.940837	-1.616691

Fuente: Elaboración propia

Todos los valores del estadístico PP son inferiores al valor tabulado para los tres niveles de significación, por tanto, las series son estacionarias.

También se ha calculado el test Phillips-Perron para las series de rendimientos con datos de alta frecuencia confirmando, al igual que en el caso anterior, la estacionariedad de las mismas tal y como puede apreciarse en las tablas 6-5, 6-6 y 6-7.

Tabla 6-6: Test de raíces unitarias Phillips-Perron (PP) con constante y sin tendencia

	DFA	1%	5%	10%
IBEX (5)	-530.6257	-3.430205	-2.861360	-2.566714
IBEX (10)	-383.1319	-3.430227	-2.861370	-2.566719
IBEX (15)	-310.5059	-3.430249	-2.861379	-2.566725
IBEX (30)	-219.5851	-3.430312	-2.861407	-2.566740
IBEX (60)	-155.9287	-3.430442	-2.861465	-2.566770

Fuente: Elaboración propia

Todos los valores del estadístico PP son inferiores al valor tabulado para los tres niveles de significación, por tanto, las series son estacionarias.

Tabla 6-7: Test de raíces unitarias Phillips-Perron (PP) con constante y con tendencia

	DFA	1%	5%	10%
IBEX (5)	-530.6249	-3.958065	-3.409817	-3.126612
IBEX (10)	-383.1307	-3.958097	-3.409833	-3.126621
IBEX (15)	-310.5049	-3.958128	-3.409848	-3.126630
IBEX (30)	-219.5833	-3.958217	-3.409892	-3.126656
IBEX (60)	-155.9266	-3.958402	-3.409982	-3.126710

Fuente: Elaboración propia

Todos los valores del estadístico PP son inferiores al valor tabulado para los tres niveles de significación, por tanto, las series son estacionarias.

Se puede concluir, por tanto, que todas las series de rentabilidades del índice IBEX-35, tanto diarias, semanales, mensuales, así como con datos de alta frecuencia, son estacionarias dado que los valores estadísticos rechazaban la hipótesis nula de existencia de raíces unitarias, tanto para el test DFA como para el PP, para los casos de estimación sin constante ni tendencia, con constante, y con

constante y tendencia, con lo que se ha evaluado y analizado todo el espectro de posibilidades.

De nuevo, una vez determinada la estacionariedad de las series se ha procedido a estudiar la autocorrelación de los residuos. Para ello se ha realizado con cada serie de rentabilidades una regresión con diferentes retardos, desde uno hasta cinco.

Figura 6-1: Test h de Durbin para un retardo en el índice IBEX 35 con datos de cinco minutos

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/23/11 Time: 12:01
 Sample (adjusted): 3 287070
 Included observations: 287068 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-6.41E-07	2.63E-06	-0.243410	0.8077
RT(-1)	0.010074	0.001866	5.398163	0.0000
R-squared	0.000102	Mean dependent var	-6.48E-07	
Adjusted R-squared	0.000098	S.D. dependent var	0.001412	
S.E. of regression	0.001412	Akaike info criterion	-10.28800	
Sum squared resid	0.572117	Schwarz criterion	-10.28792	
Log likelihood	1476679.	Hannan-Quinn criter.	-10.28797	
F-statistic	29.14017	Durbin-Watson stat	1.999709	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Fuente: Elaboración propia

Tal y como ya se ha explicado no es posible la utilización de la d de Durbin-Watson, ya que en uno de sus supuestos indica que el modelo de regresión no debe ser autoregresivo. Por tanto, se utilizará el contraste h de Durbin (1970), en el que sí se permite la existencia de retardos de la

variable dependiente (la rentabilidad del índice). En la figura 6-1 puede verse un ejemplo para el estudio de la autocorrelación de los residuos de primer orden para el índice IBEX-35 con datos de cinco minutos.

Para calcular el estadístico se estimará en primer lugar el valor de ρ , mediante la aproximación descrita en el capítulo anterior que será igual a:

$$\rho \approx 1 - \frac{d}{2} = 1 - \frac{1.999709}{2} = 0.0001455$$

A continuación puede calcularse el estadístico según la formulación descrita:

$$h = \rho \sqrt{\frac{n}{1 - nVar(\beta_1)}} = 0.0001455 \sqrt{\frac{287,068}{1 - 287,068 * (0.001866)^2}}$$

$$= 3.7086$$

Este resultado se encuentra fuera del intervalo de aceptación de la hipótesis nula (-1.645;1.645) para nivel de significación del 5%, y por tanto, puede concluirse que existe autocorrelación de los residuos de orden uno. Se ha llegado a la misma conclusión de existencia de autocorrelación de los residuos de orden uno para todas las frecuencias del índice, dado que los estadísticos de este contraste se encontraban fuera de la región de aceptación.

Para determinar la existencia o no de la

autocorrelación de los residuos de orden superior a uno, se ha calculado el contraste de Breusch-Godfrey (1978) ya utilizado en el capítulo anterior, en el que se explicaban las ventajas de la utilización del mismo. Este contraste se distribuye como una χ_p^2 , donde p es el número de retardos de la regresión de los residuos. El valor del contraste se calcula como $\chi_{estimado}^2 = n * R^2$, donde n es el número de observaciones y R^2 el coeficiente de determinación de la regresión de los residuos. Si el valor estimado es superior al valor teórico se rechazará la hipótesis nula y existirá autocorrelación de los residuos; en caso contrario, se aceptará la hipótesis nula y, por tanto, no existirá autocorrelación. Como ejemplo puede verse la figura 6-2. En este caso se trata del estudio de la autocorrelación de los residuos de orden dos para el índice IBEX 35 con datos de cinco minutos. Se ha obtenido un valor crítico en tablas para esta distribución al 95% con dos grados de libertad de 5.99 y el valor observado ha sido de 7.897069. Se estudió la autocorrelación de los residuos hasta cinco retardos para todas las frecuencias y se llegó a la misma conclusión de existencia de autocorrelación de los residuos.

Ante la presencia de autocorrelación de los residuos se ha optado para su corrección la utilización del estimador Newey y West (1987) que consigue obtener un estimador consistente en estas situaciones. Estos autores plantean una matriz de varianzas-covarianzas cuya distribución es asintótica para el estimador de mínimos cuadrados ordinarios bajo presencia de autocorrelación y puede utilizarse

para muestras grandes, como es en este caso, sin tener que especificar a priori la propia estructura de autocorrelación.

Figura 6-2: Test Breusch-Godfrey para dos retardos en el índice IBEX 35 con datos de cinco minutos

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	3.948574	Prob. F(2,287062)	0.0193
Obs*R-squared	7.897069	Prob. Chi-Square(2)	0.0193

Test Equation:

Dependent Variable: RESID

Method: Least Squares

Date: 07/23/11 Time: 12:03

Sample: 4 287070

Included observations: 287067

Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-5.33E-07	2.64E-06	-0.201694	0.8402
RT(-1)	-0.567671	0.202045	-2.809627	0.0050
RT(-2)	-0.262723	0.141289	-1.859474	0.0630
RESID(-1)	0.567705	0.202049	2.809742	0.0050
RESID(-2)	0.268522	0.142647	1.882420	0.0598
R-squared	0.000028	Mean dependent var	1.02E-20	
Adjusted R-squared	0.000014	S.D. dependent var	0.001412	
S.E. of regression	0.001412	Akaike info criterion	-10.28815	
Sum squared resid	0.572015	Schwarz criterion	-10.28796	
Log likelihood	1476699.	Hannan-Quinn criter.	-10.28810	
F-statistic	1.974287	Durbin-Watson stat	2.000040	
Prob(F-statistic)	0.095422			

Fuente: Elaboración propia

Una vez se tiene confirmación de que las series son estacionarias y la existencia de autocorrelación en los residuos que va a resolverse mediante el método propuesto por Newey y West (1987), por tanto, ya puede analizarse el proceso generador ARMA de la serie de rentabilidades. Al igual

que se planteó para frecuencias bajas, se han estimado diversos modelos ARMA con diferentes retardos tanto en la parte autoregresiva como en la parte de medias móviles. De nuevo se ha seleccionado en cada caso el mejor modelo atendiendo al criterio Schwartz dado que el criterio AIC tiende a dimensionar por exceso los órdenes de retardo de autocorrelación. Los modelos planteados han sido ARMA(1,0), ARMA(1,1), ARMA(2,2), ARMA(1,2), ARMA(0,1) y ARMA(0,2). Los modelos se han estimado para todas las frecuencias planteadas (tabla 6-8).

Tabla 6-8: Modelos ARMA seleccionados siguiendo el criterio Schwartz

INDICE	5min	10min	15min	30min	60min
IBEX-35	ARMA(1,1)	ARMA(1,2)	ARMA(1,1)	MA(1)	ARMA(1,1)

Fuente: Elaboración propia

La existencia de autocorrelación en los residuos indica que existe, al menos, una relación lineal entre los residuos y sus retardos (ya corregida mediante Newey y West); además, puede existir otro tipo de relaciones no lineales (exponencial, cuadrática,..) (de Arce, 1998). De nuevo se ha utilizado el test ARCH para determinar la existencia de estos tipos de relaciones.

En la figura 6-3 puede verse un ejemplo de este test aplicado al IBEX-35 con datos de 60 minutos. Como se observa ha sido calculado para cinco retardos para dar una

mayor amplitud al estadístico y verificar si existen o no componentes autorregresivos más alejados en el tiempo. El valor crítico para un nivel de significación del $\alpha=5\%$ y cinco grados de libertad, dado que el modelo se ha calculado para cinco retardos, es de 11,07. El valor observado del estadístico ha sido de 363,65, por tanto, se rechaza la hipótesis nula y se puede afirmar que al 5% de significatividad estadística existen componentes ARCH en los residuos. Este test fue calculado con el mismo nivel de significatividad para todas las frecuencias ya indicadas. En todos los casos se obtuvo un valor observado superior al valor crítico y, por tanto, se rechazaba la hipótesis nula. Así pues, también se hace necesaria la modelización de la volatilidad condicional mediante modelos de la familia GARCH para datos de alta frecuencia.

Como ya se hizo en el capítulo anterior, se ha planteado en primer lugar un modelo GARCH por ser más genérico para luego realizar una comparación con el modelo EGARCH y determinar si con este último es posible de captar la existencia de asimetrías en la volatilidad condicional con datos de alta frecuencia. Para determinar los retardos de cada modelo GARCH se han estimado los siguientes modelos: GARCH(1,1), GARCH(2,2), GARCH(0,1), GARCH(0,2), GARCH(1,0), GARCH(2,0). Se ha utilizado el criterio Schwartz para la elección del mejor retardo. En la tabla 6-9 puede verse los retardos seleccionados del modelo GARCH para cada frecuencia.

Figura 6-3: Test ARCH para cinco retardos en el índice IBEX-35 con datos de 60 minutos

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	73.78969	Prob. F(5,24915)	0.0000
Obs*R-squared	363.6522	Prob. Chi-Square(5)	0.0000

Test Equation:
 Dependent Variable: RESID^2
 Method: Least Squares
 Date: 07/27/11 Time: 11:17
 Sample (adjusted): 8 24928
 Included observations: 24921 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.79E -05	7.71E -07	23.19861	0.0000
RESID^2(-1)	0.052344	0.006332	8.266155	0.0000
RESID^2(-2)	0.069903	0.006337	11.03176	0.0000
RESID^2(-3)	0.042296	0.006346	6.664697	0.0000
RESID^2(-4)	0.037745	0.006337	5.956782	0.0000
RESID^2(-5)	0.030641	0.006332	4.838829	0.0000

R-squared	0.014592	Mean dependent var	2.33E -05
Adjusted R-squared	0.014394	S.D. dependent var	0.000114
S.E. of regression	0.000113	Akaike info criterion	-15.34357
Sum squared resid	0.000316	Schwarz criterion	-15.34161
Log likelihood	191194.6	Hannan -Quinn criter.	-15.34294
F-statistic	73.78969	Durbin -Watson stat	2.001943
Prob(F-statistic)	0.000000		

Fuente: Elaboración propia

Tabla 6-9: Modelos GARCH seleccionados siguiendo el criterio de Schwartz

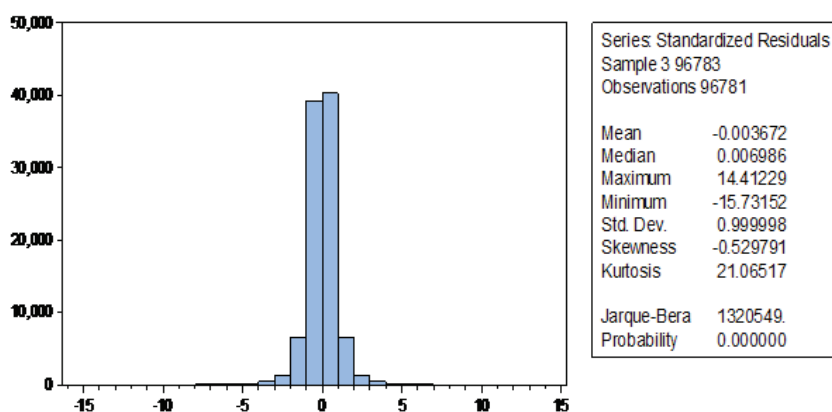
INDICE	5min	10min	15min	30min	60min
IBEX-35	ARMA(1,1)-	ARMA(1,2)-	ARMA(1,1)-	MA(1)-	ARMA(1,1)-
	GARCH(2,2)	GARCH(1,1)	GARCH(1,1)	GARCH(2,2)	GARCH(1,1)

Fuente: Elaboración propia

Una vez seleccionado el modelo GARCH estimado con los retardos indicados anteriormente para las cinco frecuencias se ha estudiado el histograma de los residuos de cada modelo junto con sus estadísticos principales. Con ello puede determinarse la asimetría existente en los mismos para

realizar una comparativa posterior con el modelo EGARCH y verificar si este modelo mejora la modelización de la volatilidad condicional.

Figura 6-4: Histograma de residuos del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) en el índice IBEX-35 15 minutos



Fuente: Elaboración propia

En la figura 6-4 puede verse un ejemplo de histograma de los residuos calculados para el índice IBEX-35 con datos de 15 minutos y el modelo seleccionado. Puede observarse, al igual que sucedía para el caso de frecuencias más bajas y para todos los índices estudiados en el capítulo anterior, que las series presentan asimetría negativa. Para el resto de frecuencias también se ha observado el mismo resultado de presencia de asimetría negativa.

A continuación se ha procedido a la estimación del modelo EGARCH para los siguientes retardos EGARCH(1,1), EGARCH(2,2), EGARCH(0,1), EGARCH(0,2),

EGARCH(1,0), EGARCH(2,0). Se ha utilizado, de nuevo, el criterio Schwartz para la elección del mejor retardo (tabla 6-10). De nuevo se ha calculado el histograma de los residuos para determinar si con el modelo EGARCH se verifica que mejora la asimetría detectada anteriormente tal y como se ha concluido para el caso de datos de baja frecuencia. En la figura 6-5 puede verse el histograma de los residuos para el IBEX-35 con datos de 15 minutos con el modelo EGARCH. Comparando con el histograma obtenido para el modelo GARCH (figura 6-4), puede observarse una reducción de la asimetría de los mismos dada la capacidad del modelo EGARCH de captar mejor dichas asimetrías de volatilidad.

Tabla 6-10: Modelos EGARCH seleccionados siguiendo criterio Schwartz

INDICE	5min	10min	15min	30min	60min
IBEX-35	ARMA(1,1)- EGARCH(2,2)	ARMA(1,2)- EGARCH(2,2)	ARMA(1,1)- EGARCH(2,2)	MA(1)- EGARCH(2,2)	ARMA(1,1)- EGARCH(1,1)

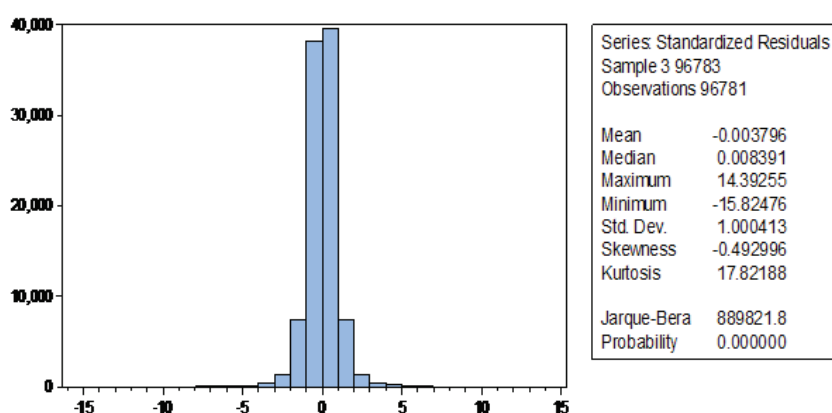
Fuente: Elaboración propia

Para los cinco tipos de frecuencias de datos planteados se ha obtenido una mejora de la asimetría mediante el modelo EGARCH confirmando de este modo la teoría del modelo.

Una vez demostrado que la modelización EGARCH es preferible al modelo GARCH para el caso del IBEX-35 con datos de alta frecuencia, se ha procedido a la

estimación del modelo seleccionado para cada frecuencia calculando su predicción para cada una de las cinco ventanas descritas al inicio de este capítulo. Es decir, seis años de periodo de estimación y uno para predicción.

Figura 6-5: Histograma de residuos del modelo ARMA(1,1)-EGARCH(2,2) en el índice IBEX-35 15minutos



Fuente: Elaboración propia

En la tabla 6-11 se resumen los errores de predicción para cada ventana de estimación y predicción para los cinco tipos de frecuencia estudiados. Al igual que para datos de baja frecuencia se ha estudiado si existe alguna relación entre la volatilidad existente en cada ventana y los errores de predicción obtenidos para determinar si hay variaciones significativas en periodos con mayor o menor volatilidad. Para ello se ha calculado la volatilidad media para cada ventana, y frecuencia de datos para determinar en cada uno de ellos si aumenta o disminuye la volatilidad del periodo y compararla con los incrementos y/o reducciones de los errores

de predicción. No se halló ninguna relación en estos términos, por lo que puede decirse que los errores de predicción son independientes de la mayor o menor volatilidad existente en cada una de las ventanas.

Tabla 6-11: Errores de predicción del modelo EGARCH con datos de alta frecuencia en el índice IBEX-35

		MAPE	MAE	MPE	RMSE
IBEX (5 min)	V1	0,26248416	9,0361E-06	0,20301436	0,00300601
	V2	0,31974141	4,0943E-06	0,31059916	0,00202343
	V3	0,27169359	0,00021669	0,21694075	0,01472031
	V4	25,7085722	0,00011302	-25,61777	0,0106311
	V5	0,21099298	5,6018E-05	0,05998858	0,00748453
IBEX (10 min)	V1	0,33197646	9,3775E-07	0,32012453	0,00096838
	V2	0,70192234	2,3362E-06	0,01836914	0,00152848
	V3	0,39127714	8,8449E-06	0,18583482	0,00297404
	V4	0,63759945	2,3927E-06	-0,6032699	0,00154682
	V5	0,43904343	4,8223E-06	0,10976611	0,00219597
IBEX (15 min)	V1	0,81701219	2,2337E-06	0,15434504	0,00149457
	V2	0,53227474	2,5974E-06	0,36421663	0,00161163
	V3	0,62686993	1,0798E-05	0,54322686	0,00328599
	V4	0,1819591	1,3007E-06	-0,12425093	0,00114047
	V5	0,34080232	3,7072E-06	0,17380106	0,00192541

Fuente: Elaboración propia

Tabla 6-12: Errores de predicción del modelo EGARCH con datos de alta frecuencia IBEX-35 (cont.)

		MAPE	MAE	MPE	RMSE
IBEX (30 min)	V1	0,61524793	1,7293E-06	0,09932522	0,00131504
	V2	0,15390362	9,3501E-07	0,11663814	0,00096696
	V3	0,21428101	6,7583E-06	0,20897526	0,00259967
	V4	0,42205606	5,429E-06	-0,23938849	0,00233003
	V5	0,31211814	4,4173E-06	-0,17310016	0,00210174
IBEX (60 min)	V1	0,01255168	7,6402E-08	0,00892704	0,00027641
	V2	0,0254638	3,0464E-07	0,00883194	0,00055194
	V3	0,04831693	3,2911E-06	0,04465462	0,00181413
	V4	0,02810043	6,9662E-07	-0,00081787	0,00083464
	V5	0,00975933	3,5436E-07	0,00432106	0,00059529

Fuente: Elaboración propia

6.3. Modelización de la volatilidad condicional mediante Red Neuronal BackPropagation con datos de alta frecuencia

Una vez realizada la modelización y predicción de la volatilidad condicional del índice IBEX-35 con datos de alta frecuencia mediante el modelo econométrico EGARCH se

procede a continuación a la predicción mediante la red neuronal Backpropagation.

Se han utilizado los mismos parámetros de configuración de la red neuronal ya descritos para el caso de datos de baja frecuencia. Se han incorporado como inputs para el aprendizaje de la red las mismas variables elegidas para cada uno de los modelos econométricos seleccionados para cada frecuencia. Es decir, se incorpora como inputs la varianza condicional con uno y dos retardos según el modelo econométrico. Para la incorporación de la parte ARMA del modelo econométrico como input de la red neuronal, se escoge la rentabilidad del índice con un retardo o dos según se trate de modelo AR(1) o AR(2). Se recuerda, de nuevo, que dada la capacidad de encontrar relaciones más complejas entre las variables no es necesario establecer de forma explícita la existencia de medias móviles (MA) encontradas en los modelos econométricos. Para que la red neuronal pueda crear patrones de comportamiento de las variables y realizar el aprendizaje durante su entrenamiento es necesario incorporar como output la varianza condicional observada.

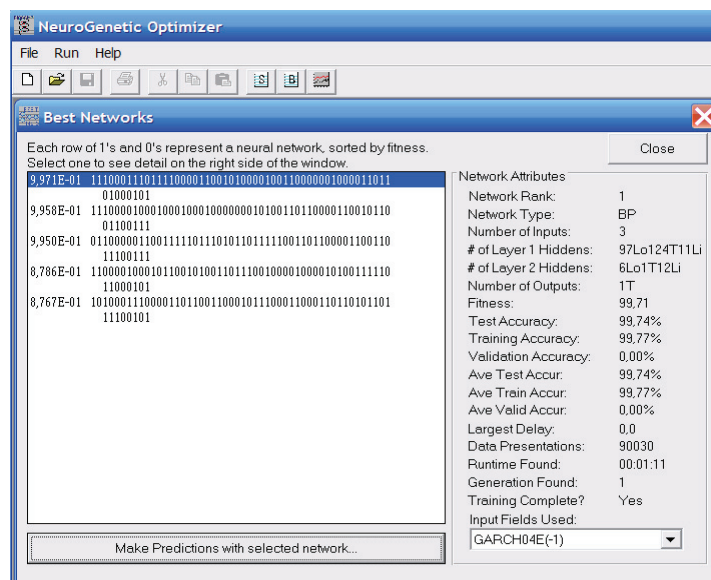
De nuevo se espera una mejora en los resultados frente al modelo econométrico con una reducción en los errores cometidos en la predicción de la volatilidad condicional para cada frecuencia de datos. Al igual que en el caso econométrico, se ha entrenado la red para cada una de las cinco ventanas. Puede verse en la figura 6-6 un ejemplo de

tiempo de computación para el IBEX-35 con frecuencia de quince minutos para la ventana cuatro de estimación. El tiempo de computación en este caso ha sido de un minuto once segundos para la obtención de una red que mejora los errores de predicción respecto al modelo econométrico correspondiente. Indicar que para el caso de altas frecuencias el tiempo de computación necesario en la red neuronal para obtener una red que mejore los resultados respecto al modelo econométrico es superior respecto al caso de datos de baja frecuencia. Esto es algo lógico dada la gran diferencia de número de observaciones a computar. Por ejemplo, para el índice IBEX-35 con frecuencia de cinco minutos se tienen más de 280.000 observaciones frente a las 2.778 observaciones con frecuencia diaria. No obstante, muchas de las estimaciones han sido obtenidas con tiempos similares, incluso inferiores, a los obtenidos para los casos de baja frecuencia.

En cuanto a las características de las redes que se han obtenido puede destacarse, al igual que ya se ha visto para el caso de datos de baja frecuencia, que los inputs seleccionados finalmente en cada una de las redes y ventanas coinciden en general con los incorporados inicialmente. Se recuerda que la red tenía flexibilidad para seleccionar aquellos inputs que durante el proceso de aprendizaje mejoran los resultados minimizando el error mediante el mecanismo ya visto de la regla delta generalizada. Por ejemplo, en la figura 6-7 se puede observar que los inputs utilizados en la red finalmente seleccionada para el índice IBEX-35 con diez

minutos para la ventana de predicción uno coinciden con las variables del modelo econométrico. Puede verse que la red neuronal ha seleccionado un retardo para los rendimientos y dos retardos para la varianza condicional siendo el modelo econométrico seleccionado ARMA(1,2)-EGARCH(2,2).

Figura 6-6: Tiempo de computación de la red neuronal en el índice IBEX-35 15 minutos ventana cuatro: 1 min 11 seg.

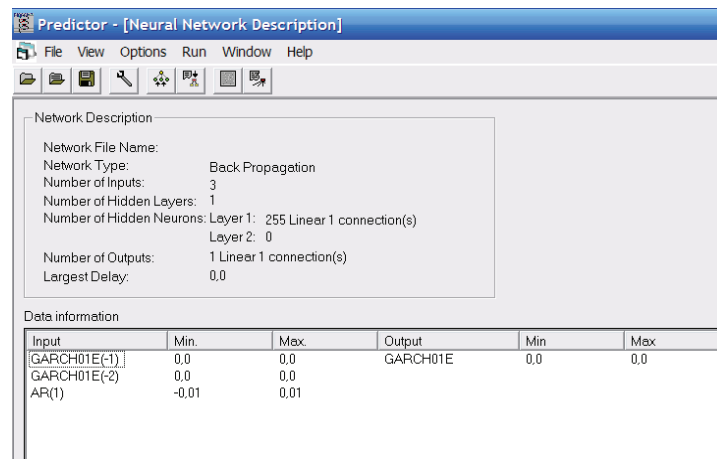


Fuente: Elaboración propia

Al igual que para el caso de datos de baja frecuencia, las funciones de transferencia en las neuronas de la capa de salida de la red han sido mayoritariamente de tipo lineal. En cuanto a las funciones de transferencia de las neuronas de las capas intermedias con un equilibrio entre los tres tipos de funciones de transferencia que el software puede establecer, es posible encontrar una red que mejora los

resultados de predicción. Así pues, las 255 neuronas se reparten en 85 neuronas con función de transferencia de tipo lineal, 85 logarítmica y 85 tangencial. Con esta estructura se inicia la fase de entrenamiento y en la mayoría de casos con esta distribución ha sido suficiente para obtener una red que mejora los resultados.

Figura 6-7: Inputs seleccionados en la red neuronal en el índice IBEX-35 10minutos ventana uno



Fuente: Elaboración propia

En la tabla 6-12 se resumen los errores de predicción para cada ventana de tiempo y para cada frecuencia mediante la red neuronal Backpropagation. No se ha detectado relación entre la volatilidad existente en cada ventana y los errores de predicción obtenidos. Igual que para el modelo econométrico, se ha calculado la volatilidad media en cada ventana y frecuencia de datos para determinar si aumenta o disminuye la volatilidad del periodo y compararla con los

incrementos y/o reducciones de los errores de predicción. Como conclusión, puede decirse que los errores de predicción cometidos por la red neuronal son independientes de la mayor o menor volatilidad existente en cada ventana temporal.

Tabla 6-13: Errores de predicción en la Red Neuronal con datos de alta frecuencia en el índice IBEX-35

		MAPE	MAE	MPE	RMSE
IBEX (5 min)	V1	0,16103917	3,0668E-06	-0,02933468	0,00175123
	V2	0,17242818	2,8873E-06	0,03584239	0,0016992
	V3	0,27342705	1,7364E-05	0,07745063	0,00416699
	V4	0,23439164	3,3767E-07	-0,14522657	0,00058109
	V5	0,63494582	4,2718E-06	0,10811331	0,00206683
IBEX (10 min)	V1	0,13468692	2,5518E-07	-0,02309185	0,00050516
	V2	0,14793804	6,4137E-07	0,00019941	0,00080086
	V3	0,17342324	4,2905E-06	0,07763179	0,00207136
	V4	0,18696436	1,2058E-06	-0,00231229	0,00109808
	V5	0,03275266	7,8515E-07	-0,00164589	0,00088609
IBEX (15 min)	V1	0,08055867	2,532E-07	0,02132416	0,00050319
	V2	0,08003144	4,7326E-07	0,01927263	0,00068794
	V3	0,14622448	3,2668E-06	0,13318769	0,00180743
	V4	0,07144154	3,2629E-07	-0,04515404	0,00057122
	V5	0,09918139	1,0461E-06	0,01012666	0,00102281

Fuente: Elaboración propia

Tabla 6-14: Errores de predicción en la Red Neuronal con datos de alta frecuencia en el índice IBEX-35 (cont.)

		MAPE	MAE	MPE	RMSE
IBEX (30 min)	V1	0,0351413	1,3121E-07	0,02362043	0,00036223
	V2	0,03362204	1,9099E-07	0,01231117	0,00043702
	V3	0,12621481	6,7877E-06	0,10704967	0,00260533
	V4	0,04002451	5,4477E-07	0,02426932	0,00073808
	V5	0,05703196	8,8434E-07	-0,0011203	0,0009404
IBEX (60 min)	V1	0,0099651	5,6151E-08	-0,00088317	0,00023696
	V2	0,01206509	1,3376E-07	0,00042134	0,00036573
	V3	0,01792584	1,1761E-06	0,00168591	0,00108449
	V4	0,01834084	5,3136E-07	0,0013001	0,00072895
	V5	0,0217989	7,5782E-07	0,00033423	0,00087053

Fuente: Elaboración propia

6.4. Conclusiones

Para el caso de datos de alta frecuencia del índice IBEX-35 se han obtenido resultados similares a los obtenidos para el caso de datos de baja frecuencia. Es decir, en la comparativa entre el modelo econométrico EGARCH y la

red neuronal Backpropagation para la modelización y predicción de la volatilidad condicional en las cinco ventanas temporales, con carácter general, la red neuronal mejora los resultados obtenidos por el modelo econométrico.

Se recuerda que en el entrenamiento de la red neuronal no se buscaba encontrar la mejor red neuronal posible para la predicción de la volatilidad condicional, sino simplemente demostrar que con una estructura simple de red neuronal como la Backpropagation es relativamente sencillo mejorar la capacidad predictiva en comparación con el modelo econométrico. Durante la fase de entrenamiento, se ha seleccionado en cada caso la primera red que mejorara resultados en relación a los cuatro tipos de error descritos comparándolos con el modelo econométrico, sin tener en cuenta la cuantificación de la reducción del error cometido dado que el entrenamiento se interrumpía de inmediato o bien pasadas más de dos horas sin que hubiera mejora alguna. En este caso se han estimado veinticinco redes neuronales (cinco ventanas para las cinco frecuencias planteadas). De éstas, sólo en cinco se han obtenido uno o más de un tipo de error que no ha superado al modelo econométrico. En la tabla 6-13 pueden verse estas cinco ventanas con el detalle de qué tipo de error ha fallado. Como puede observarse en tres de ellas sólo han errado en un solo tipo de error, una con fallo en dos tipos de error y sólo una con tres errores.

Tabla 6-15: Fallos de la Red Neuronal versus modelo EGARCH

		MAPE	MAE	MPE	RMSE
IBEX 5 min	V3	0	1	1	1
IBEX 5 min	V5	0	1	0	1
IBEX 30 min	V2	1	1	0	1
IBEX 60 min	V4	1	1	0	1
IBEX 60 min	V5	0	0	1	0

Fuente: Elaboración propia

1: la red neuronal mejora resultados; 0: el modelo econométrico mejora resultados

Tal y como se ha indicado, las redes neuronales elegidas para cada ventana de predicción no son las óptimas dado que el entrenamiento se interrumpía cuando ésta ya superaba al modelo econométrico y en caso de no superar en relación a los cuatro tipos de error se detenía el entrenamiento pasadas más de dos horas de entrenamiento. Esto implica que por un lado en muchas de ellas con un tiempo superior de entrenamiento y/o diferentes combinaciones en las funciones de transferencia de las neuronas (se recuerda que muchas de ellas tenían un equilibrio de 85 neuronas para los tres tipo de función de transferencia), podrían mejorarse aún más los resultados y podría llegar a que las redes neuronales superaran en un mayor porcentaje al modelo econométrico. También indicar que se ha utilizado una arquitectura de red, la Backpropagation, existiendo otras arquitecturas más complejas que podrían llevar a mejores optimizaciones de resultados y menores tiempos de computación.

Si bien es cierto que la capacidad de generalización de las redes neuronales es un hecho y que han demostrado una mayor capacidad de predicción que el modelo econométrico, también es cierto que, en algunos casos, en función de la configuración del proceso de aprendizaje (el ratio de la delta generalizada y el momentum) la red podría caer en un mínimo local necesitando mayor tiempo de computación para salir de él y encontrar otro mínimo. En estos casos es preferible detener el proceso de entrenamiento y comenzar de nuevo dado que la red comienza a entrenarse en otro punto diferente con otros pesos en las neuronas y la convergencia podría ser más rápida. Por tanto, la figura del supervisor, su habilidad y experiencia en el entrenamiento se hace necesaria en estos casos.

En la tabla 6-14 se establecen los porcentajes de reducción del error de predicción de las redes neuronales respecto el modelo EGARCH para el índice IBEX-35, para las frecuencias de 5, 10, 15, 30 y 60 minutos, en las cinco ventanas de predicción y calculándose los cuatro tipos de errores descritos.

Puede concluirse que en este índice la red neuronal supera al modelo econométrico para datos de alta frecuencia con independencia de la frecuencia elegida. Estos resultados vienen confirmados por otros estudios de la volatilidad condicional con otros índices como en Sun (2007) y Sun et al. (2010) que encuentran ventajas en la utilización de

la red backpropagation frente al modelo ARMA-GARCH para el cálculo del VAR de mercado intradiario del índice alemán DAX. Trebaol (2010) estudia la volatilidad intradiaria para el índice bursátil francés CAC-40 obteniendo resultados significativos para la red neuronal frente al modelo econométrico.

Tabla 6-16: Porcentaje de reducción del error de predicción Red Neuronal versus EGARCH con datos alta frecuencia en el índice IBEX-35

		MAPE	MAE	MPE	RMSE
IBEX (5 min)	V1	-38,6%	-66,1%	-85,6%	-41,7%
	V2	-46,1%	-29,5%	-88,5%	-16,0%
	V3	0,6%	-92,0%	-64,3%	-71,7%
	V4	-99,1%	-99,7%	-99,4%	-94,5%
	V5	200,9%	-92,4%	80,2%	-72,4%
IBEX (10 min)	V1	-59,4%	-72,8%	-92,8%	-47,8%
	V2	-78,9%	-72,5%	-98,9%	-47,6%
	V3	-55,7%	-51,5%	-58,2%	-30,4%
	V4	-70,7%	-49,6%	-99,6%	-29,0%
	V5	-92,5%	-83,7%	-98,5%	-59,6%
IBEX (15 min)	V1	-90,1%	-88,7%	-86,2%	-66,3%
	V2	-85,0%	-81,8%	-94,7%	-57,3%
	V3	-76,7%	-69,7%	-75,5%	-45,0%
	V4	-60,7%	-74,9%	-63,7%	-49,9%
	V5	-70,9%	-71,8%	-94,2%	-46,9%
IBEX (30 min)	V1	-94,3%	-92,4%	-76,2%	-72,5%
	V2	-78,2%	-79,6%	-89,4%	-54,8%
	V3	-41,1%	0,4%	-48,8%	0,2%
	V4	-90,5%	-90,0%	-89,9%	-68,3%
	V5	-81,7%	-80,0%	-99,4%	-55,3%
IBEX (60 min)	V1	-20,6%	-26,5%	-90,1%	-14,3%
	V2	-52,6%	-56,1%	-95,2%	-33,7%
	V3	-62,9%	-64,3%	-96,2%	-40,2%
	V4	-34,7%	-23,7%	59,0%	-12,7%
	V5	123,4%	113,9%	-92,3%	46,2%

Fuente: Elaboración propia

VII. Conclusiones Finales y futuros trabajos

7. Conclusiones finales y futuros trabajos

La volatilidad de los activos financieros se ha convertido en objeto de estudio en las últimas décadas para poder realizar una valoración y gestión del riesgo más eficaz dada la globalización internacional de los mercados financieros. Los modelos econométricos de la familia GARCH han sido los utilizados en la literatura financiera para poder explicar y predecir la volatilidad condicional de los mismos. Con la aparición de las redes neuronales y su aplicación en el campo de las finanzas, surge una nueva forma de modelizar y predecir dicha volatilidad con resultados muy prometedores.

Tras analizar la influencia de las variables macroeconómicas en la volatilidad de los índices bursátiles así como su evolución histórica, la revisión bibliográfica evidencia la influencia, si bien limitada, de las variables macroeconómicas. De este modo tendríamos dos factores principales que influyen en la variabilidad de la volatilidad: por un lado las variables macro, y por otro el comportamiento de los inversores, siendo éste de menor influencia en momentos con una economía y políticas más estables.

Por otro lado, en diversos estudios se da respuesta a la cuestión de si la volatilidad se ha incrementado o no a lo largo del tiempo. Se ha analizado la evolución de la volatilidad de los índices bursátiles S&P 500, IBEX-35, NIKKEI

225 y DAX de las últimas décadas. Los resultados confirman una reversión a la media de la volatilidad histórica. Sólo en los años de crisis económicas, financieras, etc. se evidencia un incremento significativo de la volatilidad. Si bien en algunos casos, como en el índice S&P 500, en el año 1987 sólo en tres días concretos se incrementa la volatilidad diaria, aunque este incremento disminuye si se toman medidas mensuales de volatilidad.

En el tercer capítulo se ha presentado una revisión bibliográfica de los principales modelos econométricos empleados para la modelización de la volatilidad condicional: los modelos de la familia GARCH. Dichos modelos pueden clasificarse en modelos univariantes y multivariantes, siendo estos últimos muy utilizados para estudiar las transmisiones de volatilidad entre diferentes mercados y activos.

Para la modelización de la volatilidad condicional de los índices bursátiles estudiados, se ha seleccionado el modelo EGARCH. Este modelo es el que mejor capta las asimetrías negativas existentes en la volatilidad condicional en los índices bursátiles estudiados frente a otros modelos asimétricos como el TGARCH o el GJR. El primero, el modelo TGARCH, utiliza, en su versión no restringida, la desviación condicional en vez de la varianza condicional como en el EGARCH. Esto puede provocar encontrar valores negativos desvirtuando el concepto de volatilidad y dificultando su interpretación, a pesar de que captura las asimetrías de forma

aditiva en vez de exponencial. El segundo, el modelo GJR, sólo recoge las asimetrías negativas pero de forma proporcional al cuadrado de la innovación mientras que los *shocks* negativos de los índices estudiados no se presentan en realidad de forma proporcional.

En el cuarto capítulo se ha expuesto la definición y el funcionamiento de las redes neuronales en general y de la red neuronal Backpropagation en particular, pues es la empleada en esta investigación. La elección de esta red viene motivada por la capacidad de autoadaptar los pesos de las neuronas durante el proceso de aprendizaje así como a su flexibilidad y generalización dando soluciones muy favorables sobre patrones no entrenados previamente, incluso con muestras reducidas. Dado que el entrenamiento es supervisado, resulta idónea para poder verificar los resultados en el estudio comparativo de predicción de la volatilidad, ya que las redes autosupervisadas o no supervisadas son utilizadas para mapas de características, clustering, etc

La regla delta generalizada es el algoritmo de aprendizaje de la red neuronal seleccionada y utiliza el mecanismo de corrección del error para ir modificando los pesos de las diferentes neuronas. Dicho algoritmo cuenta con dos parámetros fundamentales para obtener un proceso de aprendizaje rápido y con buenos resultados: el factor de aprendizaje y el momento o beta.

En el capítulo cinco se ha realizado un estudio comparativo sobre la predicción de la volatilidad condicional entre el modelo econométrico EGARCH y la red neuronal Backpropagation para diversos índices internacionales (DAX, IBEX-35, NIKKEI-225, NASDAQ-100 y S&P-500) con datos de baja frecuencia (diarios, semanales, mensuales). Las mejoras que ha incorporado este estudio frente a otros vienen determinadas por dos aspectos fundamentales. El primero, tiene que ver con los inputs de la red neuronal. Mientras que en la mayoría de estudios han escogido diversas variables, como el precio máximo, mínimo, incluso el volumen de transacción, aquí se han seleccionado las mismas variables utilizadas en el modelo econométrico, para poder establecer una comparativa más concreta entre ambas metodologías. El segundo aspecto de mejora viene por las diversas ventanas muestrales estudiadas, tanto para estimación como para predicción, desplazando la ventana inicial hacia adelante. De esta forma, puede analizarse si existe o no dependencia de los resultados y el momento muestral seleccionado, dado que en las diversas muestras existen tanto momentos de mayor volatilidad como de menor.

La conclusión que puede extraerse del estudio comparativo es la superioridad de la red neuronal Backpropagation en la predicción de la volatilidad condicional para los índices estudiados. De las 75 ventanas temporales estudiadas (5 índices x 5 ventanas x 3 frecuencias de datos) sólo en 6 de ellas la red neuronal no ha mejorado respecto al

modelo econométrico en alguno de los 4 tipos de error de predicción descritos. Por tanto, la red ha superado al modelo econométrico en un 92% de las ventanas temporales. Las ventanas fallidas se encuentran distribuidas de forma uniforme entre los índices, por lo que se concluye que no hay evidencia de que dichos fallos tengan relación con la zona geográfica del índice, ni de su forma de cálculo. Dado que estas ventanas también están distribuidas entre las 3 frecuencias estudiadas (datos diarios, semanales y mensuales), se concluye que no existe relación con dichas frecuencias ni con las variaciones de volatilidad existentes entre ellas.

En el capítulo seis, para dar mayor robustez al estudio comparativo, se analiza el índice IBEX-35 con datos de alta frecuencia (5,10,15,30 y 60 minutos). De nuevo, la red neuronal superó al modelo econométrico en la predicción de la volatilidad condicional. De las 25 ventanas temporales analizadas (5 frecuencias x 5 ventanas), en 5 de ellas la red neuronal falló en al menos uno de los 4 tipos de errores de predicción. Es decir, la red neuronal ha mejorado al modelo econométrico en la predicción de la volatilidad condicional del índice IBEX-35 en un 80% con los datos de alta frecuencia indicados.

Como se ha visto, los resultados sugieren que la red neuronal Backpropagation supera claramente al modelo clásico econométrico específico para la modelización y predicción de la volatilidad condicional, en este caso, el modelo

EGARCH. No obstante, en futuros trabajos puede establecerse el estudio de otros modelos econométricos asimétricos como el modelo TARCh dado que algunos autores lo utilizan, si bien el modelo EGARCH es uno de los más extendidos para la predicción de la volatilidad condicional de índices bursátiles.

En el estudio realizado, tanto con datos de baja frecuencia como de alta frecuencia, se han empleado ventanas de cinco años para la estimación de los modelos y ventanas de un año para las predicciones desplazándolas año a año. Podría estudiarse la selección de ventanas de estimación más pequeñas; es decir, seleccionar muestras más reducidas y analizar el comportamiento de ambos modelos.

Por otro lado, debe profundizarse en el estudio comparativo con datos de alta frecuencia, ampliándolo a otros índices para complementar los resultados obtenidos para el índice IBEX-35.

Otra línea de investigación futura podría encaminarse a la utilización de otras redes neuronales diferentes a la Backpropagation utilizada en este trabajo y, de esta forma, evaluar la eficiencia de los distintos tipos de redes respecto al modelo econométrico. Puede destacarse las Máquinas de Soporte Vectorial (Support Vector Machine), que por obtener resultados satisfactorios en muchas áreas de investigación. Este modelo fue propuesto por Vapnik en 1995, originalmente para problemas de clasificación y posteriormente

se extendió a problemas de regresión. Una de las diferencias fundamentales respecto la red backpropagation reside en el proceso de aprendizaje. Mientras que la red backpropagation utiliza la minimización del riesgo sobre el patrón de datos muestrales input-output, el modelo Support Vector Machine minimiza un vector que define la distancia en un hiperplano sujeto a una serie de restricciones.

Resumiendo, la red neuronal Backpropagation ha mostrado su capacidad de mejora, para los índices bursátiles estudiados, en la predicción de la volatilidad condicional respecto a los modelos econométricos clásicos, por lo que se convierten en una alternativa muy interesante para todos los agentes financieros en la gestión del riesgo de los activos financieros, así como la valoración de los mismos.

VIII. Bibliografía

8. Bibliografía

ABUGRI, B.A. (2008) Empirical relationship between macroeconomic volatility and stock returns: Evidence from Latin American markets. *International Review of Financial Analysis*, 17, pp 396-410

ACKLEY, D.; HINTON, G.; SEJNOWSKI, T. (1985) A learning Algorithm for Boltzmann Machines. *Cognitive Science*, 9, pp 147-169

ALONSO, F. (1995) La modelización de la volatilidad en el mercado bursátil español. Documento de trabajo nº 9507. Banco de España.

ALBERT, J.H; CHIB, S. (1993) Bayesian analysis of binary and polychotomous response data. *Journal of the American Statistical Association*, 88, pp 669-679

ARAGÓ MANZANA, V.; FERNÁNDEZ IZQUIERDO, M^a.A. (2004) Modelos GARCH Asimétricos y Volumen de Negociación: Aplicación para el Índice Ibex-35. *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, vol nº 121, pp 443-463

AYUSO, J. y OTROS (1995) Volatility in spanish financial markets: the recent experience. Documento de trabajo nº 9601. Banco de España.

BAJO,O.; FERNÁNDEZ, F.; MORA,A.; SOSVILLA, S. (1994) Un análisis comparado de volatilidad para los índices bursátiles de Madrid y Nueva York. *Revista de Economía Aplicada*, num 4, pp 177-186

BARTO, A.G.; SUTTON, R.; ANDERSON, C. (1983) Neuronlike elements that can solve difficult learning control problems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 13, pp 835-846

BARTO, A.G.; ANANDAN, P. (1985) Pattern recognizing stochastic learning automata. *IEEE Transactions on Systems,*

Man and Cybernetics, 15, pp 360-375

BECKETTI, S.; SELLO J. (1989) Has financial market volatility increased?. *Economic Review*. Junio 1989, pp 17-30

BERNANKE, B. (1983) Non-monetary effects of the financial crisis in the propagation of the Great Depression. *American Economic Review*, 73, num 3, pp 257-276

BINDER, J.J.; MERGES, M.J. (2001) Stock market volatility and economic factors. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 17, pp 5-26

BLACK, F; SCHOLES, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economic*, vol 81, pp 637-654

BOLLERSLEV, T. (1986) Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, vol 31, pp 307-327

BOLLERSLEV, T.; ENGLE R.F.; WOOLDRIGE, J.M. (1988) A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of Political Economy*, 96, pp 116-131

BOLLERSLEV, T.; CHOU, R.; KRONER, K. (1992) ARCH modelling in Finance: A selective review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics*, 52, pp 5-59

BOLLERSLEV, T.; ENGLE, R.; NELSON, D. (1994) ARCH models. *The Handbook of Econometrics*, 2, pp 2959-3038

BOLLERSLEV, T. (2008) Glossary to ARCH (GARCH). CREATES Research Paper, 2008-49

BOLLERSLEV, T.; OLE MIKKELSEN, H. (1996) Modeling and Pricing long memory in Stock Market Volatility. *Journal of Econometrics*, 73, pp 151-184

BONILLA, M.; OLMEDA, I. (2002) Redes Neuronales Artificiales: Predicción de la Volatiliad del Tipo de Cambio de la Peseta. Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas.

WP-EC 2002-08

BREUSCH, T (1978) Testing for autocorrelation in dynamic linear models. *Australian Economic Papers*, 17, pp 334-355

CAMPBELL, J.; HENTSCHEL, L. (1992) No news is good news: An asymmetric model of changing volatility in stock returns. *Journal of Financial Economics*, 31, num 3, pp 281-318

CARPENTER, G.; GROSSBERG, S. (1987) ART2: Self-organization of stable category recognition codes for analog input patterns. *Applied Optics*, 26, pp 4919-4930

CASAS, M.; CEPEDA, E. (2008) Modelos ARCH, GARCH y EGARCH: Aplicaciones a series financieras. *Cuadernos de Economía*, 48, pp 287-319. Bogotá.

CHEN, A-S. (1997) Forecasting the S&P 500 Index Volatility. *International Review of Economics and Finance*, 6, num 4, pp 391-404

COLLANTES, J.V. (2001) Predicción con redes neuronales: comparativa con las metodologías de Box-Jenkins. Instituto de Estadística Aplicada. Universidad de los Andes

DALY, K. (2008) Financial Volatility: Issues and Measuring Techniques. *Physica A*, 387, Issue 11, pp 2377-2393

DE ARCE, R.(1998) Introducción a los modelos Autorregresivos con Heterodasticidad Condicional (ARCH). I.L.Klein

DEO, M.; SRINIVASAN, K.; DEVANADHEN, K. (2008) The empirical relationship between Stock Returns, Trading Volume and Volatility. *European Journal of Economics*

DIEBOLD, F.X.; LOPEZ, J. (1995) Modelling volatility Dynamics. Kluwer Academic Press pp 427-472. Boston

DIEBOLD, F.X. (2004) Measuring and Forecasting Financial Market Volatilities and Correlations. Norton. New York

DIEBOLD, F.X.; YILMAZ, K. (2007) Macroeconomic volatility

and stock market volatility, world-wide. Working Paper: University Economic Research Forum, Istanbul.

DUTTA, S.; SHEKBAR, S. (1988) Bond rating: A non-conservative application of neural networks. IEEE International Conference on Neural Networks, USA, pp 443-450

EDWARDS, F.R (1988) Does futures trading increase stock market volatility?. Financial Analysts Journal, vol. 44, num 1, pp 63-69

ENGLE, R.F. (1982) Autorregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. Econometrica, vol 50, num 4, pp 987-1007

ENGLE, R.F.; GRANGER, C.W.J; KRAFT, D. (1984) Combining competing forecasts of inflation using bivariate arch model. Journal of economic dynamics and control, 8, pp 151-165

ENGLE, R.F.; LILIEN, D.M.; ROBINS, R.P. (1987) Estimating Time-Varying Risk Premia in the Term Structure: the ARCH-M Model. Econometrica, vol 55, num 2, pp 391-407

ENGLE, R.F.; RODRIGUES, A.P. (1989) Tests of international CAPM with time-varying covariances. Journal of Applied Econometrics, 4, pp 119-138

ENGLE, R.F.; GONZALEZ-RIVERA, G. (1991) Semiparametric ARCH models. Journal of Business & Economic Statistics, 9, pp 345-359

ENGLE, R.F.; NG, V.K. (1993) Measuring and testing the impact of news volatility. The Journal of Finance, vol. XLVIII, n° 5 Diciembre.

ENGLE, R.F.; KRONER, K.F. (1995) Multivariate Simultaneous Generalized ARCH. Econometric Theory, vol 11, Issue 1, pp 122-150

ERRUNZA, V.; HOGAN, K. (1998) Macroeconomic determinants of European stock market volatility. European Financial Management, 4, pp 361-377

FAMA, E.F.; FRENCH, K.R. (1989) Business conditions and expected returns on stocks and bonds. *Journal of Finance*, vol. 25, pp 23-49

FERREIRA, N.B; MENEZES, R.; MENDES, D.A. (2008) Asymmetric Conditional Volatility in International Stock Markets. *Physica A*, vol 382, Issue 1, pp 73-80

FRANCO, C.; ZAKOÏAN, J-M. (2004) Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes. *Bernoulli* 10, pp 605-637

FRENCH, K.R.; SCHWERT, G.W.; STAMBAUGH, R.F. (1987) Expected Stock Returns Volatility. *Journal of Financial Economics*, vol 19, Issue 1, pp 3-29

GALLANT, A.R.; TAUCHEN, R. (1997) The relative efficiency of EMM estimators. *Journal of Econometrics*, vol 92, Issue1, pp 149-172

GARCÍA ESTEVEZ, P. (2002) Aplicaciones de las Redes Neuronales en las Finanzas. Documento de trabajo 2002. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

GARCÍA MONTALVO, J. (1998) Volumen y Volatilidad en mercados financieros. *Revista Española de Financiación y Contabilidad* nº95, pp 367-393

GATELY, E. (1996) *Neural Networks for Financial Forecasting*. USA: Editorial John Wiley & Sons Inc.

GERTLER, M. (1988) Financial Structure and aggregate economic activity. *Journal of Money, Credit and Banking* 20

GEWEKE, J. (1986) Modeling the persistence of conditional variances. *Econometric Review*, 5, 57-61

GEWEKE, J. (1994) Bayesian comparison of econometric models. Working papers 532. Federal Reserve Bank of Minneapolis.

GHAHRAMANI, M.; THAVANESWARAN, A. (2008) A note on GARCH model Identification. An International Journal computers & Mathematics, pp 2469-2475

GLOSTEN, I; JAGANNATHAN, R.; RUNKLE (1989) Relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. Working papers. Department of finance. Columbia University.

GLOSTEN, I; JAGANNATHAN, R.; RUNKLE (1993) On the relation between the expected value and the volatility of nominal excess return on stocks. Journal of Finance, 48, pp 1779-1801

GODFREY, L. (1978) Testing against general autoregressive and moving average error models when the regressors include lagged dependent variables. Econometrica, 46, pp 1293-1302

GOURIEOUX, C. (1993) Arch models and financial applications. Editorial: Springer.

GRAUER, R.R.; HAKANSSON, N.H. (1987) Gains from international diversification 1968-1985 returns on portfolios of stocks and bonds. Journal of Finance, 42, Issue 3, pp 721-739

GRUDNITSKI, G.; OSBURN, L. (1993) Forecasting S&P and Gold Futures prices: An application of neural networks. Journal of futures markets 13, pp 631-643

GUTIERREZ, S.; VELAZQUEZ, J.; FRANCO, C. (2011) Pronóstico de la volatilidad usando perceptrones multicapa con funciones adaptativas de activación. Avances en Sistemas e Informática, vol.8, nº2.

GUZMÁN PLATA, M^a.P. (1998) Los modelos CAPM y ARCH-M. Economía Teoría y Práctica, nº 9.

HAMILTON, J.D.; LIN, G. (1996) Stock market volatility and the business cycle. Journal of Applied Econometrics, 11, pp 573-593

HANG, P; WANG, H. (2010) Predicting GARCH, EGARCH and GJR Based Volatility by the Relevance Vector Machine:

Evidence from the Hang Seng Index. *International Research Journal of Finance and Economics* nº 39

HAWLEY, D. (1990) Artificial neural systems. A new tool for financial decision-making. *Revista: Financial Analysts Journal*, pp 90-113

HEBB, D. (1949) *The Organization of Behavior: A neuropsychological Theory*. Editorial: Wiley

HENSCHHEL, L. (1995) All in the family Nesting symmetric and asymmetric GARCH models. *Journal of Financial Economics*, pp 71-104

HILERA, J.R; MARTÍNEZ, V.J. (1995) *Redes Neuronales Artificiales*. Madrid: Editorial Ra-ma

HOSSAIN, A; NASSER, M.; RAHMAN, M.A. (2010) Comparison of the finite mixture of ARMA-GARCH, Back Propagation neural networks and support-vector machines in forecasting financial returns. *Journal of Applied Statistics*, vol 38, pp 533-551

JOCHUM, C. (1999) Volatility spillovers and the price of risk: Evidence from Swiss stock market. *Empirical Economics*, pp 303-322

JONES, C.; WILSON, J. (1989) Is stock price volatility increasing?. *Financial Analysts Journal*, vol. 45, nº 6, pp 20-26

JORION, PH. (1997) *Value at Risk: The new benchmark for controlling derivatives risk*. Ed.McGraw-Hill.

KAMINSKY,G.; PERUGA, R. (1990) Can a time-varying risk premium explain excess returns in the forward market for foreign exchange?. *Journal of International Economics*, 28, pp 47-70

KARANASOS, M. (1999) *Prediction in ARMA models with GARCH in Mean Effects*. Editor: Universidad de York.

KEARNEY, C.; DALY, K. (1998) *The causes of stock market*

volatility in Australia. *Applied Financial Economics*, 8, pp 597-605

KHO, B-C. (1996) Time-varying risk premia, volatility, and technical trading rule profits: Evidence from foreign currency futures markets. *Journal of Financial Economics*, 41, Issue 2, pp 249-290

KOHONEN, T. (1988) *Self-Organization and associative memory*. Editorial: Springer-Verlag

KOSKO, B. (1987) Adaptive Bidirectional Associative Memories. *Applied Optics*, vol. 26, n° 23, pp 4947-4971

KOSKO, B. (1988) Bidirectional Associative Memories. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18 pp 49-60

KUPIEC, P. (1991) Stock market volatility in OECD countries: Recent trends. *Economic Studies*, n° 17, Autumn 1991

LAHMIRI, S. (2012) An EGARCH-BPNN system for estimating and predicting stock market volatility in Morocco and Saudi Arabia: The effect of trading volume. *Management Science Letters*, vol. 2, pp 1317-1324

LAMOTHE, P. (1993) *Opciones financieras: un enfoque fundamental*. Editor: McGraw-Hill

LEE, B-S.; RUI, O.M. (2002) The dynamic relationship between stock returns and trading volume. *Journal of Banking & Finance* n° 26, pp 51-78

LEUNG LAI, T.; XING, H. (2008) *Statistical Models and Methods for Financial Markets*. USA: Editorial Springer

LILJEBLOM, E.; STENIUS, M. (1997) Macroeconomic volatility and stock market volatility: Empirical evidence on Finnish data. *Applied Financial Economics*, 7, pp. 419-426

LING, S.; LI, W.K. (1997) On fractionally integrated autoregressive moving-average time series models with conditional heteroscedasticity. *American Statistic Association*,

92 ,pp 1184-1194

LING, S.; LI, W.K. (1998) Limiting distributions of maximum likelihood estimators for unstable ARMA models with GARCH errors. *Annuary statistical*, 26, pp 84-125

LING, S.; McAleer, M. (2003a) Asymptotic theory for a vector ARMA-GARCH model. *Economic Theory*, 19, pp 280-310

LING, S.; McAleer, M. (2003b) On adaptive estimation in nonstationary ARMA models with GARCH errors. *Annuary statistical*, 31, pp 642-674

LUNDBERGH, S.; TERÄSVIRTA, T. (2002) Evaluating GARCH models. *Journal of Econometrics*, vol 110, Issue 2, pp 417-435

MANDEBROLT, B. (1963) The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36, pp 394-419

MARTÍNEZ, J.; Bouza, C.; Allende, S.; Chen, D. (2005) Modelos paramétricos y no paramétricos, para la previsión de la volatilidad. Su aplicación al cálculo del valor en riesgo. XIII Jornadas de ASEPUMA, pp 1-14

MASCAREÑAS, J. (2008) Introducción al VaR. Monografías sobre finanzas cuantitativas. Universidad Complutense de Madrid

MERTON, R.C. (1973) Theory of rational option pricing. *Revista: Journal of Economics and Management Science*, vol 4, pp 141-183

MIHOJ, A. (1987) A multiplicative parameterization of ARCH models. Working Papers. Department of Statistics. University of Copenhagen.

MONTAÑO MORENO, J.J. (2002) Redes Neuronales Artificiales aplicadas al Análisis de Datos. Editorial Universidad de las Islas Baleares.

MUBARIK, F.; JAVID,A. (2009) Relationship between stock return, trading volume and volatility: evidence from pakistan

stock market. Asia Pacific Journal of Financial and Banking Research, vol 3, nº 3

NARENDRA, K.; THATHACHAR, M. (1974) Learning automata. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 4 pp 323-334

NATEMBERG, S. (1988) Option volatility and pricing strategies. Editorial: Hardcover

NELSON, D.B. (1990) Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. Econometrica, vol 59, num 2, pp 347-370

NEWKEY, W. y K. WEST. (1987) A Simple Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. Econometría, 55, pp 703-708

NIHAT, M.; DEMIR, N.; ORHAN, M. (2009) Are Macroeconomic variables important for the stock market volatility? Editorial: Chapman & Hall

NOVALES, A. (2011) Financial Econometrics. Dep. Economía Cuantitativa. Universidad Complutense de Madrid.

OLMEDA, I.; OTROS. (1996) Avances Recientes en Predicción Bursátil. Madrid: Ediciones de la Universidad de Alcalá.

PAGAN, A. (1996) The econometrics of financial markets. Journal of Empirical Finance, pp 15-102

PANTULA, S.G. (1986) Modeling the persistence of conditional variance. Econometric Review, 5, pp 71-74

PEIRÓ, A. (1992) La volatilidad del mercado de acciones español. Valencia: Instituto Valenciano Investigaciones Económicas. WP-EC 92-12

PELLEGRINI, S.; RUIZ, E.; ESPASA, A. (2007) The relationship between ARIMA-GARCH and unobserved component models with GARCH disturbances. Working paper: statistic and econometric series 06. April 2007. Universidad

Carlos III Madrid

PÉREZ LÓPEZ, C. (2008) *Econometría avanzada. Técnicas y herramientas*. Madrid: Editorial Pearson Prentice Hall

PÉREZ RAMÍREZ, F.O. (2006) *Modelización de la volatilidad y pronóstico del precio del café*. Ingeniería de Universidad de Medellín, 5 , pp 45-58

PIERDZIOCH, C.; DÖPKE, J.; HARTMANN, D. (2008) Forecasting stock market volatility with macroeconomics variables in real time. *Journal of Economics and Business*, 60, pp 256-276

RABEMANANJARA, R.; ZAKOIAN, J. (1992) Threshold arch models and asymmetries in volatility. *Journal of Applied Econometrics*, vol. 8, pp 31-48

RICH, R.W.; RAYMOND, J.; BUTLER, J.S. (1991) Generalized instrumental variables estimation of autoregressive conditional heteroskedastic models. *Economic Letters*, vol.35, Issue 2, pp 179-185

RIPLEY, D.B. (1993) *Statistical aspects of neural networks, networks and chaos: statistical and probabilistic aspects*. Editor: Barndorff-Nielsen. Reino Unido

RODRÍGUEZ, R.; RESTOY, F.; PENA, J. (2002) Can output explain the predictability and volatility of stock returns. *Journal of International Money and Finance*, 21 , pp 163-182

ROSENBLATT, F. (1958) The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain. In *Psychological Review*, 65, pp 386-408

RUMELHART, D.E.; HINTON, G.E.; WILLIAMS, R.J. (1986) Learning representations by back-propagating errors. *Letters to Nature*, nº 323, pp 533-536

SAID, S.; DICKEY, D.A. (1984) Testing for Unit Roots in Autorregresive-Moving Average Models with Unknown Order. *Biometrika*, 71, pp 599-607

SCHEPPER, A.D.; GOOVAERTS, M.J. (1999) The GARCH(1,1)-M model: results of densities of the variance and the mean. Insurance Mathematics & Economics, vol 4, Issue, pp 83-94

SCHWERT, G.W. (1989) Why does stock market volatility change over time?. Journal of Finance, vol 44, Issue 5, pp 1115-1153

SCHWERT, G.W. (1990) Stock volatility and the crash of 87. Review of financial studies, 3, pp 77-102

SCHWERT, G.W. (2011) Stock volatility during the recent financial crisis. National Bureau of Economic Research. Cambridge. April 2011

SENDRA, I; BERNARDO, J. (2004) Predicción de la volatilidad de los rendimientos del índice general de la bolsa de Madrid: el papel de las asimetrías. PIUAH 2004/012 Universidad de Alcalá

SHILLER, R.J. (1989) Market Volatility. The MIT press. Cambridge.

SOLNIK, B.H. (1974) Why not diversify internationally rather than domestically?. Financial Analysts Journal, vol 30, num 4, pp 48-54

STEIGERWALD, D.G. (1992) Adaptive estimation in time series regression models. Journal of Econometrics, vol 54, Issues 1-3, pp 251-275.

SUN, W. (2007) Quantitative methods in high-frequency financial econometrics: Modeling univariate and multivariate time series. Universidad de Karlsruhe.

SUN, W.; RACHEZ, S.; CHEN, Y.; FABOZZI, F. (2010) Monitoring intra-daily market risk: a new development of value at risk method. Enterprise risk management symposium. Chicago.

SZU, H. (1986) Fast simulated annealing. Neural Networks for Computing. AIP Conference Proceedings, 151 pp 420-425.

American Institute of Physics

TAM, K.; KIANG, M. (1992) Predicting bank failures: A neural network approach. *Management Science*, vol 38, nº7, pp 926-947

TANCO, F. (2003) *Introducción a las Redes Neuronales Artificiales*. Editorial Universidad Tecnológica Nacional de Buenos Aires.

TREBAOL, A. (2010) High frequency time series forecasting with an application to stock market prediction. Facultad de Ingeniería de Sistemas. Universidad de Milan.

TRIPPI, R. (1990) Intelligent systems for investment decision making. *Managing Institutional Assets*, USA Fabocci, p 251

URIEL JIMENEZ, E.; PEIRÓ GIMENEZ, A. (2000) *Introducción al análisis de series temporales*. Madrid: Editorial AC

URIEL, E.; CONTRERAS, D.; MOLTÓ, M^a.L.; PEIRÓ, A. (1990) *Econometría*. Madrid: Editorial AC

WHITE, H. (1988) Economic prediction using neural networks: The case of IBM daily stock returns. *IEEE International Conference on Neural Networks*, USA, pp 451-459

WIDROW, B.; HOFF, M. (1960) Adaptive switching circuits. *Western Electronic Show and Convention*, 4, pp 96-104. Institute of Radio Engineers

YIM, J. (2002) A comparison of neural networks with time series models for forecasting returns on a stock market. Working Paper: nº7. RMIT Business.

ZAKOIAN, J. (1990) Threshold heteroskedasticity model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol 18, Issue 5, pp 931-955

IX. Anexos

9. Anexos

9.1. Anexo 1 Dax

Figura A1.1 Rentabilidad diaria del índice Dax con datos diarios

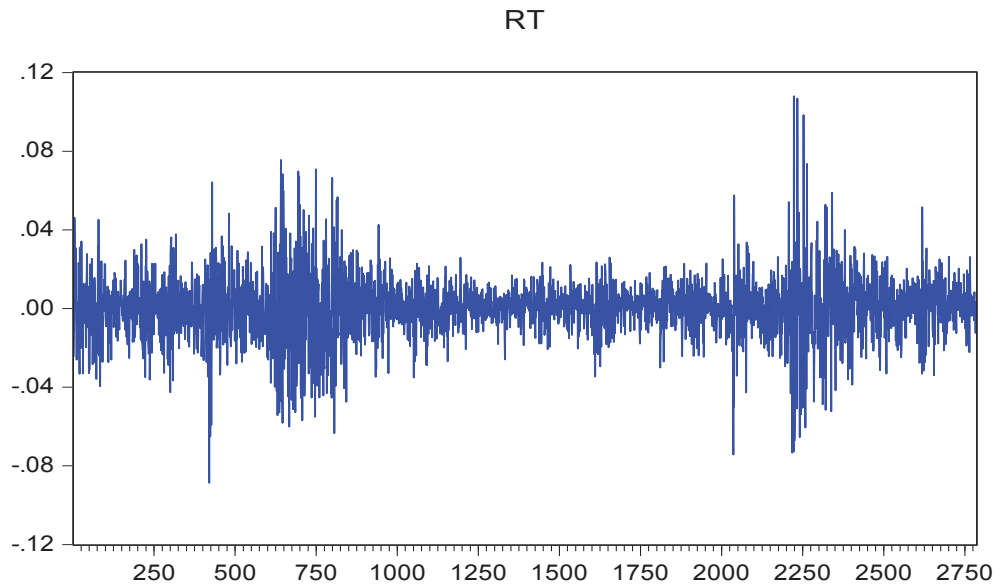


Figura A1.2 Histograma de los rendimientos del índice Dax con datos diarios

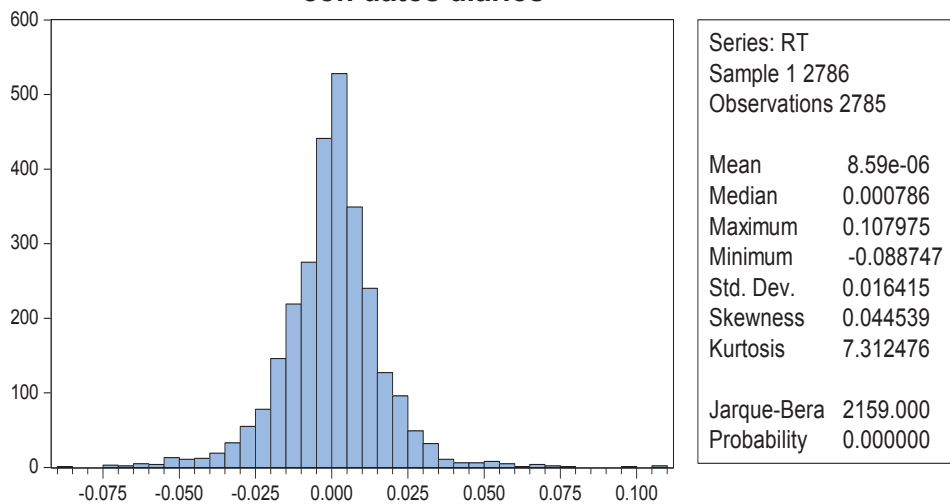


Figura A1.3 Función autocorrelación y autocorrelación parcial de los rendimientos del índice Dax con datos diarios

Date: 07/18/11 Time: 13:25
 Sample: 1 2786
 Included observations: 2785

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.038	-0.038	4.0936	0.043
		2	-0.020	-0.021	5.1977	0.074
		3	-0.025	-0.027	6.9944	0.072
		4	0.050	0.047	13.850	0.008
		5	-0.057	-0.055	22.957	0.000
		6	-0.015	-0.018	23.566	0.001
		7	-0.007	-0.008	23.707	0.001
		8	0.045	0.039	29.341	0.000
		9	-0.015	-0.008	29.978	0.000
		10	-0.024	-0.026	31.655	0.000
		11	0.026	0.024	33.484	0.000
		12	0.019	0.014	34.479	0.001
		13	-0.002	0.004	34.492	0.001
		14	0.001	0.005	34.493	0.002
		15	-0.028	-0.032	36.694	0.001
		16	0.015	0.012	37.356	0.002
		17	0.017	0.021	38.191	0.002
		18	-0.032	-0.030	41.139	0.001
		19	-0.038	-0.039	45.220	0.001
		20	0.009	-0.000	45.431	0.001
		21	-0.005	-0.007	45.490	0.001
		22	0.024	0.027	47.145	0.001
		23	-0.004	-0.000	47.191	0.002
		24	0.027	0.021	49.266	0.002
		25	0.024	0.024	50.945	0.002
		26	-0.000	0.004	50.945	0.002
		27	-0.044	-0.035	56.292	0.001
		28	-0.010	-0.017	56.548	0.001
		29	0.057	0.056	65.626	0.000
		30	0.055	0.062	74.297	0.000
		31	-0.026	-0.014	76.202	0.000
		32	0.046	0.047	82.125	0.000
		33	-0.020	-0.027	83.233	0.000
		34	-0.037	-0.039	87.096	0.000
		35	-0.049	-0.037	93.932	0.000
		36	0.062	0.052	104.87	0.000

Figura A1.4 Test de raíces unitarias DFA sin constante ni tendencia del índice Dax con datos diarios

Null Hypothesis: RT has a unit root
 Exogenous: None
 Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=27)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-54.83329	0.0001
Test critical values:		
1% level	-2.565793	
5% level	-1.940938	
10% level	-1.616623	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(RT)
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 13:26
 Sample (adjusted): 3 2786
 Included observations: 2784 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RT(-1)	-1.038325	0.018936	-54.83329	0.0000
R-squared	0.519318	Mean dependent var		4.63E-06
Adjusted R-squared	0.519318	S.D. dependent var		0.023653
S.E. of regression	0.016399	Akaike info criterion		-5.382838
Sum squared resid	0.748421	Schwarz criterion		-5.380708
Log likelihood	7493.911	Hannan-Quinn criter.		-5.382069
Durbin-Watson stat	2.002117			

Figura A1.5 Test de raíces unitarias DFA con constante del índice Dax con datos diarios

Null Hypothesis: RT has a unit root
 Exogenous: Constant
 Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=27)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-54.82350	0.0001
Test critical values:		
1% level	-3.432507	
5% level	-2.862379	
10% level	-2.567261	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(RT)
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 13:27
 Sample (adjusted): 3 2786
 Included observations: 2784 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RT(-1)	-1.038325	0.018939	-54.82350	0.0000
C	1.79E-05	0.000311	0.057602	0.9541
R-squared	0.519318	Mean dependent var		4.63E-06
Adjusted R-squared	0.519146	S.D. dependent var		0.023653
S.E. of regression	0.016402	Akaike info criterion		-5.382121
Sum squared resid	0.748420	Schwarz criterion		-5.377860
Log likelihood	7493.913	Hannan-Quinn criter.		-5.380583
F-statistic	3005.616	Durbin-Watson stat		2.002118
Prob(F-statistic)	0.000000			

Figura A1.6 Test de raíces unitarias DFA con constante y tendencia del índice Dax con datos diarios

Null Hypothesis: RT has a unit root
 Exogenous: Constant, Linear Trend
 Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=27)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-54.83564	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.961339	
5% level	-3.411421	
10% level	-3.127563	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(RT)
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 13:27
 Sample (adjusted): 3 2786
 Included observations: 2784 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RT(-1)	-1.038754	0.018943	-54.83564	0.0000
C	-0.000563	0.000622	-0.905004	0.3655
@TREND(1)	4.17E-07	3.87E-07	1.077888	0.2812
R-squared	0.519519	Mean dependent var		4.63E-06
Adjusted R-squared	0.519174	S.D. dependent var		0.023653
S.E. of regression	0.016401	Akaike info criterion		-5.381821
Sum squared resid	0.748107	Schwarz criterion		-5.375429
Log likelihood	7494.494	Hannan-Quinn criter.		-5.379513
F-statistic	1503.476	Durbin-Watson stat		2.002116
Prob(F-statistic)	0.000000			

Figura A1.7 Test de raíces unitarias Phillips-Perron sin constante ni tendencia del índice Dax con datos diarios

Null Hypothesis: RT has a unit root
 Exogenous: None
 Bandwidth: 1 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-54.83466	0.0001
Test critical values:		
1% level	-2.565793	
5% level	-1.940938	
10% level	-1.616623	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.000269
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.000268

Phillips-Perron Test Equation
 Dependent Variable: D(RT)
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 13:28
 Sample (adjusted): 3 2786
 Included observations: 2784 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RT(-1)	-1.038325	0.018936	-54.83329	0.0000
R-squared	0.519318	Mean dependent var		4.63E-06
Adjusted R-squared	0.519318	S.D. dependent var		0.023653
S.E. of regression	0.016399	Akaike info criterion		-5.382838
Sum squared resid	0.748421	Schwarz criterion		-5.380708
Log likelihood	7493.911	Hannan-Quinn criter.		-5.382069
Durbin-Watson stat	2.002117			

Figura A1.8 Test de raíces unitarias Phillips-Perron con constante del índice Dax con datos diarios

Null Hypothesis: RT has a unit root
 Exogenous: Constant
 Bandwidth: 1 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-54.82486	0.0001
Test critical values:		
1% level	-3.432507	
5% level	-2.862379	
10% level	-2.567261	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.000269
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.000268

Phillips-Perron Test Equation
 Dependent Variable: D(RT)
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 13:28
 Sample (adjusted): 3 2786
 Included observations: 2784 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RT(-1)	-1.038325	0.018939	-54.82350	0.0000
C	1.79E-05	0.000311	0.057602	0.9541
R-squared	0.519318	Mean dependent var		4.63E-06
Adjusted R-squared	0.519146	S.D. dependent var		0.023653
S.E. of regression	0.016402	Akaike info criterion		-5.382121
Sum squared resid	0.748420	Schwarz criterion		-5.377860
Log likelihood	7493.913	Hannan-Quinn criter.		-5.380583
F-statistic	3005.616	Durbin-Watson stat		2.002118
Prob(F-statistic)	0.000000			

Figura A1.9 Test de raíces unitarias Phillips-Perron con constante y tendencia del índice Dax con datos diarios

Null Hypothesis: RT has a unit root
 Exogenous: Constant, Linear Trend
 Bandwidth: 0 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-54.83564	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.961339	
5% level	-3.411421	
10% level	-3.127563	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.000269
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.000269

Phillips-Perron Test Equation
 Dependent Variable: D(RT)
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 13:29
 Sample (adjusted): 3 2786
 Included observations: 2784 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RT(-1)	-1.038754	0.018943	-54.83564	0.0000
C	-0.000563	0.000622	-0.905004	0.3655
@TREND(1)	4.17E-07	3.87E-07	1.077888	0.2812
R-squared	0.519519	Mean dependent var		4.63E-06
Adjusted R-squared	0.519174	S.D. dependent var		0.023653
S.E. of regression	0.016401	Akaike info criterion		-5.381821
Sum squared resid	0.748107	Schwarz criterion		-5.375429
Log likelihood	7494.494	Hannan-Quinn criter.		-5.379513
F-statistic	1503.476	Durbin-Watson stat		2.002116
Prob(F-statistic)	0.000000			

Figura A1.10 Test D-W con un retardo del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 13:30
 Sample (adjusted): 3 2786
 Included observations: 2784 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.79E-05	0.000311	0.057602	0.9541
RT(-1)	-0.038325	0.018939	-2.023578	0.0431
R-squared	0.001470	Mean dependent var		1.74E-05
Adjusted R-squared	0.001111	S.D. dependent var		0.016411
S.E. of regression	0.016402	Akaike info criterion		-5.382121
Sum squared resid	0.748420	Schwarz criterion		-5.377860
Log likelihood	7493.913	Hannan-Quinn criter.		-5.380583
F-statistic	4.094867	Durbin-Watson stat		2.002118
Prob(F-statistic)	0.043109			

Figura A1.11 Test B-G con un retardo del índice Dax con datos diarios

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	1.003948	Prob. F(2,2780)	0.3666
Obs*R-squared	2.009334	Prob. Chi-Square(2)	0.3662

Test Equation:

Dependent Variable: RESID

Method: Least Squares

Date: 07/18/11 Time: 13:30

Sample: 3 2786

Included observations: 2784

Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-4.38E-06	0.000311	-0.014103	0.9887
RT(-1)	0.509638	0.665966	0.765262	0.4442
RESID(-1)	-0.510919	0.666203	-0.766913	0.4432
RESID(-2)	-0.003045	0.031796	-0.095755	0.9237
R-squared	0.000722	Mean dependent var		1.22E-18
Adjusted R-squared	-0.000357	S.D. dependent var		0.016399
S.E. of regression	0.016402	Akaike info criterion		-5.381407
Sum squared resid	0.747880	Schwarz criterion		-5.372884
Log likelihood	7494.918	Hannan-Quinn criter.		-5.378329
F-statistic	0.669299	Durbin-Watson stat		2.001191
Prob(F-statistic)	0.570845			

Figura A1.12 Test D-W con dos retardo del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT

Method: Least Squares

Date: 07/18/11 Time: 13:30

Sample (adjusted): 4 2786

Included observations: 2783 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.32E-05	0.000311	0.074577	0.9406
RT(-1)	-0.039603	0.018961	-2.088646	0.0368
RT(-2)	-0.021417	0.018953	-1.129953	0.2586
R-squared	0.001963	Mean dependent var		2.21E-05
Adjusted R-squared	0.001245	S.D. dependent var		0.016412
S.E. of regression	0.016402	Akaike info criterion		-5.381762
Sum squared resid	0.747882	Schwarz criterion		-5.375368
Log likelihood	7491.721	Hannan-Quinn criter.		-5.379453
F-statistic	2.733259	Durbin-Watson stat		2.001139
Prob(F-statistic)	0.065182			

Figura A1.13 Test B-G con dos retardos del índice Dax con datos diarios

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	7.528094	Prob. F(2,2778)	0.0005
Obs*R-squared	15.00198	Prob. Chi-Square(2)	0.0006

Test Equation:

Dependent Variable: RESID

Method: Least Squares

Date: 07/18/11 Time: 13:31

Sample: 4 2786

Included observations: 2783

Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-7.69E-05	0.000311	-0.247358	0.8046
RT(-1)	5.515154	1.439971	3.830044	0.0001
RT(-2)	-2.353292	0.656727	-3.583362	0.0003
RESID(-1)	-5.514078	1.439676	-3.830082	0.0001
RESID(-2)	2.572349	0.706115	3.642961	0.0003

R-squared	0.005391	Mean dependent var	-1.41E-18
Adjusted R-squared	0.003958	S.D. dependent var	0.016396
S.E. of regression	0.016364	Akaike info criterion	-5.385729
Sum squared resid	0.743851	Schwarz criterion	-5.375073
Log likelihood	7499.243	Hannan-Quinn criter.	-5.381882
F-statistic	3.764047	Durbin-Watson stat	1.995443
Prob(F-statistic)	0.004658		

Figura A1.14 Test D-W con tres retardos del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT

Method: Least Squares

Date: 07/18/11 Time: 13:31

Sample (adjusted): 5 2786

Included observations: 2782 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.54E-05	0.000311	0.081772	0.9348
RT(-1)	-0.040280	0.018967	-2.123674	0.0338
RT(-2)	-0.022651	0.018975	-1.193704	0.2327
RT(-3)	-0.027050	0.018957	-1.426913	0.1537

R-squared	0.002707	Mean dependent var	2.36E-05
Adjusted R-squared	0.001630	S.D. dependent var	0.016415
S.E. of regression	0.016401	Akaike info criterion	-5.381452
Sum squared resid	0.747307	Schwarz criterion	-5.372925
Log likelihood	7489.600	Hannan-Quinn criter.	-5.378373
F-statistic	2.513190	Durbin-Watson stat	1.993905
Prob(F-statistic)	0.056775		

Figura A1.15 Test B-G con tres retardos del índice Dax con datos diarios

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	5.882991	Prob. F(2,2776)	0.0028
Obs*R-squared	11.74165	Prob. Chi-Square(2)	0.0028

Test Equation:

Dependent Variable: RESID

Method: Least Squares

Date: 07/18/11 Time: 13:31

Sample: 5 2786

Included observations: 2782

Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	5.05E-05	0.000311	0.162523	0.8709
RT(-1)	-2.963914	0.882634	-3.358032	0.0008
RT(-2)	0.892449	0.613361	1.455015	0.1458
RT(-3)	-0.024773	0.026908	-0.920663	0.3573
RESID(-1)	2.967136	0.883484	3.358450	0.0008
RESID(-2)	-1.011341	0.635577	-1.591218	0.1117

R-squared	0.004221	Mean dependent var	1.02E-18
Adjusted R-squared	0.002427	S.D. dependent var	0.016393
S.E. of regression	0.016373	Akaike info criterion	-5.384244
Sum squared resid	0.744153	Schwarz criterion	-5.371452
Log likelihood	7495.483	Hannan-Quinn criter.	-5.379625
F-statistic	2.353196	Durbin-Watson stat	1.995067
Prob(F-statistic)	0.038417		

Figura A1.16 Test D-W con cuatro retardos del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT

Method: Least Squares

Date: 07/18/11 Time: 13:32

Sample (adjusted): 6 2786

Included observations: 2781 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	8.32E-06	0.000310	0.026802	0.9786
RT(-1)	-0.038675	0.018934	-2.042545	0.0412
RT(-2)	-0.020737	0.018943	-1.094743	0.2737
RT(-3)	-0.023656	0.018940	-1.248997	0.2118
RT(-4)	0.047274	0.018926	2.497826	0.0126

R-squared	0.004816	Mean dependent var	7.00E-06
Adjusted R-squared	0.003382	S.D. dependent var	0.016394
S.E. of regression	0.016367	Akaike info criterion	-5.385338
Sum squared resid	0.743605	Schwarz criterion	-5.374676
Log likelihood	7493.313	Hannan-Quinn criter.	-5.381488
F-statistic	3.358696	Durbin-Watson stat	1.996426
Prob(F-statistic)	0.009448		

Figura A1.17 Test B-G con cuatro retardos del índice Dax con datos diarios

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	0.616356	Prob. F(2,2774)	0.5400
Obs*R-squared	1.235274	Prob. Chi-Square(2)	0.5392

Test Equation:

Dependent Variable: RESID

Method: Least Squares

Date: 07/18/11 Time: 13:32

Sample: 6 2786

Included observations: 2781

Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	5.82E-06	0.000311	0.018751	0.9850
RT(-1)	-0.276269	0.281949	-0.979855	0.3272
RT(-2)	0.041087	0.265895	0.154525	0.8772
RT(-3)	-0.004190	0.023374	-0.179250	0.8578
RT(-4)	-0.006355	0.021753	-0.292155	0.7702
RESID(-1)	0.277804	0.282472	0.983476	0.3255
RESID(-2)	-0.052516	0.263107	-0.199600	0.8418

R-squared	0.000444	Mean dependent var	1.03E-18
Adjusted R-squared	-0.001718	S.D. dependent var	0.016355
S.E. of regression	0.016369	Akaike info criterion	-5.384344
Sum squared resid	0.743275	Schwarz criterion	-5.369417
Log likelihood	7493.931	Hannan-Quinn criter.	-5.378954
F-statistic	0.205452	Durbin-Watson stat	1.999024
Prob(F-statistic)	0.975207		

Figura A1.18 Test D-W con cinco retardos del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT

Method: Least Squares

Date: 07/18/11 Time: 13:33

Sample (adjusted): 7 2786

Included observations: 2780 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.58E-06	0.000310	0.008314	0.9934
RT(-1)	-0.037216	0.018955	-1.963361	0.0497
RT(-2)	-0.022036	0.018923	-1.164521	0.2443
RT(-3)	-0.024497	0.018921	-1.294724	0.1955
RT(-4)	0.045771	0.018921	2.419006	0.0156
RT(-5)	-0.054589	0.018921	-2.885036	0.0039

R-squared	0.007916	Mean dependent var	1.20E-06
Adjusted R-squared	0.006127	S.D. dependent var	0.016395
S.E. of regression	0.016344	Akaike info criterion	-5.387725
Sum squared resid	0.741031	Schwarz criterion	-5.374926
Log likelihood	7494.938	Hannan-Quinn criter.	-5.383104
F-statistic	4.426572	Durbin-Watson stat	2.001930
Prob(F-statistic)	0.000511		

Figura A1.19 Test B-G con cinco retardos del índice Dax con datos diarios

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	0.499339	Prob. F(2,2772)	0.6070
Obs*R-squared	1.001199	Prob. Chi-Square(2)	0.6062

Test Equation:

Dependent Variable: RESID

Method: Least Squares

Date: 07/18/11 Time: 13:33

Sample: 7 2786

Included observations: 2780

Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-4.32E-06	0.000310	-0.013916	0.9889
RT(-1)	0.333875	0.334668	0.997631	0.3185
RT(-2)	0.073572	0.218118	0.337303	0.7359
RT(-3)	0.009367	0.022634	0.413850	0.6790
RT(-4)	0.009272	0.021557	0.430119	0.6671
RT(-5)	-0.014143	0.024323	-0.581451	0.5610
RESID(-1)	-0.335011	0.335268	-0.999232	0.3178
RESID(-2)	-0.061173	0.215250	-0.284195	0.7763
R-squared	0.000360	Mean dependent var	-4.22E-19	
Adjusted R-squared	-0.002164	S.D. dependent var	0.016330	
S.E. of regression	0.016347	Akaike info criterion	-5.386647	
Sum squared resid	0.740764	Schwarz criterion	-5.369581	
Log likelihood	7495.439	Hannan-Quinn criter.	-5.380485	
F-statistic	0.142668	Durbin-Watson stat	1.999901	
Prob(F-statistic)	0.994838			

Figura A1.20 Estimación modelo AR(1) del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT

Method: Least Squares

Date: 07/18/11 Time: 13:34

Sample (adjusted): 3 2786

Included observations: 2784 after adjustments

Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.72E-05	0.000299	0.057602	0.9541
AR(1)	-0.038325	0.018939	-2.023578	0.0431
R-squared	0.001470	Mean dependent var	1.74E-05	
Adjusted R-squared	0.001111	S.D. dependent var	0.016411	
S.E. of regression	0.016402	Akaike info criterion	-5.382121	
Sum squared resid	0.748420	Schwarz criterion	-5.377860	
Log likelihood	7493.913	Hannan-Quinn criter.	-5.380583	
F-statistic	4.094867	Durbin-Watson stat	2.002118	
Prob(F-statistic)	0.043109			
Inverted AR Roots	-.04			

Figura A1.21 Estimación modelo AR(2) del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 13:34
 Sample (adjusted): 4 2786
 Included observations: 2783 after adjustments
 Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.19E-05	0.000293	0.074577	0.9406
AR(1)	-0.039603	0.018961	-2.088646	0.0368
AR(2)	-0.021417	0.018953	-1.129953	0.2586
R-squared	0.001963	Mean dependent var		2.21E-05
Adjusted R-squared	0.001245	S.D. dependent var		0.016412
S.E. of regression	0.016402	Akaike info criterion		-5.381762
Sum squared resid	0.747882	Schwarz criterion		-5.375368
Log likelihood	7491.721	Hannan-Quinn criter.		-5.379453
F-statistic	2.733259	Durbin-Watson stat		2.001139
Prob(F-statistic)	0.065182			
Inverted AR Roots	-.02+.14i	-.02-.14i		

Figura A1.22 Estimación modelo MA(1) del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 13:35
 Sample (adjusted): 2 2786
 Included observations: 2785 after adjustments
 Convergence achieved after 5 iterations
 MA Backcast: 1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	9.13E-06	0.000298	0.030605	0.9756
MA(1)	-0.040165	0.018942	-2.120397	0.0341
R-squared	0.001538	Mean dependent var		8.59E-06
Adjusted R-squared	0.001179	S.D. dependent var		0.016415
S.E. of regression	0.016405	Akaike info criterion		-5.381743
Sum squared resid	0.748972	Schwarz criterion		-5.377483
Log likelihood	7496.078	Hannan-Quinn criter.		-5.380205
F-statistic	4.285713	Durbin-Watson stat		1.997135
Prob(F-statistic)	0.038526			
Inverted MA Roots	.04			

Figura A1.23 Estimación modelo MA(2) del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 13:35
 Sample (adjusted): 2 2786
 Included observations: 2785 after adjustments
 Convergence achieved after 6 iterations
 MA Backcast: 0 1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	9.48E-06	0.000292	0.032456	0.9741
MA(1)	-0.040262	0.018957	-2.123797	0.0338
MA(2)	-0.020133	0.018957	-1.062017	0.2883
R-squared	0.001975	Mean dependent var		8.59E-06
Adjusted R-squared	0.001258	S.D. dependent var		0.016415
S.E. of regression	0.016404	Akaike info criterion		-5.381464
Sum squared resid	0.748644	Schwarz criterion		-5.375074
Log likelihood	7496.688	Hannan-Quinn criter.		-5.379156
F-statistic	2.752995	Durbin-Watson stat		1.997880
Prob(F-statistic)	0.063910			
Inverted MA Roots	.16	-.12		

Figura A1.24 Estimación modelo ARIMA(1,1) del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 13:36
 Sample (adjusted): 3 2786
 Included observations: 2784 after adjustments
 Convergence achieved after 29 iterations
 MA Backcast: 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.16E-05	0.000291	0.074145	0.9409
AR(1)	0.332783	0.329001	1.011497	0.3119
MA(1)	-0.375862	0.323434	-1.162099	0.2453
R-squared	0.002128	Mean dependent var		1.74E-05
Adjusted R-squared	0.001410	S.D. dependent var		0.016411
S.E. of regression	0.016399	Akaike info criterion		-5.382062
Sum squared resid	0.747926	Schwarz criterion		-5.375671
Log likelihood	7494.831	Hannan-Quinn criter.		-5.379754
F-statistic	2.965332	Durbin-Watson stat		1.993181
Prob(F-statistic)	0.051706			
Inverted AR Roots	.33			
Inverted MA Roots	.38			

Figura A1.25 Estimación modelo ARIMA(2,2) del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 13:36
 Sample (adjusted): 4 2786
 Included observations: 2783 after adjustments
 Convergence achieved after 22 iterations
 MA Backcast: 2 3

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.65E-05	0.000301	0.054912	0.9562
AR(1)	0.124979	0.043950	2.843638	0.0045
AR(2)	-0.887796	0.041715	-21.28221	0.0000
MA(1)	-0.155492	0.047688	-3.260606	0.0011
MA(2)	0.868059	0.045639	19.02026	0.0000
R-squared	0.011188	Mean dependent var		2.21E-05
Adjusted R-squared	0.009764	S.D. dependent var		0.016412
S.E. of regression	0.016332	Akaike info criterion		-5.389611
Sum squared resid	0.740969	Schwarz criterion		-5.378954
Log likelihood	7504.643	Hannan-Quinn criter.		-5.385763
F-statistic	7.857790	Durbin-Watson stat		2.019610
Prob(F-statistic)	0.000003			
Inverted AR Roots	.06+.94i	.06-.94i		
Inverted MA Roots	.08+.93i	.08-.93i		

Figura A1.26 Estimación modelo ARIMA(1,2) del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 13:37
 Sample (adjusted): 3 2786
 Included observations: 2784 after adjustments
 Convergence achieved after 18 iterations
 MA Backcast: 1 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.09E-05	0.000289	0.072125	0.9425
AR(1)	0.240851	0.494044	0.487509	0.6259
MA(1)	-0.280924	0.494253	-0.568380	0.5698
MA(2)	-0.012518	0.029822	-0.419776	0.6747
R-squared	0.002241	Mean dependent var		1.74E-05
Adjusted R-squared	0.001164	S.D. dependent var		0.016411
S.E. of regression	0.016401	Akaike info criterion		-5.381457
Sum squared resid	0.747842	Schwarz criterion		-5.372934
Log likelihood	7494.988	Hannan-Quinn criter.		-5.378380
F-statistic	2.080963	Durbin-Watson stat		1.999498
Prob(F-statistic)	0.100632			
Inverted AR Roots	.24			
Inverted MA Roots	.32	-.04		

Figura A1.27 Estimación modelo ARIMA(2,1) del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 13:37
 Sample (adjusted): 4 2786
 Included observations: 2783 after adjustments
 Convergence achieved after 11 iterations
 MA Backcast: 3

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.23E-05	0.000291	0.076657	0.9389
AR(1)	0.151696	0.671419	0.225933	0.8213
AR(2)	-0.017002	0.034681	-0.490222	0.6240
MA(1)	-0.191527	0.671506	-0.285221	0.7755

R-squared	0.002084	Mean dependent var	2.21E-05
Adjusted R-squared	0.001007	S.D. dependent var	0.016412
S.E. of regression	0.016404	Akaike info criterion	-5.381165
Sum squared resid	0.747791	Schwarz criterion	-5.372640
Log likelihood	7491.891	Hannan-Quinn criter.	-5.378087
F-statistic	1.934645	Durbin-Watson stat	2.000202
Prob(F-statistic)	0.121813		

Inverted AR Roots	.08-.11i	.08+.11i
Inverted MA Roots	.19	

Figura A1.28 Histograma del modelo ARIMA(2,2) seleccionado del índice Dax con datos diarios

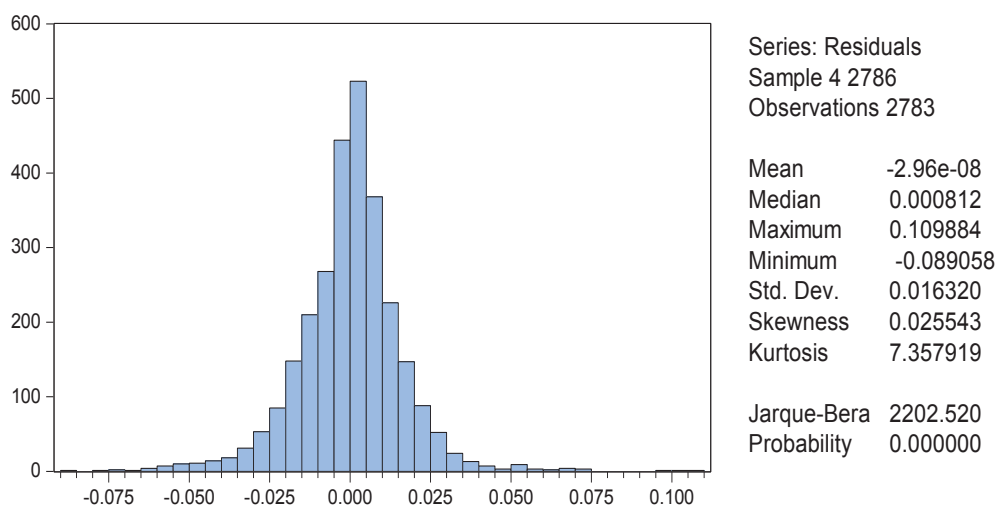


Figura A1.29 Test B-G del modelo estimado ARIMA(2,2) del índice Dax con datos diarios

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	0.538396	Prob. F(2,2776)	0.5837
Obs*R-squared	1.079089	Prob. Chi-Square(2)	0.5830

Test Equation:
 Dependent Variable: RESID
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 13:40
 Sample: 4 2786
 Included observations: 2783
 Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.65E-07	0.000301	0.000549	0.9996
AR(1)	-0.015962	0.046667	-0.342036	0.7323
AR(2)	-0.001979	0.044991	-0.043989	0.9649
MA(1)	0.020544	0.051754	0.396963	0.6914
MA(2)	-0.005221	0.050543	-0.103303	0.9177
RESID(-1)	-0.014346	0.023515	-0.610070	0.5419
RESID(-2)	0.018874	0.023307	0.809825	0.4181
R-squared	0.000388	Mean dependent var	-2.96E-08	
Adjusted R-squared	-0.001773	S.D. dependent var	0.016320	
S.E. of regression	0.016335	Akaike info criterion	-5.388561	
Sum squared resid	0.740682	Schwarz criterion	-5.373642	
Log likelihood	7505.183	Hannan-Quinn criter.	-5.383174	
F-statistic	0.179465	Durbin-Watson stat	1.998121	
Prob(F-statistic)	0.982509			

Figura A1.30 Test ARCH del modelo estimado ARIMA(2,2) del índice Dax con datos diarios

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	102.1395	Prob. F(5,2772)	0.0000
Obs*R-squared	432.1804	Prob. Chi-Square(5)	0.0000

Test Equation:
 Dependent Variable: RESID^2
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 13:40
 Sample (adjusted): 9 2786
 Included observations: 2778 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000100	1.39E-05	7.178008	0.0000
RESID^2(-1)	0.044116	0.018802	2.346354	0.0190
RESID^2(-2)	0.153204	0.018721	8.183584	0.0000
RESID^2(-3)	0.183141	0.018624	9.833387	0.0000
RESID^2(-4)	0.101201	0.018722	5.405584	0.0000
RESID^2(-5)	0.141396	0.018801	7.520693	0.0000
R-squared	0.155572	Mean dependent var	0.000266	
Adjusted R-squared	0.154049	S.D. dependent var	0.000672	
S.E. of regression	0.000618	Akaike info criterion	-11.93779	
Sum squared resid	0.001059	Schwarz criterion	-11.92498	
Log likelihood	16587.59	Hannan-Quinn criter.	-11.93316	
F-statistic	102.1395	Durbin-Watson stat	2.011208	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Figura A1.31 Estimación del modelo ARMA(2,2)-GARCH(1,1) del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/18/11 Time: 13:41
 Sample (adjusted): 4 2786
 Included observations: 2783 after adjustments
 Convergence achieved after 28 iterations
 MA Backcast: 2 3
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(6) + C(7)*RESID(-1)^2 + C(8)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000710	0.000180	3.951889	0.0001
AR(1)	-0.073654	0.073574	-1.001087	0.3168
AR(2)	0.870648	0.073329	11.87321	0.0000
MA(1)	0.041437	0.067649	0.612529	0.5402
MA(2)	-0.878415	0.066721	-13.16540	0.0000

Variance Equation				
C	2.28E-06	4.64E-07	4.923730	0.0000
RESID(-1)^2	0.096061	0.008521	11.27357	0.0000
GARCH(-1)	0.895606	0.009061	98.84363	0.0000

R-squared	0.002685	Mean dependent var	2.21E-05
Adjusted R-squared	0.001249	S.D. dependent var	0.016412
S.E. of regression	0.016402	Akaike info criterion	-5.780957
Sum squared resid	0.747341	Schwarz criterion	-5.763907
Log likelihood	8052.202	Hannan-Quinn criter.	-5.774801
Durbin-Watson stat	2.001835		

Inverted AR Roots	.90	-.97
Inverted MA Roots	.92	-.96

Figura A1.32 Estimación del modelo ARMA(2,2)-GARCH(2,2) del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/18/11 Time: 13:41
 Sample (adjusted): 4 2786
 Included observations: 2783 after adjustments
 Convergence achieved after 31 iterations
 MA Backcast: 2 3
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(6) + C(7)*RESID(-1)^2 + C(8)*RESID(-2)^2 + C(9)*GARCH(-1) + C(10)*GARCH(-2)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000693	0.000177	3.916752	0.0001
AR(1)	-0.067970	0.069009	-0.984936	0.3247
AR(2)	0.871482	0.067608	12.89020	0.0000
MA(1)	0.035878	0.064075	0.559930	0.5755
MA(2)	-0.879586	0.062004	-14.18593	0.0000

Variance Equation				
C	3.29E-06	1.01E-06	3.272319	0.0011
RESID(-1)^2	0.018700	0.013135	1.423648	0.1545
RESID(-2)^2	0.099083	0.031744	3.121302	0.0018
GARCH(-1)	0.922500	0.259352	3.556941	0.0004
GARCH(-2)	-0.052794	0.228163	-0.231386	0.8170

R-squared	0.002586	Mean dependent var	2.21E-05
Adjusted R-squared	0.001150	S.D. dependent var	0.016412
S.E. of regression	0.016403	Akaike info criterion	-5.785967
Sum squared resid	0.747415	Schwarz criterion	-5.764655
Log likelihood	8061.173	Hannan-Quinn criter.	-5.778272
Durbin-Watson stat	2.002292		

Inverted AR Roots	.90	-.97
Inverted MA Roots	.92	-.96

Figura A1.33 Estimación del modelo ARMA(2,2)-GARCH(1,0) del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/18/11 Time: 13:42
 Sample (adjusted): 4 2786
 Included observations: 2783 after adjustments
 Convergence achieved after 154 iterations
 MA Backcast: 2 3
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(6) + C(7)*RESID(-1)^2

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000416	0.000273	1.524553	0.1274
AR(1)	1.760232	0.001445	1217.956	0.0000
AR(2)	-0.994234	0.001390	-715.1195	0.0000
MA(1)	-1.761371	0.000434	-4053.970	0.0000
MA(2)	0.997576	0.000389	2565.554	0.0000

Variance Equation				
C	0.000186	4.52E-06	41.19765	0.0000
RESID(-1)^2	0.348473	0.026465	13.16744	0.0000

R-squared	0.001317	Mean dependent var	2.21E-05
Adjusted R-squared	-0.000121	S.D. dependent var	0.016412
S.E. of regression	0.016413	Akaike info criterion	-5.462395
Sum squared resid	0.748366	Schwarz criterion	-5.447476
Log likelihood	7607.923	Hannan-Quinn criter.	-5.457008
Durbin-Watson stat	2.077216		

Inverted AR Roots	.88-.47i	.88+.47i
Inverted MA Roots	.88-.47i	.88+.47i

Figura A1.34 Estimación del modelo ARMA(2,2)-GARCH(0,1) del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/18/11 Time: 13:43
 Sample (adjusted): 4 2786
 Included observations: 2783 after adjustments
 Convergence achieved after 4 iterations
 MA Backcast: 2 3
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(6) + C(7)*GARCH(-1)

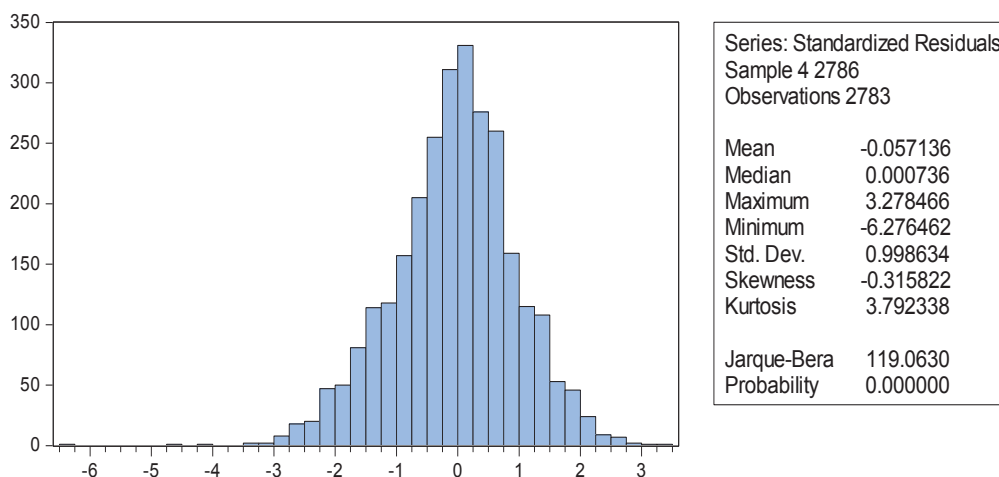
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-5.22E-05	0.000309	-0.168620	0.8661
AR(1)	-0.374110	0.363095	-1.030336	0.3029
AR(2)	0.440232	0.254519	1.729663	0.0837
MA(1)	0.337609	0.359279	0.939684	0.3474
MA(2)	-0.460317	0.245496	-1.875047	0.0608

Variance Equation				
C	1.49E-05	1.51E-05	0.984738	0.3248
GARCH(-1)	0.944056	0.056760	16.63228	0.0000

R-squared	0.003396	Mean dependent var	2.21E-05
Adjusted R-squared	0.001961	S.D. dependent var	0.016412
S.E. of regression	0.016396	Akaike info criterion	-5.381365
Sum squared resid	0.746808	Schwarz criterion	-5.366446
Log likelihood	7495.170	Hannan-Quinn criter.	-5.375978
Durbin-Watson stat	2.002555		

Inverted AR Roots	.50	-.88
Inverted MA Roots	.53	-.87

**Figura A1.35 Histograma del modelo seleccionado
ARMA(2,2)-GARCH(1,1) del índice Dax con datos diarios**



**Figura A1.36 Test ARCH del modelo seleccionado
ARMA(2,2)-GARCH(1,1) del índice Dax con datos diarios**

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	2.531981	Prob. F(5,2772)	0.0270
Obs*R-squared	12.62963	Prob. Chi-Square(5)	0.0271

Test Equation:

Dependent Variable: WGT_RESID^2

Method: Least Squares

Date: 07/18/11 Time: 13:45

Sample (adjusted): 9 2786

Included observations: 2778 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.966606	0.053268	18.14626	0.0000
WGT_RESID^2(-1)	-0.046624	0.018994	-2.454685	0.0142
WGT_RESID^2(-2)	0.025214	0.019011	1.326308	0.1848
WGT_RESID^2(-3)	0.039769	0.019003	2.092777	0.0365
WGT_RESID^2(-4)	0.018288	0.019005	0.962251	0.3360
WGT_RESID^2(-5)	-0.002882	0.018988	-0.151782	0.8794
R-squared	0.004546	Mean dependent var		1.000373
Adjusted R-squared	0.002751	S.D. dependent var		1.691858
S.E. of regression	1.689530	Akaike info criterion		3.888935
Sum squared resid	7912.704	Schwarz criterion		3.901742
Log likelihood	-5395.731	Hannan-Quinn criter.		3.893560
F-statistic	2.531981	Durbin-Watson stat		1.999556
Prob(F-statistic)	0.027019			

Figura A1.37 Estimación del modelo ARMA(2,2)-EGARCH(1,1) del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/18/11 Time: 13:46
 Sample (adjusted): 4 2786
 Included observations: 2783 after adjustments
 Convergence achieved after 28 iterations
 MA Backcast: 2 3
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 $LOG(GARCH) = C(6) + C(7)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(8)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(9)*LOG(GARCH(-1))$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000184	0.000208	0.885200	0.3760
AR(1)	1.542013	0.181972	8.473919	0.0000
AR(2)	-0.713891	0.160081	-4.459561	0.0000
MA(1)	-1.550853	0.182686	-8.489155	0.0000
MA(2)	0.716254	0.161938	4.423025	0.0000

Variance Equation				
C(6)	-0.277262	0.028913	-9.589483	0.0000
C(7)	0.126293	0.016501	7.653613	0.0000
C(8)	-0.120855	0.009028	-13.38597	0.0000
C(9)	0.979579	0.002448	400.1419	0.0000

R-squared	0.003880	Mean dependent var	2.21E-05
Adjusted R-squared	0.002445	S.D. dependent var	0.016412
S.E. of regression	0.016392	Akaike info criterion	-5.819318
Sum squared resid	0.746446	Schwarz criterion	-5.800137
Log likelihood	8106.581	Hannan-Quinn criter.	-5.812392
Durbin-Watson stat	2.066388		

Inverted AR Roots	.77-.35i	.77+.35i
Inverted MA Roots	.78+.34i	.78-.34i

Figura A1.38 Histograma del modelo ARMA(2,2)-EGARCH(1,1) del índice Dax con datos diarios

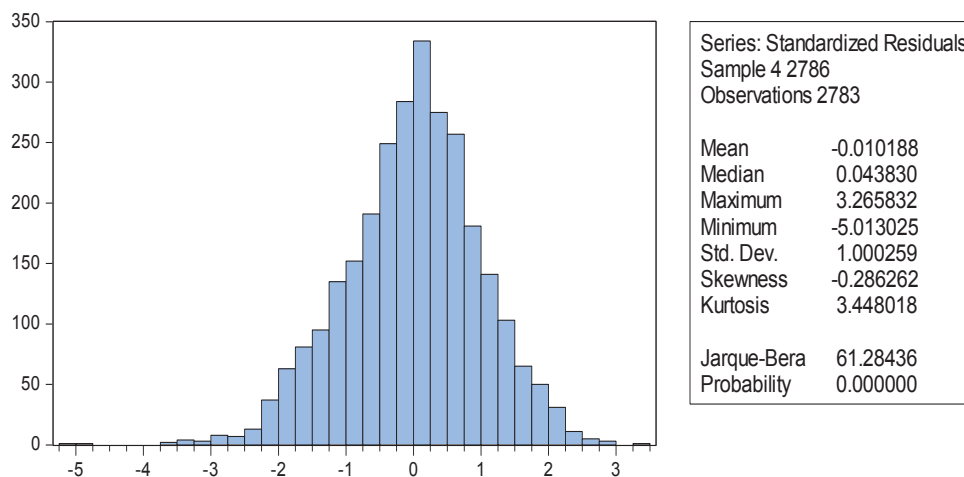


Figura A1.39 Test Arch del modelo ARMA(2,2)-EGARCH(1,1) del índice Dax con datos diarios

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	2.784105	Prob. F(5,2772)	0.0163
Obs*R-squared	13.88095	Prob. Chi-Square(5)	0.0164

Test Equation:
 Dependent Variable: WGT_RESID^2
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 13:46
 Sample (adjusted): 9 2786
 Included observations: 2778 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.016654	0.053279	19.08179	0.0000
WGT_RESID^2(-1)	-0.064840	0.018991	-3.414241	0.0006
WGT_RESID^2(-2)	0.001339	0.019031	0.070370	0.9439
WGT_RESID^2(-3)	0.021387	0.019028	1.123997	0.2611
WGT_RESID^2(-4)	0.007226	0.019033	0.379665	0.7042
WGT_RESID^2(-5)	0.018641	0.018995	0.981370	0.3265
R-squared	0.004997	Mean dependent var	1.000431	
Adjusted R-squared	0.003202	S.D. dependent var	1.570014	
S.E. of regression	1.567499	Akaike info criterion	3.738997	
Sum squared resid	6810.949	Schwarz criterion	3.751804	
Log likelihood	-5187.467	Hannan-Quinn criter.	3.743622	
F-statistic	2.784105	Durbin-Watson stat	2.000091	
Prob(F-statistic)	0.016302			

Figura A1.40 Estimación del modelo ARMA(2,2)-EGARCH(2,2) del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/18/11 Time: 13:47
 Sample (adjusted): 4 2786
 Included observations: 2783 after adjustments
 Convergence achieved after 8 iterations
 MA Backcast: 2 3
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 LOG(GARCH) = C(6) + C(7)*ABS(RESID(-1))/SQRT(GARCH(-1)) +
 C(8)*ABS(RESID(-2))/SQRT(GARCH(-2)) + C(9)*RESID(-1)/
 SQRT(GARCH(-1)) + C(10)*LOG(GARCH(-1)) + C(11)*
 LOG(GARCH(-2))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000275	0.000180	1.525723	0.1271
AR(1)	0.033093	0.009511	3.479519	0.0005
AR(2)	0.873730	0.015615	55.95486	0.0000
MA(1)	-0.073995	0.001374	-53.85590	0.0000
MA(2)	-0.852052	0.010695	-79.67162	0.0000
Variance Equation				
C(6)	-0.415695	0.048000	-8.660370	0.0000
C(7)	0.065612	0.023578	2.782720	0.0054
C(8)	0.150771	0.023788	6.338087	0.0000
C(9)	-0.118019	0.012361	-9.547775	0.0000
C(10)	0.112308	0.043556	2.578490	0.0099
C(11)	0.859494	0.043221	19.88607	0.0000
R-squared	0.003628	Mean dependent var	2.21E-05	
Adjusted R-squared	0.002194	S.D. dependent var	0.016412	
S.E. of regression	0.016394	Akaike info criterion	-5.805446	
Sum squared resid	0.746634	Schwarz criterion	-5.782002	
Log likelihood	8089.278	Hannan-Quinn criter.	-5.796981	
Durbin-Watson stat	1.991904			
Inverted AR Roots	.95	-.92		
Inverted MA Roots	.96	-.89		

Figura A1.41 Histograma del modelo ARMA(2,2)-EGARCH(2,2) del índice Dax con datos diarios

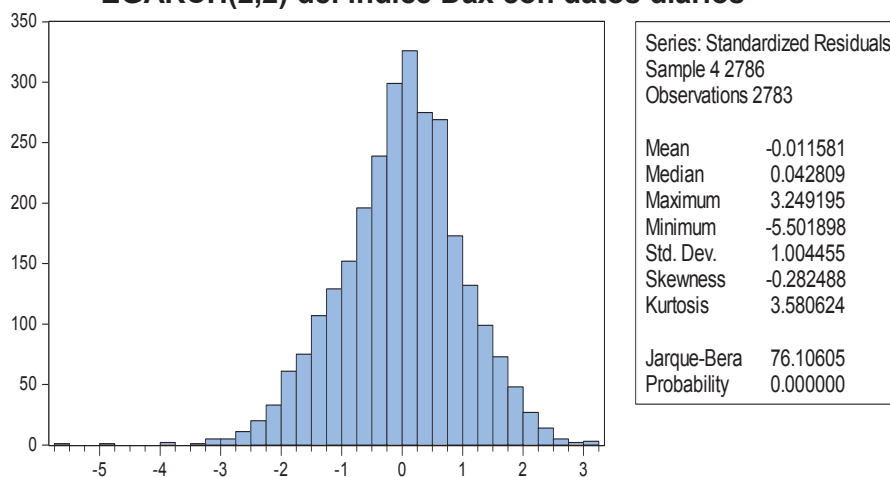


Figura A1.42 Test Arch del modelo ARMA(2,2)-EGARCH(2,2) del índice Dax con datos diarios

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	3.147538	Prob. F(5,2772)	0.0077
Obs*R-squared	15.68272	Prob. Chi-Square(5)	0.0078

Test Equation:

Dependent Variable: WGT_RESID^2

Method: Least Squares

Date: 07/18/11 Time: 13:47

Sample (adjusted): 9 2786

Included observations: 2778 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.926947	0.052429	17.68019	0.0000
WGT_RESID^2(-1)	-0.039766	0.018987	-2.094427	0.0363
WGT_RESID^2(-2)	0.022067	0.018997	1.161605	0.2455
WGT_RESID^2(-3)	0.051434	0.018978	2.710125	0.0068
WGT_RESID^2(-4)	0.020600	0.018995	1.084491	0.2782
WGT_RESID^2(-5)	0.026774	0.018984	1.410333	0.1586
R-squared	0.005645	Mean dependent var		1.008767
Adjusted R-squared	0.003852	S.D. dependent var		1.625352
S.E. of regression	1.622219	Akaike info criterion		3.807625
Sum squared resid	7294.781	Schwarz criterion		3.820431
Log likelihood	-5282.791	Hannan-Quinn criter.		3.812249
F-statistic	3.147538	Durbin-Watson stat		2.000123
Prob(F-statistic)	0.007750			

Figura A1.43 Estimación del modelo ARMA(2,2)-EGARCH(0,1) del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/18/11 Time: 13:48
 Sample (adjusted): 4 2786
 Included observations: 2783 after adjustments
 Convergence achieved after 18 iterations
 MA Backcast: 2 3
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 LOG(GARCH) = C(6) + C(7)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(8)
 *LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.001247	0.000416	-2.998628	0.0027
AR(1)	-0.050522	0.017973	-2.811014	0.0049
AR(2)	0.918619	0.016833	54.57348	0.0000
MA(1)	0.098272	0.025663	3.829271	0.0001
MA(2)	-0.856694	0.023604	-36.29432	0.0000

Variance Equation				
C(6)	-0.146372	0.011816	-12.38737	0.0000
C(7)	-0.180002	0.008441	-21.32512	0.0000
C(8)	0.982500	0.001591	617.4817	0.0000

R-squared	-0.016449	Mean dependent var	2.21E-05
Adjusted R-squared	-0.017913	S.D. dependent var	0.016412
S.E. of regression	0.016558	Akaike info criterion	-5.747162
Sum squared resid	0.761679	Schwarz criterion	-5.730112
Log likelihood	8005.176	Hannan-Quinn criter.	-5.741006
Durbin-Watson stat	2.127682		

Inverted AR Roots	.93	-.98
Inverted MA Roots	.88	-.98

Figura A1.44 Histograma del modelo ARMA(2,2)-EGARCH(0,1) del índice Dax con datos diarios

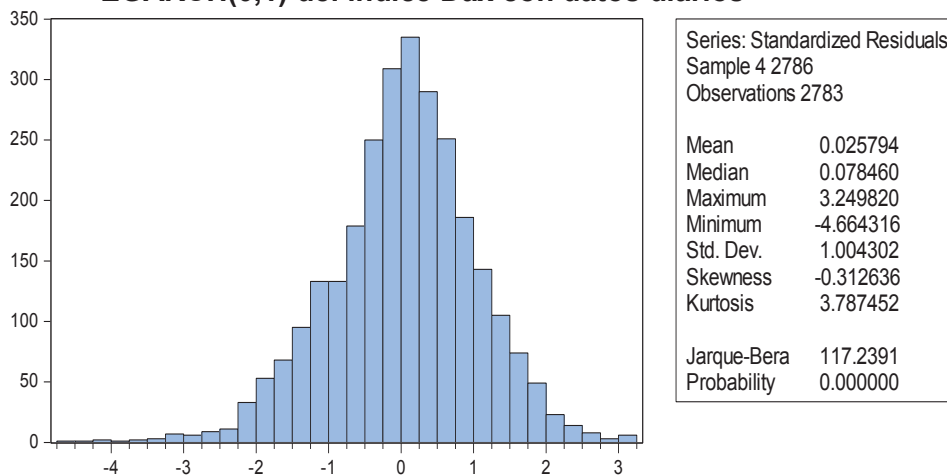


Figura A1.45 Test Arch del modelo ARMA(2,2)-EGARCH(0,1) del índice Dax con datos diarios

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	13.83281	Prob. F(5,2772)	0.0000
Obs*R-squared	67.62642	Prob. Chi-Square(5)	0.0000

Test Equation:
 Dependent Variable: WGT_RESID^2
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 13:49
 Sample (adjusted): 9 2786
 Included observations: 2778 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.724459	0.050096	14.46140	0.0000
WGT_RESID^2(-1)	-0.004044	0.018900	-0.213975	0.8306
WGT_RESID^2(-2)	0.036612	0.018842	1.943105	0.0521
WGT_RESID^2(-3)	0.073729	0.018804	3.920847	0.0001
WGT_RESID^2(-4)	0.077496	0.018835	4.114548	0.0000
WGT_RESID^2(-5)	0.098283	0.018892	5.202330	0.0000
R-squared	0.024344	Mean dependent var		1.009150
Adjusted R-squared	0.022584	S.D. dependent var		1.675098
S.E. of regression	1.656075	Akaike info criterion		3.848935
Sum squared resid	7602.444	Schwarz criterion		3.861742
Log likelihood	-5340.171	Hannan-Quinn criter.		3.853560
F-statistic	13.83281	Durbin-Watson stat		2.011310
Prob(F-statistic)	0.000000			

Figura A1.46 Estimación del modelo ARMA(2,2)-EGARCH(1,0) del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/18/11 Time: 13:49
 Sample (adjusted): 4 2786
 Included observations: 2783 after adjustments
 Convergence achieved after 44 iterations
 MA Backcast: 2 3
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 LOG(GARCH) = C(6) + C(7)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) +
 C(8)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-8.31E-05	0.000299	-0.278290	0.7808
AR(1)	1.854810	0.006312	293.8371	0.0000
AR(2)	-0.983371	0.006143	-160.0817	0.0000
MA(1)	-1.861204	0.005399	-344.7393	0.0000
MA(2)	0.990290	0.005258	188.3484	0.0000
Variance Equation				
C(6)	-8.528418	0.021533	-396.0553	0.0000
C(7)	0.331894	0.023640	14.03936	0.0000
C(8)	-0.141600	0.017193	-8.235875	0.0000
R-squared	0.004783	Mean dependent var		2.21E-05
Adjusted R-squared	0.003350	S.D. dependent var		0.016412
S.E. of regression	0.016385	Akaike info criterion		-5.448660
Sum squared resid	0.745768	Schwarz criterion		-5.431610
Log likelihood	7589.811	Hannan-Quinn criter.		-5.442504
Durbin-Watson stat	2.073465			
Inverted AR Roots	.93-.35i	.93+.35i		
Inverted MA Roots	.93+.35i	.93-.35i		

Figura A1.47 Histograma del modelo ARMA(2,2)-EGARCH(1,0) del índice Dax con datos diarios

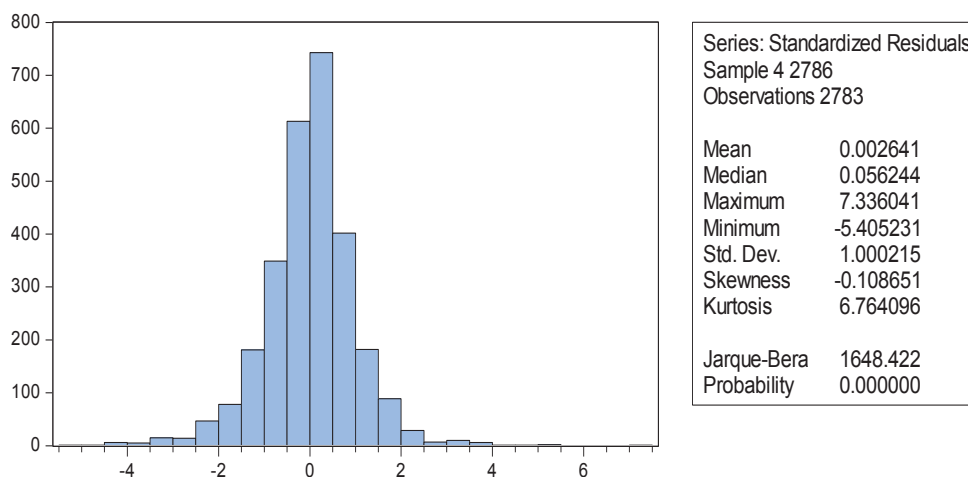


Figura A1.48 Test Arch del modelo ARMA(2,2)-EGARCH(1,0) del índice Dax con datos diarios

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	83.77642	Prob. F(5,2772)	0.0000
Obs*R-squared	364.6811	Prob. Chi-Square(5)	0.0000

Test Equation:

Dependent Variable: WGT_RESID^2

Method: Least Squares

Date: 07/18/11 Time: 13:50

Sample (adjusted): 9 2786

Included observations: 2778 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.440188	0.053239	8.268161	0.0000
WGT_RESID^2(-1)	-0.086087	0.018780	-4.584036	0.0000
WGT_RESID^2(-2)	0.169933	0.018631	9.120907	0.0000
WGT_RESID^2(-3)	0.176387	0.018612	9.477113	0.0000
WGT_RESID^2(-4)	0.150217	0.018618	8.068458	0.0000
WGT_RESID^2(-5)	0.148648	0.018764	7.921999	0.0000

R-squared	0.131275	Mean dependent var	0.999514
Adjusted R-squared	0.129708	S.D. dependent var	2.401355
S.E. of regression	2.240211	Akaike info criterion	4.453175
Sum squared resid	13911.41	Schwarz criterion	4.465981
Log likelihood	-6179.460	Hannan-Quinn criter.	4.457799
F-statistic	83.77642	Durbin-Watson stat	2.022069
Prob(F-statistic)	0.000000		

**Figura A1.49 Estimación del modelo seleccionado
ARMA(2,2)-EGARCH(1,1) en la ventana 1 del índice Dax con
datos diarios**

Dependent Variable: RT
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
Date: 07/19/11 Time: 10:15
Sample (adjusted): 4 1515
Included observations: 1512 after adjustments
Convergence achieved after 26 iterations
MA Backcast: 2 3
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 $\text{LOG}(\text{GARCH}) = C(6) + C(7) \cdot \text{ABS}(\text{RESID}(-1) / \text{SQRT}(\text{GARCH}(-1))) + C(8) \cdot \text{RESID}(-1) / \text{SQRT}(\text{GARCH}(-1)) + C(9) \cdot \text{LOG}(\text{GARCH}(-1))$

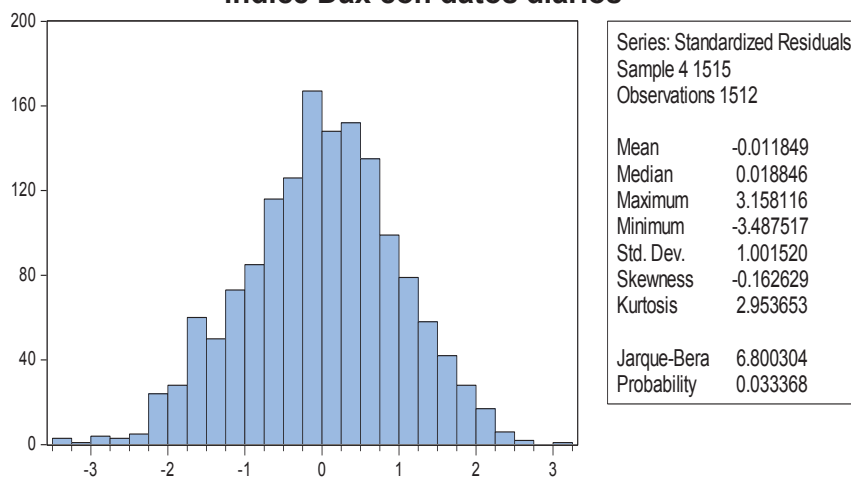
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	5.11E-05	0.000284	0.179692	0.8574
AR(1)	1.859583	0.006389	291.0583	0.0000
AR(2)	-0.988609	0.006443	-153.4392	0.0000
MA(1)	-1.860814	0.006572	-283.1468	0.0000
MA(2)	0.989284	0.006577	150.4135	0.0000

Variance Equation				
C(6)	-0.198734	0.033865	-5.868493	0.0000
C(7)	0.100878	0.021663	4.656797	0.0000
C(8)	-0.113322	0.013500	-8.394252	0.0000
C(9)	0.986561	0.002790	353.6528	0.0000

R-squared	0.005260	Mean dependent var	-0.000122
Adjusted R-squared	0.002619	S.D. dependent var	0.017126
S.E. of regression	0.017104	Akaike info criterion	-5.738067
Sum squared resid	0.440857	Schwarz criterion	-5.706393
Log likelihood	4346.979	Hannan-Quinn criter.	-5.726272
Durbin-Watson stat	2.095241		

Inverted AR Roots	.93-.35i	.93+.35i
Inverted MA Roots	.93-.35i	.93+.35i

**Figura A1.50 Histograma de los residuos del modelo
seleccionado ARMA(2,2)-EGARCH(1,1) en la ventana 1 del
índice Dax con datos diarios**



**Figura A1.51 Estimación del modelo seleccionado
ARMA(2,2)-EGARCH(1,1) en la ventana 2 del índice Dax con
datos diarios**

Dependent Variable: RT
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
Date: 07/19/11 Time: 10:17
Sample: 243 1770
Included observations: 1528
Convergence achieved after 10 iterations
MA Backcast: 241 242
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 $\text{LOG}(\text{GARCH}) = \text{C}(6) + \text{C}(7) * \text{ABS}(\text{RESID}(-1)) / \text{SQRT}(\text{GARCH}(-1)) + \text{C}(8) * \text{RESID}(-1) / \text{SQRT}(\text{GARCH}(-1)) + \text{C}(9) * \text{LOG}(\text{GARCH}(-1))$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000254	0.000260	0.976578	0.3288
AR(1)	-1.084193	0.027402	-39.56687	0.0000
AR(2)	-0.127948	0.030523	-4.191868	0.0000
MA(1)	1.055449	0.004561	231.4050	0.0000
MA(2)	0.108468	0.015126	7.171083	0.0000

Variance Equation				
C(6)	-0.248377	0.040110	-6.192458	0.0000
C(7)	0.115918	0.023971	4.835723	0.0000
C(8)	-0.125385	0.013680	-9.165374	0.0000
C(9)	0.982308	0.003194	307.5765	0.0000

R-squared	0.005833	Mean dependent var	1.64E-05
Adjusted R-squared	0.003222	S.D. dependent var	0.016387
S.E. of regression	0.016361	Akaike info criterion	-5.907070
Sum squared resid	0.407670	Schwarz criterion	-5.875666
Log likelihood	4522.001	Hannan-Quinn criter.	-5.895382
Durbin-Watson stat	2.016165		

Inverted AR Roots	-.13	-.95
Inverted MA Roots	-.12	-.94

**Figura A1.52 Histograma de los residuos del modelo
seleccionado ARMA(2,2)-EGARCH(1,1) en la ventana 2 del
índice Dax con datos diarios**

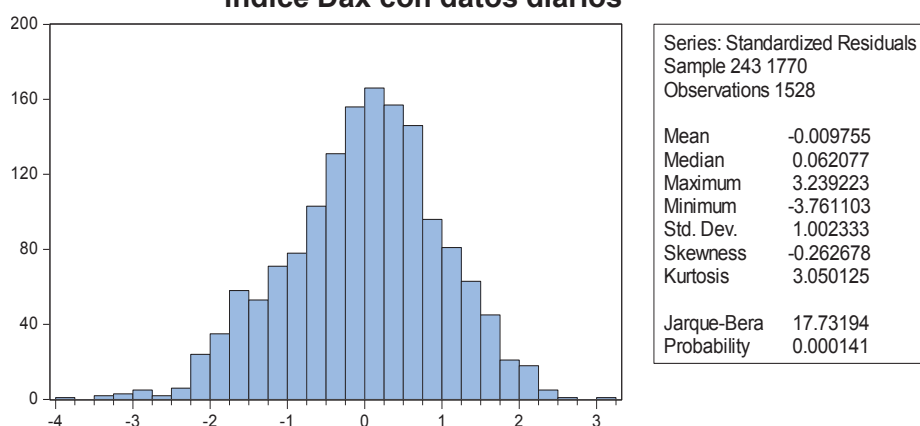


Figura A1.53 Estimación del modelo seleccionado ARMA(2,2)-EGARCH(1,1) en la ventana 3 del índice Dax con datos diarios

Dependent Variable: RT
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
Date: 07/19/11 Time: 10:19
Sample: 496 2022
Included observations: 1527
Convergence achieved after 13 iterations
MA Backcast: 494 495
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 $\text{LOG}(\text{GARCH}) = \text{C}(6) + \text{C}(7) * \text{ABS}(\text{RESID}(-1) / \text{SQRT}(\text{GARCH}(-1))) + \text{C}(8) * \text{RESID}(-1) / \text{SQRT}(\text{GARCH}(-1)) + \text{C}(9) * \text{LOG}(\text{GARCH}(-1))$

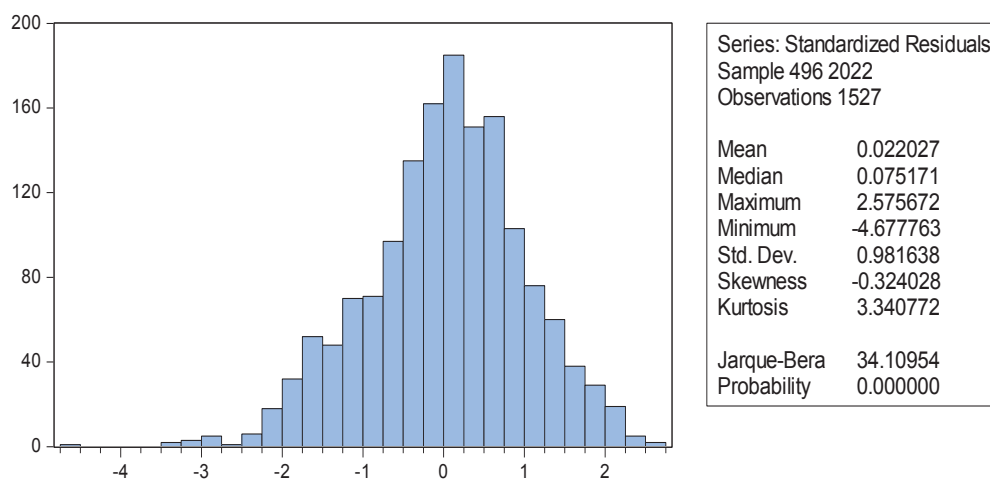
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000591	0.000323	1.830516	0.0672
AR(1)	0.404958	0.058620	6.908150	0.0000
AR(2)	0.591483	0.059065	10.01413	0.0000
MA(1)	-0.453455	0.109767	-4.131068	0.0000
MA(2)	-0.543499	0.110073	-4.937614	0.0000

Variance Equation				
C(6)	-0.270385	0.052893	-5.111955	0.0000
C(7)	0.127492	0.025552	4.989555	0.0000
C(8)	-0.101880	0.015081	-6.755315	0.0000
C(9)	0.980348	0.004366	224.5575	0.0000

R-squared	0.006083	Mean dependent var	0.000293
Adjusted R-squared	0.003471	S.D. dependent var	0.015113
S.E. of regression	0.015086	Akaike info criterion	-6.063704
Sum squared resid	0.346401	Schwarz criterion	-6.032283
Log likelihood	4638.638	Hannan-Quinn criter.	-6.052009
Durbin-Watson stat	2.011042		

Inverted AR Roots	1.00	-.59
Inverted MA Roots	1.00	-.54

Figura A1.54 Histograma de los residuos del modelo seleccionado ARMA(2,2)-EGARCH(1,1) en la ventana 3 del índice Dax con datos diarios



**Figura A1.55 Estimación del modelo seleccionado
ARMA(2,2)-EGARCH(1,1) en la ventana 4 del índice Dax con
datos diarios**

Dependent Variable: RT
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
Date: 07/19/11 Time: 10:20
Sample: 749 2276
Included observations: 1528
Convergence achieved after 32 iterations
MA Backcast: 747 748
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 $LOG(GARCH) = C(6) + C(7)*ABS(RESID(-1))/@SQRT(GARCH(-1)) + C(8)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(9)*LOG(GARCH(-1))$

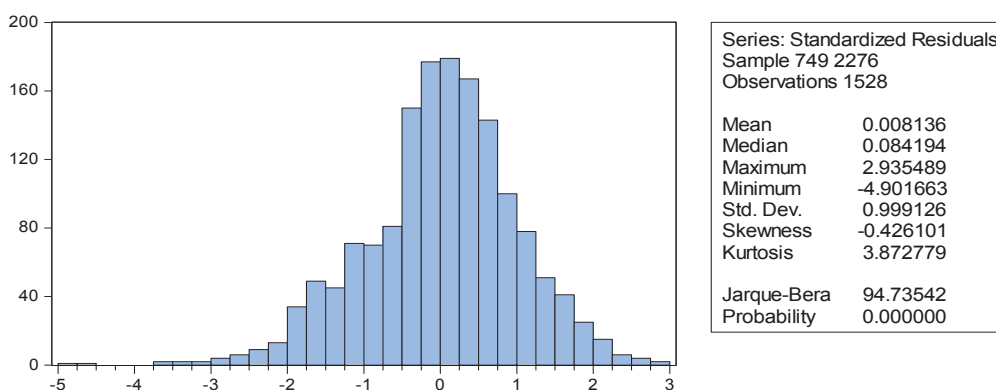
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.000436	0.001503	-0.289935	0.7719
AR(1)	0.009438	0.009862	0.957056	0.3385
AR(2)	0.985035	0.011027	89.33260	0.0000
MA(1)	-0.012321	0.013646	-0.902929	0.3666
MA(2)	-0.974134	0.014400	-67.64588	0.0000

Variance Equation				
C(6)	-0.277151	0.048782	-5.681385	0.0000
C(7)	0.113586	0.021152	5.370053	0.0000
C(8)	-0.135254	0.011694	-11.56620	0.0000
C(9)	0.978809	0.004274	229.0046	0.0000

R-squared	0.012396	Mean dependent var	0.000333
Adjusted R-squared	0.009802	S.D. dependent var	0.014713
S.E. of regression	0.014641	Akaike info criterion	-6.118607
Sum squared resid	0.326453	Schwarz criterion	-6.087202
Log likelihood	4683.615	Hannan-Quinn criter.	-6.106918
Durbin-Watson stat	2.067125		

Inverted AR Roots	1.00	-.99
Inverted MA Roots	.99	-.98

**Figura A1.56 Histograma de los residuos del modelo
seleccionado ARMA(2,2)-EGARCH(1,1) en la ventana 4 del
índice Dax con datos diarios**



**Figura A1.57 Estimación del modelo seleccionado
ARMA(2,2)-EGARCH(1,1) en la ventana 5 del índice Dax con
datos diarios**

Dependent Variable: RT
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
Date: 07/19/11 Time: 10:22
Sample: 1002 2530
Included observations: 1529
Convergence achieved after 19 iterations
MA Backcast: 1000 1001
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 $\text{LOG}(\text{GARCH}) = \text{C}(6) + \text{C}(7) * \text{ABS}(\text{RESID}(-1)) / \text{SQRT}(\text{GARCH}(-1)) + \text{C}(8) * \text{RESID}(-1) / \text{SQRT}(\text{GARCH}(-1)) + \text{C}(9) * \text{LOG}(\text{GARCH}(-1))$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000764	0.000227	3.370321	0.0008
AR(1)	0.008086	0.003995	2.024216	0.0429
AR(2)	0.985641	0.003825	257.6513	0.0000
MA(1)	-0.016366	0.000873	-18.74636	0.0000
MA(2)	-0.980420	0.000948	-1034.353	0.0000

Variance Equation				
C(6)	-0.287282	0.041096	-6.990555	0.0000
C(7)	0.108471	0.020256	5.355030	0.0000
C(8)	-0.125975	0.010732	-11.73798	0.0000
C(9)	0.977374	0.003697	264.3626	0.0000

R-squared	0.004522	Mean dependent var	0.000266
Adjusted R-squared	0.001909	S.D. dependent var	0.014299
S.E. of regression	0.014285	Akaike info criterion	-6.130249
Sum squared resid	0.311010	Schwarz criterion	-6.098861
Log likelihood	4695.575	Hannan-Quinn criter.	-6.118567
Durbin-Watson stat	2.038321		

Inverted AR Roots	1.00	-.99
Inverted MA Roots	1.00	-.98

**Figura A1.58 Histograma de los residuos del modelo
seleccionado ARMA(2,2)-EGARCH(1,1) en la ventana 5 del
índice Dax con datos diarios**

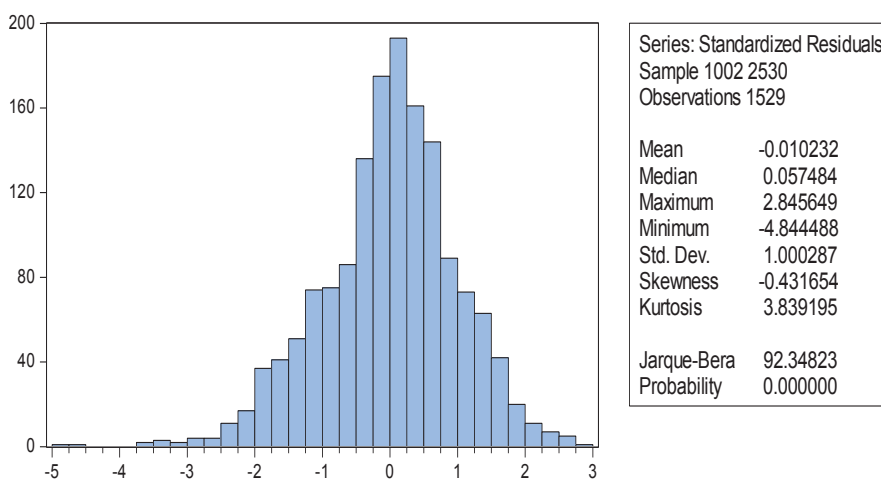


Figura A1.59 Cálculo redes neuronales Backpropagation en la ventana 1 del índice Dax con datos diarios

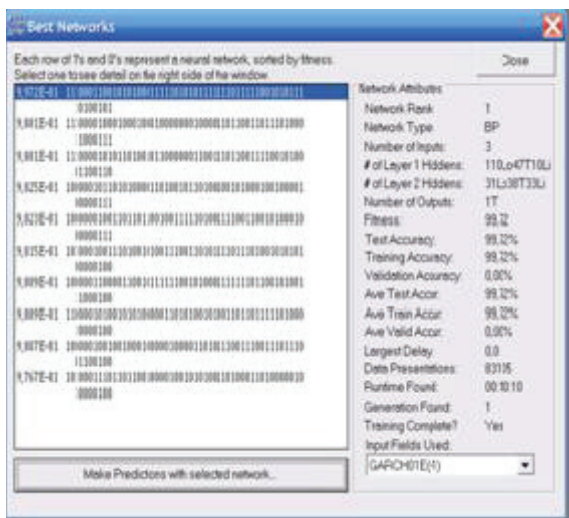


Figura A1.60 Inputs seleccionados por la Red neuronal Backpropagation en la ventana 1 del índice Dax con datos diarios

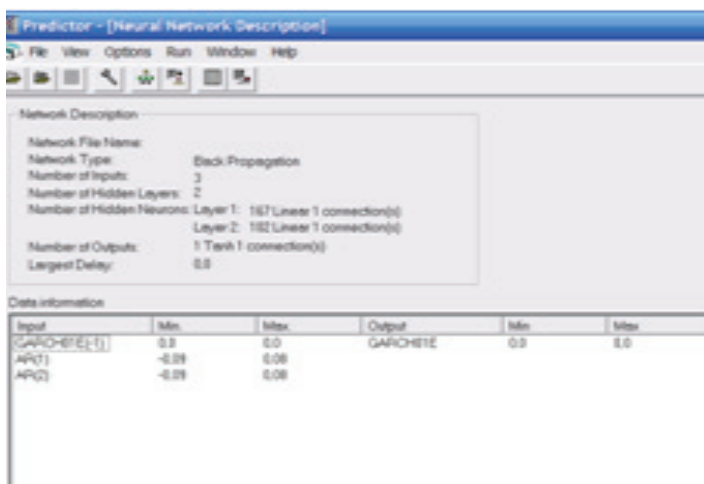


Figura A1.61 Cálculo redes neuronales Backpropagation en la ventana 2 del índice Dax con datos diarios

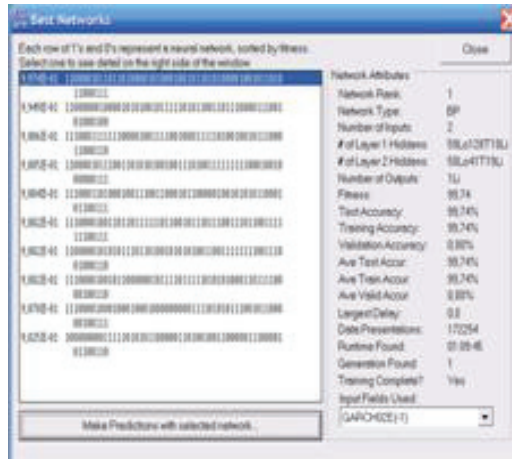


Figura A1.62 Inputs seleccionados por la Red neuronal Backpropagation en la ventana 2 del índice Dax con datos diarios

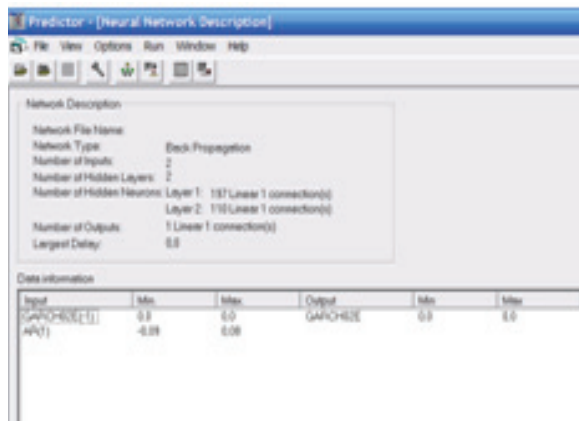


Figura A1.63 Cálculo redes neuronales Backpropagation en la ventana 3 del índice Dax con datos diarios

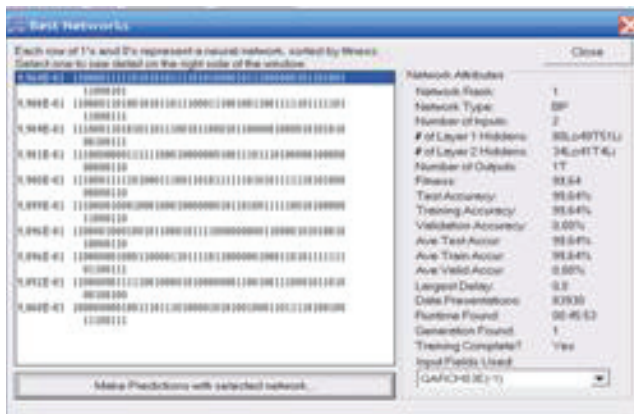


Figura A1.64 Inputs seleccionados por la Red neuronal Backpropagation en la ventana 3 del índice Dax con datos diarios

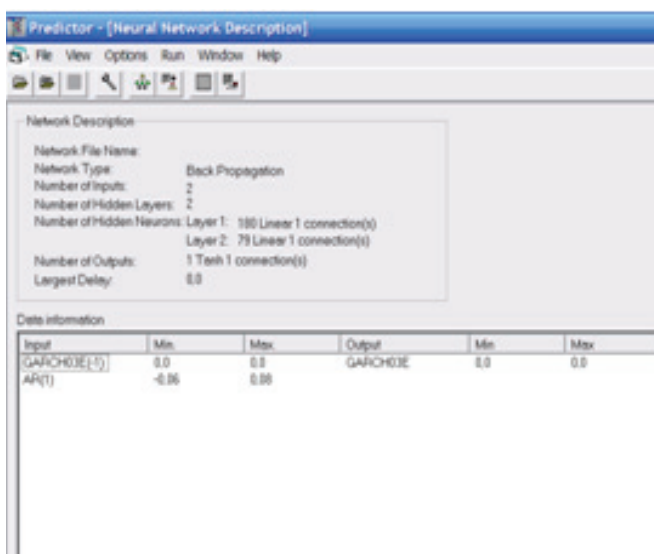


Figura A1.65 Cálculo redes neuronales Backpropagation en la ventana 4 del índice Dax con datos diarios

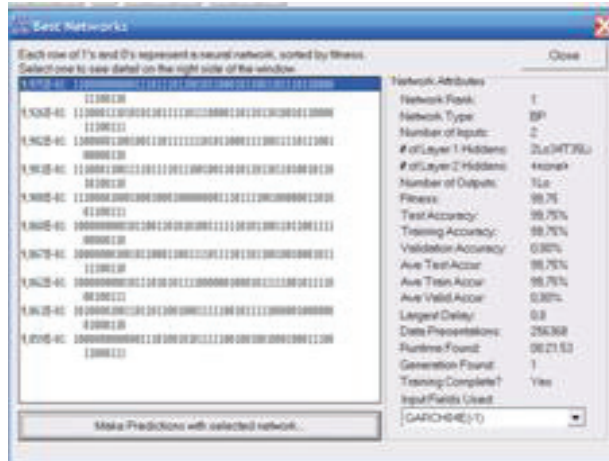


Figura A1.66 Inputs seleccionados por la red neuronal Backpropagation en la ventana 4 del índice Dax con datos diarios

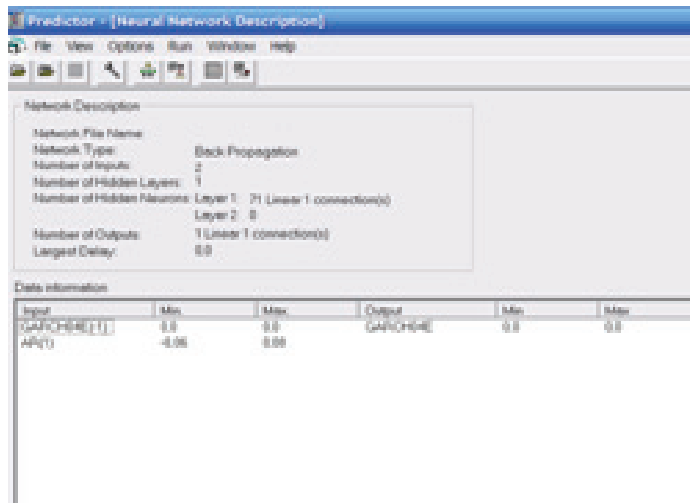


Figura A1.67 Cálculo redes neuronales Backpropagation en la ventana 5 del índice Dax con datos diarios

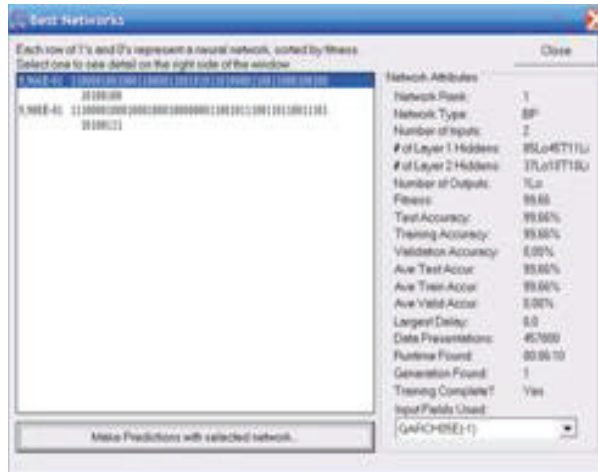


Figura A1.68 Inputs seleccionados por la red neuronal Backpropagation en la ventana 5 del índice Dax con datos diarios

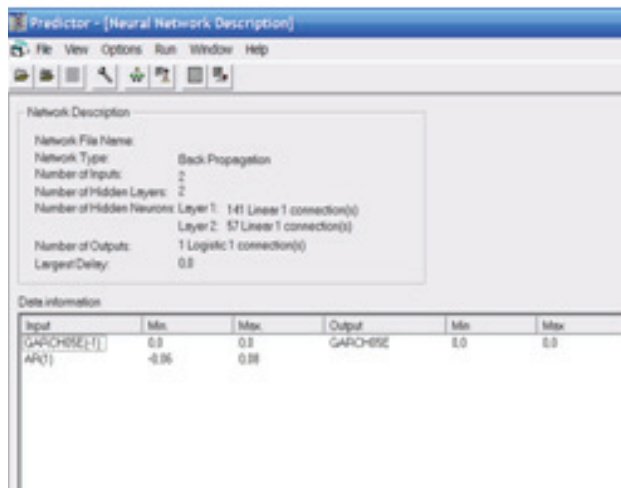


Figura A1.69 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1) del índice Dax con datos semanales

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/19/11 Time: 10:44
 Sample (adjusted): 3 574
 Included observations: 572 after adjustments
 Convergence achieved after 17 iterations
 MA Backcast: 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-3.09E-05	0.001406	-0.021943	0.9825
AR(1)	-0.850961	0.111662	-7.620865	0.0000
MA(1)	0.791211	0.129787	6.096248	0.0000
R-squared	0.012257	Mean dependent var		-6.43E-05
Adjusted R-squared	0.008786	S.D. dependent var		0.034907
S.E. of regression	0.034753	Akaike info criterion		-3.875878
Sum squared resid	0.687217	Schwarz criterion		-3.853068
Log likelihood	1111.501	Hannan-Quinn criter.		-3.866980
F-statistic	3.530508	Durbin-Watson stat		1.920732
Prob(F-statistic)	0.029933			
Inverted AR Roots	-.85			
Inverted MA Roots	-.79			

Figura A1.70 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)-GARCH(1,1) del índice Dax con datos semanales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/19/11 Time: 10:52
 Sample (adjusted): 3 574
 Included observations: 572 after adjustments
 Convergence achieved after 53 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.003094	0.000973	3.177890	0.0015
AR(1)	0.741592	0.182195	4.070319	0.0000
MA(1)	-0.795731	0.155759	-5.108729	0.0000
Variance Equation				
C	0.000123	3.49E-05	3.528093	0.0004
RESID(-1)^2	0.365240	0.043174	8.459717	0.0000
GARCH(-1)	0.569715	0.057826	9.852315	0.0000
R-squared	-0.017875	Mean dependent var		-6.43E-05
Adjusted R-squared	-0.021452	S.D. dependent var		0.034907
S.E. of regression	0.035279	Akaike info criterion		-4.131700
Sum squared resid	0.708181	Schwarz criterion		-4.086080
Log likelihood	1187.666	Hannan-Quinn criter.		-4.113903
Durbin-Watson stat	1.920776			
Inverted AR Roots	.74			
Inverted MA Roots	.80			

Figura A1.71 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)-EGARCH(1,1) del índice Dax con datos semanales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/19/11 Time: 10:56
 Sample (adjusted): 3 574
 Included observations: 572 after adjustments
 Convergence achieved after 32 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 $\text{LOG}(\text{GARCH}) = C(4) + C(5) \cdot \text{ABS}(\text{RESID}(-1) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)}) + C(6) \cdot \text{RESID}(-1) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)} + C(7) \cdot \text{LOG}(\text{GARCH}(-1))$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	9.25E-05	0.001207	0.076633	0.9389
AR(1)	-0.161843	0.275472	-0.587514	0.5569
MA(1)	0.147417	0.280248	0.526023	0.5989
Variance Equation				
C(4)	-0.952858	0.210710	-4.522142	0.0000
C(5)	0.193617	0.064480	3.002769	0.0027
C(6)	-0.274477	0.029666	-9.252268	0.0000
C(7)	0.887448	0.025460	34.85682	0.0000
R-squared	0.001589	Mean dependent var	-6.43E-05	
Adjusted R-squared	-0.001920	S.D. dependent var	0.034907	
S.E. of regression	0.034940	Akaike info criterion	-4.219868	
Sum squared resid	0.694639	Schwarz criterion	-4.166644	
Log likelihood	1213.882	Hannan-Quinn criter.	-4.199105	
Durbin-Watson stat	2.033249			
Inverted AR Roots	-.16			
Inverted MA Roots	-.15			

Figura A1.72 Estimación modelo seleccionado ARIMA(2,2) del índice Dax con datos mensuales

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/19/11 Time: 12:49
 Sample (adjusted): 4 132
 Included observations: 129 after adjustments
 Convergence achieved after 40 iterations
 MA Backcast: 2 3

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000220	0.006137	0.035875	0.9714
AR(1)	-1.372533	0.030849	-44.49174	0.0000
AR(2)	-0.933941	0.030018	-31.11221	0.0000
MA(1)	1.447408	0.012910	112.1176	0.0000
MA(2)	0.975098	0.009989	97.61578	0.0000
R-squared	0.058711	Mean dependent var	-0.000732	
Adjusted R-squared	0.028347	S.D. dependent var	0.068370	
S.E. of regression	0.067394	Akaike info criterion	-2.518543	
Sum squared resid	0.563196	Schwarz criterion	-2.407698	
Log likelihood	167.4460	Hannan-Quinn criter.	-2.473504	
F-statistic	1.933570	Durbin-Watson stat	1.899039	
Prob(F-statistic)	0.108980			
Inverted AR Roots	-.69-.68i	-.69+.68i		
Inverted MA Roots	-.72+.67i	-.72-.67i		

Figura A1.73 Estimación modelo seleccionado ARIMA(2,2)-GARCH(1,1) del índice Dax con datos mensuales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/19/11 Time: 12:54
 Sample (adjusted): 4 132
 Included observations: 129 after adjustments
 Convergence achieved after 46 iterations
 MA Backcast: 2 3
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(6) + C(7)*RESID(-1)^2 + C(8)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.004524	0.002518	1.796727	0.0724
AR(1)	0.911492	2.324433	0.392135	0.6950
AR(2)	0.023685	2.185420	0.010838	0.9914
MA(1)	-0.923915	2.303038	-0.401172	0.6883
MA(2)	-0.069251	2.293785	-0.030191	0.9759
Variance Equation				
C	0.000373	0.000346	1.077642	0.2812
RESID(-1)^2	0.294555	0.123323	2.388492	0.0169
GARCH(-1)	0.652798	0.165487	3.944710	0.0001
R-squared	0.024047	Mean dependent var	-0.000732	
Adjusted R-squared	-0.007436	S.D. dependent var	0.068370	
S.E. of regression	0.068623	Akaike info criterion	-2.660475	
Sum squared resid	0.583937	Schwarz criterion	-2.483123	
Log likelihood	179.6007	Hannan-Quinn criter.	-2.588413	
Durbin-Watson stat	1.852126			
Inverted AR Roots	.94	-.03		
Inverted MA Roots	.99	-.07		

Figura A1.74 Estimación modelo seleccionado ARIMA(2,2)-EGARCH(0,1) del índice Dax con datos mensuales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/19/11 Time: 13:00
 Sample (adjusted): 4 132
 Included observations: 129 after adjustments
 Convergence achieved after 51 iterations
 MA Backcast: 2 3
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 LOG(GARCH) = C(6) + C(7)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(8)
 *LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.003046	0.005649	0.539223	0.5897
AR(1)	0.892566	0.171606	5.201245	0.0000
AR(2)	-0.797496	0.189912	-4.199295	0.0000
MA(1)	-0.831574	0.191748	-4.336811	0.0000
MA(2)	0.812058	0.148936	5.452395	0.0000
Variance Equation				
C(6)	-1.055581	0.384450	-2.745689	0.0060
C(7)	-0.389217	0.098643	-3.945695	0.0001
C(8)	0.817033	0.065331	12.50615	0.0000
R-squared	0.001455	Mean dependent var	-0.000732	
Adjusted R-squared	-0.030756	S.D. dependent var	0.068370	
S.E. of regression	0.069413	Akaike info criterion	-2.771540	
Sum squared resid	0.597454	Schwarz criterion	-2.594187	
Log likelihood	186.7643	Hannan-Quinn criter.	-2.699478	
Durbin-Watson stat	1.955689			
Inverted AR Roots	.45+.77i	.45-.77i		
Inverted MA Roots	.42+.80i	.42-.80i		

9.2. Anexo 2 Nasdaq 100

Figura A2.1 Estimación modelo seleccionado AR(2) del índice Nasdaq con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/16/11 Time: 18:22
 Sample (adjusted): 4 2768
 Included observations: 2765 after adjustments
 Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000168	0.000348	-0.482566	0.6294
AR(1)	-0.068857	0.018945	-3.634543	0.0003
AR(2)	-0.092008	0.018912	-4.865016	0.0000
R-squared	0.012445	Mean dependent var		-0.000166
Adjusted R-squared	0.011730	S.D. dependent var		0.021372
S.E. of regression	0.021246	Akaike info criterion		-4.864181
Sum squared resid	1.246785	Schwarz criterion		-4.857752
Log likelihood	6727.730	Hannan-Quinn criter.		-4.861859
F-statistic	17.40309	Durbin-Watson stat		1.998570
Prob(F-statistic)	0.000000			
Inverted AR Roots	-.03+.30i	-.03-.30i		

Figura A2.2 Estimación modelo seleccionado AR(2)-GARCH(1,1) del índice Nasdaq con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/16/11 Time: 18:31
 Sample (adjusted): 4 2768
 Included observations: 2765 after adjustments
 Convergence achieved after 13 iterations
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000613	0.000228	2.682071	0.0073
AR(1)	-0.057583	0.020953	-2.748227	0.0060
AR(2)	-0.043321	0.019195	-2.256937	0.0240
Variance Equation				
C	1.35E-06	4.00E-07	3.361398	0.0008
RESID(-1)^2	0.068462	0.007180	9.535708	0.0000
GARCH(-1)	0.927697	0.007522	123.3315	0.0000
R-squared	0.008394	Mean dependent var		-0.000166
Adjusted R-squared	0.007676	S.D. dependent var		0.021372
S.E. of regression	0.021290	Akaike info criterion		-5.385726
Sum squared resid	1.251899	Schwarz criterion		-5.372869
Log likelihood	7451.766	Hannan-Quinn criter.		-5.381082
Durbin-Watson stat	2.017481			
Inverted AR Roots	-.03+.21i	-.03-.21i		

Figura A2.3 Estimación modelo seleccionado AR(2)-EGARCH(1,1) del índice Nasdaq con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/16/11 Time: 18:37
 Sample (adjusted): 4 2768
 Included observations: 2765 after adjustments
 Convergence achieved after 15 iterations
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 LOG(GARCH) = C(4) + C(5)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(6)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(7)*LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000177	0.000234	0.756655	0.4493
AR(1)	-0.056512	0.020568	-2.747536	0.0060
AR(2)	-0.033027	0.018491	-1.786147	0.0741

Variance Equation				
C(4)	-0.148962	0.016982	-8.771897	0.0000
C(5)	0.090850	0.012180	7.458811	0.0000
C(6)	-0.083286	0.008304	-10.02928	0.0000
C(7)	0.990784	0.001473	672.7777	0.0000

R-squared	0.008585	Mean dependent var	-0.000166
Adjusted R-squared	0.007867	S.D. dependent var	0.021372
S.E. of regression	0.021288	Akaike info criterion	-5.412298
Sum squared resid	1.251658	Schwarz criterion	-5.397299
Log likelihood	7489.502	Hannan-Quinn criter.	-5.406880
Durbin-Watson stat	2.022153		

Inverted AR Roots	-.03+.18i	-.03-.18i
-------------------	-----------	-----------

Figura A2.4 Estimación modelo seleccionado ARIMA(2,2) del índice Nasdaq con datos semanales

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/16/11 Time: 19:56
 Sample (adjusted): 4 574
 Included observations: 571 after adjustments
 Convergence achieved after 22 iterations
 MA Backcast: 2 3

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000895	0.001750	-0.511479	0.6092
AR(1)	-1.174240	0.060535	-19.39772	0.0000
AR(2)	-0.867041	0.056350	-15.38658	0.0000
MA(1)	1.142483	0.063713	17.93172	0.0000
MA(2)	0.864131	0.059633	14.49088	0.0000

R-squared	0.034457	Mean dependent var	-0.000966
Adjusted R-squared	0.027633	S.D. dependent var	0.042897
S.E. of regression	0.042301	Akaike info criterion	-3.479317
Sum squared resid	1.012763	Schwarz criterion	-3.441249
Log likelihood	998.3450	Hannan-Quinn criter.	-3.464465
F-statistic	5.049659	Durbin-Watson stat	1.983832
Prob(F-statistic)	0.000527		

Inverted AR Roots	-.59+.72i	-.59-.72i
Inverted MA Roots	-.57+.73i	-.57-.73i

Figura A2.5 Estimación modelo seleccionado ARIMA(2,2)-GARCH(2,2) del índice Nasdaq con datos semanales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/16/11 Time: 20:02
 Sample (adjusted): 4 574
 Included observations: 571 after adjustments
 Convergence achieved after 98 iterations
 MA Backcast: 2 3
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 $GARCH = C(6) + C(7)*RESID(-1)^2 + C(8)*RESID(-2)^2 + C(9)*GARCH(-1) + C(10)*GARCH(-2)$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001322	0.000364	3.636536	0.0003
AR(1)	0.511888	0.065876	7.770511	0.0000
AR(2)	0.447646	0.066086	6.773669	0.0000
MA(1)	-0.550768	0.079559	-6.922802	0.0000
MA(2)	-0.447187	0.079407	-5.631604	0.0000
Variance Equation				
C	1.74E-06	1.07E-06	1.631980	0.1027
RESID(-1)^2	0.117881	0.029251	4.029985	0.0001
RESID(-2)^2	-0.114326	0.028672	-3.987390	0.0001
GARCH(-1)	1.703904	0.103101	16.52662	0.0000
GARCH(-2)	-0.710004	0.100268	-7.081085	0.0000
R-squared	-0.002820	Mean dependent var		-0.000966
Adjusted R-squared	-0.009907	S.D. dependent var		0.042897
S.E. of regression	0.043109	Akaike info criterion		-3.859151
Sum squared resid	1.051862	Schwarz criterion		-3.783014
Log likelihood	1111.788	Hannan-Quinn criter.		-3.829447
Durbin-Watson stat	1.988803			
Inverted AR Roots	.97	-.46		
Inverted MA Roots	1.00	-.45		

Figura A2.6 Estimación modelo seleccionado ARIMA(2,2)-EGARCH(1,1) del índice Nasdaq con datos semanales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/16/11 Time: 20:06
 Sample (adjusted): 4 574
 Included observations: 571 after adjustments
 Convergence achieved after 7 iterations
 MA Backcast: 2 3
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 $LOG(GARCH) = C(6) + C(7)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(8)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(9)*LOG(GARCH(-1))$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	4.24E-05	0.001349	0.031460	0.9749
AR(1)	-0.564462	0.040474	-13.94640	0.0000
AR(2)	0.405085	0.039435	10.27229	0.0000
MA(1)	0.539417	0.003133	172.1922	0.0000
MA(2)	-0.435357	0.003495	-124.5611	0.0000
Variance Equation				
C(6)	-0.433802	0.059538	-7.286158	0.0000
C(7)	0.115084	0.044413	2.591242	0.0096
C(8)	-0.143797	0.024560	-5.855002	0.0000
C(9)	0.950123	0.007181	132.3084	0.0000
R-squared	0.005376	Mean dependent var		-0.000966
Adjusted R-squared	-0.001653	S.D. dependent var		0.042897
S.E. of regression	0.042933	Akaike info criterion		-3.860568
Sum squared resid	1.043266	Schwarz criterion		-3.792045
Log likelihood	1111.192	Hannan-Quinn criter.		-3.833834
Durbin-Watson stat	2.004161			
Inverted AR Roots	.41	-.98		
Inverted MA Roots	.44	-.98		

Figura A2.7 Estimación modelo seleccionado ARIMA(2,2) del índice Nasdaq con datos mensuales

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/17/11 Time: 12:30
 Sample (adjusted): 4 132
 Included observations: 129 after adjustments
 Convergence achieved after 18 iterations
 MA Backcast: 2 3

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.003962	0.007546	-0.525048	0.6005
AR(1)	-0.497256	0.040886	-12.16207	0.0000
AR(2)	-0.816689	0.036288	-22.50576	0.0000
MA(1)	0.557523	0.021395	26.05818	0.0000
MA(2)	0.983690	0.011512	85.44564	0.0000
R-squared	0.170819	Mean dependent var	-0.005307	
Adjusted R-squared	0.144071	S.D. dependent var	0.084625	
S.E. of regression	0.078292	Akaike info criterion	-2.218745	
Sum squared resid	0.760082	Schwarz criterion	-2.107899	
Log likelihood	148.1090	Hannan-Quinn criter.	-2.173706	
F-statistic	6.386267	Durbin-Watson stat	1.777286	
Prob(F-statistic)	0.000105			
Inverted AR Roots	-.25+.87i	-.25-.87i		
Inverted MA Roots	-.28+.95i	-.28-.95i		

Figura A2.8 Estimación modelo seleccionado ARIMA(2,2)- GARCH(2,2) del índice Nasdaq con datos mensuales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/17/11 Time: 12:35
 Sample (adjusted): 4 132
 Included observations: 129 after adjustments
 Convergence achieved after 76 iterations
 MA Backcast: 2 3
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 $GARCH = C(6) + C(7)*RESID(-1)^2 + C(8)*RESID(-2)^2 + C(9)*GARCH(-1) + C(10)*GARCH(-2)$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.006768	0.006002	1.127694	0.2594
AR(1)	0.637170	0.025663	24.82793	0.0000
AR(2)	-0.863589	0.023695	-36.44649	0.0000
MA(1)	-0.698141	0.018497	-37.74340	0.0000
MA(2)	0.984331	0.009442	104.2477	0.0000
Variance Equation				
C	0.000187	0.000114	1.639049	0.1012
RESID(-1)^2	0.075909	0.116713	0.650393	0.5154
RESID(-2)^2	0.082858	0.146904	0.564027	0.5727
GARCH(-1)	1.434590	0.197839	7.251293	0.0000
GARCH(-2)	-0.614152	0.142977	-4.295456	0.0000
R-squared	0.156005	Mean dependent var	-0.005307	
Adjusted R-squared	0.128779	S.D. dependent var	0.084625	
S.E. of regression	0.078989	Akaike info criterion	-2.417946	
Sum squared resid	0.773662	Schwarz criterion	-2.196255	
Log likelihood	165.9575	Hannan-Quinn criter.	-2.327869	
Durbin-Watson stat	1.721181			
Inverted AR Roots	.32-.87i	.32+.87i		
Inverted MA Roots	.35+.93i	.35-.93i		

Figura A2.9 Estimación modelo seleccionado ARIMA(2,2)-EGARCH(0,1) del índice Nasdaq con datos mensuales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/17/11 Time: 12:42
 Sample (adjusted): 4 132
 Included observations: 129 after adjustments
 Convergence achieved after 37 iterations
 MA Backcast: 2 3
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 LOG(GARCH) = C(6) + C(7)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(8)
 *LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001856	0.006200	0.299325	0.7647
AR(1)	0.936029	0.020155	46.44250	0.0000
AR(2)	-0.959092	0.016968	-56.52272	0.0000
MA(1)	-0.930651	0.014738	-63.14645	0.0000
MA(2)	0.981489	0.008288	118.4177	0.0000
Variance Equation				
C(6)	-0.522609	0.183277	-2.851471	0.0044
C(7)	-0.247615	0.080783	-3.065204	0.0022
C(8)	0.908802	0.033267	27.31804	0.0000
R-squared	0.068801	Mean dependent var	-0.005307	
Adjusted R-squared	0.038763	S.D. dependent var	0.084625	
S.E. of regression	0.082969	Akaike info criterion	-2.431263	
Sum squared resid	0.853598	Schwarz criterion	-2.253911	
Log likelihood	164.8165	Hannan-Quinn criter.	-2.359201	
Durbin-Watson stat	1.763790			
Inverted AR Roots	.47+.86i	.47-.86i		
Inverted MA Roots	.47+.87i	.47-.87i		

9.3. Anexo 3 NIKKEI 225

Figura A3.1 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1) del índice Nikkei con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/04/11 Time: 20:32
 Sample (adjusted): 3 2717
 Included observations: 2715 after adjustments
 Convergence achieved after 10 iterations
 MA Backcast: 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000213	0.000279	-0.764356	0.4447
AR(1)	0.652482	0.230773	2.827380	0.0047
MA(1)	-0.684281	0.221937	-3.083215	0.0021
R-squared	0.001649	Mean dependent var		-0.000219
Adjusted R-squared	0.000912	S.D. dependent var		0.015977
S.E. of regression	0.015969	Akaike info criterion		-5.435184
Sum squared resid	0.691616	Schwarz criterion		-5.428658
Log likelihood	7381.262	Hannan-Quinn criter.		-5.432825
F-statistic	2.239151	Durbin-Watson stat		1.975902
Prob(F-statistic)	0.106746			
Inverted AR Roots	.65			
Inverted MA Roots	.68			

Figura A3.2 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)-GARCH(1,1) del índice Nikkei con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/11/11 Time: 20:23
 Sample (adjusted): 3 2717
 Included observations: 2715 after adjustments
 Convergence achieved after 16 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000335	0.000243	1.377322	0.1684
AR(1)	0.303356	0.291080	1.042172	0.2973
MA(1)	-0.314349	0.289711	-1.085044	0.2779
Variance Equation				
C	2.89E-06	7.02E-07	4.110737	0.0000
RESID(-1)^2	0.090623	0.009322	9.721604	0.0000
GARCH(-1)	0.899791	0.010519	85.53871	0.0000
R-squared	-0.000371	Mean dependent var		-0.000219
Adjusted R-squared	-0.001108	S.D. dependent var		0.015977
S.E. of regression	0.015986	Akaike info criterion		-5.697043
Sum squared resid	0.693015	Schwarz criterion		-5.683990
Log likelihood	7739.735	Hannan-Quinn criter.		-5.692324
Durbin-Watson stat	2.013219			
Inverted AR Roots	.30			
Inverted MA Roots	.31			

Figura A3.3 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)-EGARCH(1,1) del índice Nikkei con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/11/11 Time: 20:32
 Sample (adjusted): 3 2717
 Included observations: 2715 after adjustments
 Convergence achieved after 25 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 $\text{LOG}(\text{GARCH}) = C(4) + C(5) \cdot \text{ABS}(\text{RESID}(-1)) / \text{SQRT}(\text{GARCH}(-1)) + C(6) \cdot \text{RESID}(-1) / \text{SQRT}(\text{GARCH}(-1)) + C(7) \cdot \text{LOG}(\text{GARCH}(-1))$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	5.50E-06	0.000286	0.019260	0.9846
AR(1)	0.997740	0.002140	466.1943	0.0000
MA(1)	-0.998322	0.001948	-512.5715	0.0000
Variance Equation				
C(4)	-0.365084	0.043968	-8.303378	0.0000
C(5)	0.170451	0.018012	9.463054	0.0000
C(6)	-0.085864	0.009585	-8.958562	0.0000
C(7)	0.972746	0.004244	229.2090	0.0000
R-squared	0.000632	Mean dependent var	-0.000219	
Adjusted R-squared	-0.000105	S.D. dependent var	0.015977	
S.E. of regression	0.015977	Akaike info criterion	-5.716127	
Sum squared resid	0.692320	Schwarz criterion	-5.700899	
Log likelihood	7766.643	Hannan-Quinn criter.	-5.710622	
Durbin-Watson stat	2.036546			
Inverted AR Roots	1.00			
Inverted MA Roots	1.00			

Figura A3.4 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1) del índice Nikkei con datos semanales

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/14/11 Time: 20:36
 Sample (adjusted): 2 625
 Included observations: 624 after adjustments
 Convergence not achieved after 500 iterations
 MA Backcast: 1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000948	0.001191	-0.796011	0.4263
AR(1)	-0.698933	0.222301	-3.144079	0.0017
MA(1)	0.640438	0.239514	2.673912	0.0077
R-squared	0.009188	Mean dependent var	-0.000923	
Adjusted R-squared	0.005997	S.D. dependent var	0.030921	
S.E. of regression	0.030828	Akaike info criterion	-4.115986	
Sum squared resid	0.590180	Schwarz criterion	-4.094658	
Log likelihood	1287.188	Hannan-Quinn criter.	-4.107698	
F-statistic	2.879450	Durbin-Watson stat	1.941474	
Prob(F-statistic)	0.056916			
Inverted AR Roots	-.70			
Inverted MA Roots	-.64			

Figura A3.5 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)-GARCH(1,1) del índice Nikkei con datos semanales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/14/11 Time: 11:51
 Sample (adjusted): 2 625
 Included observations: 624 after adjustments
 Convergence achieved after 54 iterations
 MA Backcast: 1
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000658	0.001186	0.554998	0.5789
AR(1)	-0.588825	0.337587	-1.744218	0.0811
MA(1)	0.572914	0.345310	1.659131	0.0971
Variance Equation				
C	0.000105	2.40E-05	4.365112	0.0000
RESID(-1)^2	0.193844	0.025551	7.586455	0.0000
GARCH(-1)	0.706685	0.047882	14.75905	0.0000
R-squared	0.002752	Mean dependent var	-0.000923	
Adjusted R-squared	-0.000460	S.D. dependent var	0.030921	
S.E. of regression	0.030928	Akaike info criterion	-4.250527	
Sum squared resid	0.594014	Schwarz criterion	-4.207871	
Log likelihood	1332.164	Hannan-Quinn criter.	-4.233951	
Durbin-Watson stat	2.029724			
Inverted AR Roots	-.59			
Inverted MA Roots	-.57			

Figura A3.6 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)-EGARCH(1,1) del índice Nikkei con datos semanales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/14/11 Time: 11:57
 Sample (adjusted): 2 625
 Included observations: 624 after adjustments
 Convergence achieved after 64 iterations
 MA Backcast: 1
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 LOG(GARCH) = C(4) + C(5)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(6)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(7)*LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.000198	0.001137	-0.173946	0.8619
AR(1)	-0.619439	0.253252	-2.445940	0.0144
MA(1)	0.592835	0.264650	2.240069	0.0251
Variance Equation				
C(4)	-1.704759	0.289950	-5.879484	0.0000
C(5)	0.279354	0.051519	5.422372	0.0000
C(6)	-0.205758	0.027633	-7.446205	0.0000
C(7)	0.792098	0.036323	21.80729	0.0000
R-squared	0.006431	Mean dependent var	-0.000923	
Adjusted R-squared	0.003231	S.D. dependent var	0.030921	
S.E. of regression	0.030871	Akaike info criterion	-4.289967	
Sum squared resid	0.591822	Schwarz criterion	-4.240202	
Log likelihood	1345.470	Hannan-Quinn criter.	-4.270629	
Durbin-Watson stat	2.009768			
Inverted AR Roots	-.62			
Inverted MA Roots	-.59			

Figura A3.7 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1) del índice Nikkei con datos mensuales

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/14/11 Time: 12:51
 Sample (adjusted): 3 356
 Included observations: 354 after adjustments
 Convergence achieved after 9 iterations
 MA Backcast: 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000979	0.003623	0.270086	0.7873
AR(1)	0.616644	0.485824	1.269276	0.2052
MA(1)	-0.570374	0.507593	-1.123684	0.2619
R-squared	0.004153	Mean dependent var	0.000785	
Adjusted R-squared	-0.001521	S.D. dependent var	0.060403	
S.E. of regression	0.060449	Akaike info criterion	-2.765595	
Sum squared resid	1.282582	Schwarz criterion	-2.732805	
Log likelihood	492.5104	Hannan-Quinn criter.	-2.752549	
F-statistic	0.731979	Durbin-Watson stat	2.006094	
Prob(F-statistic)	0.481689			
Inverted AR Roots	.62			
Inverted MA Roots	.57			

Figura A3.8 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)- GARCH(1,1) del índice Nikkei con datos mensuales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/14/11 Time: 13:01
 Sample (adjusted): 3 356
 Included observations: 354 after adjustments
 Convergence achieved after 25 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.004766	0.003728	1.278298	0.2011
AR(1)	0.534664	0.378887	1.411143	0.1582
MA(1)	-0.464296	0.405243	-1.145724	0.2519
Variance Equation				
C	0.000275	0.000128	2.146691	0.0318
RESID(-1)^2	0.120521	0.033476	3.600191	0.0003
GARCH(-1)	0.807783	0.056908	14.19463	0.0000
R-squared	0.000412	Mean dependent var	0.000785	
Adjusted R-squared	-0.005283	S.D. dependent var	0.060403	
S.E. of regression	0.060562	Akaike info criterion	-2.834661	
Sum squared resid	1.287400	Schwarz criterion	-2.769079	
Log likelihood	507.7349	Hannan-Quinn criter.	-2.808568	
Durbin-Watson stat	2.047648			
Inverted AR Roots	.53			
Inverted MA Roots	.46			

Figura A3.9 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)-EGARCH(0,1) del índice Nikkei con datos mensuales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/14/11 Time: 20:42
 Sample (adjusted): 3 356
 Included observations: 354 after adjustments
 Convergence achieved after 27 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 $\text{LOG}(\text{GARCH}) = C(4) + C(5) * \text{RESID}(-1) / \text{SQRT}(\text{GARCH}(-1)) + C(6) * \text{LOG}(\text{GARCH}(-1))$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001541	0.004562	0.337857	0.7355
AR(1)	0.770543	0.154136	4.999096	0.0000
MA(1)	-0.675314	0.182093	-3.708612	0.0002
Variance Equation				
C(4)	-0.837484	0.250978	-3.336886	0.0008
C(5)	-0.237884	0.052922	-4.495007	0.0000
C(6)	0.854144	0.043102	19.81688	0.0000
R-squared	-0.001954	Mean dependent var		0.000785
Adjusted R-squared	-0.007663	S.D. dependent var		0.060403
S.E. of regression	0.060634	Akaike info criterion		-2.891532
Sum squared resid	1.290448	Schwarz criterion		-2.825950
Log likelihood	517.8011	Hannan-Quinn criter.		-2.865439
Durbin-Watson stat	2.094486			
Inverted AR Roots	.77			
Inverted MA Roots	.68			

9.4. Anexo 4 S&P 500

Figura A4.1 Estimación modelo seleccionado AR(2) del índice S&P con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/17/11 Time: 18:06
 Sample (adjusted): 4 2768
 Included observations: 2765 after adjustments
 Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-4.02E-05	0.000221	-0.181723	0.8558
AR(1)	-0.091764	0.018960	-4.839999	0.0000
AR(2)	-0.084436	0.018932	-4.459942	0.0000
R-squared	0.014258	Mean dependent var	-3.93E-05	
Adjusted R-squared	0.013544	S.D. dependent var	0.013772	
S.E. of regression	0.013678	Akaike info criterion	-5.744942	
Sum squared resid	0.516751	Schwarz criterion	-5.738514	
Log likelihood	7945.383	Hannan-Quinn criter.	-5.742620	
F-statistic	19.97454	Durbin-Watson stat	1.994338	
Prob(F-statistic)	0.000000			
Inverted AR Roots	-0.05-.29i	-0.05+.29i		

Figura A4.2 Estimación modelo seleccionado AR(2)-GARCH(1,1) del índice S&P con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/17/11 Time: 18:15
 Sample (adjusted): 4 2768
 Included observations: 2765 after adjustments
 Convergence achieved after 12 iterations
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000386	0.000164	2.349107	0.0188
AR(1)	-0.068489	0.021905	-3.126596	0.0018
AR(2)	-0.043175	0.019682	-2.193596	0.0283
Variance Equation				
C	1.21E-06	1.99E-07	6.076635	0.0000
RESID(-1)^2	0.079390	0.007849	10.11441	0.0000
GARCH(-1)	0.913268	0.008186	111.5679	0.0000
R-squared	0.010990	Mean dependent var	-3.93E-05	
Adjusted R-squared	0.010274	S.D. dependent var	0.013772	
S.E. of regression	0.013701	Akaike info criterion	-6.206913	
Sum squared resid	0.518464	Schwarz criterion	-6.194056	
Log likelihood	8587.057	Hannan-Quinn criter.	-6.202269	
Durbin-Watson stat	2.039718			
Inverted AR Roots	-0.03+.20i	-0.03-.20i		

Figura A4.3 Estimación modelo seleccionado AR(2)-EGARCH(1,1) del índice S&P con datos diarios

Dependent Variable: RT
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
Date: 07/17/11 Time: 18:21
Sample (adjusted): 4 2768
Included observations: 2765 after adjustments
Convergence achieved after 18 iterations
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 $LOG(GARCH) = C(4) + C(5)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(6)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(7)*LOG(GARCH(-1))$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	5.09E-05	0.000151	0.336772	0.7363
AR(1)	-0.064777	0.021158	-3.061544	0.0022
AR(2)	-0.027630	0.018991	-1.454932	0.1457

Variance Equation				
C(4)	-0.219322	0.022163	-9.895929	0.0000
C(5)	0.098766	0.012568	7.858606	0.0000
C(6)	-0.115083	0.008780	-13.10808	0.0000
C(7)	0.984412	0.001844	533.9150	0.0000

R-squared	0.010501	Mean dependent var	-3.93E-05
Adjusted R-squared	0.009785	S.D. dependent var	0.013772
S.E. of regression	0.013704	Akaike info criterion	-6.248426
Sum squared resid	0.518721	Schwarz criterion	-6.233427
Log likelihood	8645.449	Hannan-Quinn criter.	-6.243008
Durbin-Watson stat	2.049641		

Inverted AR Roots	-03-.16i	-.03+.16i
-------------------	----------	-----------

Figura A4.4 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1) del índice S&P con datos semanales

Dependent Variable: RT
Method: Least Squares
Date: 07/18/11 Time: 10:45
Sample (adjusted): 3 574
Included observations: 572 after adjustments
Convergence achieved after 16 iterations
MA Backcast: 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000264	0.001111	-0.237227	0.8126
AR(1)	-0.812327	0.147979	-5.489487	0.0000
MA(1)	0.754984	0.166285	4.540303	0.0000

R-squared	0.012101	Mean dependent var	-0.000267
Adjusted R-squared	0.008629	S.D. dependent var	0.027560
S.E. of regression	0.027440	Akaike info criterion	-4.348374
Sum squared resid	0.428441	Schwarz criterion	-4.325564
Log likelihood	1246.635	Hannan-Quinn criter.	-4.339475
F-statistic	3.484973	Durbin-Watson stat	1.989576
Prob(F-statistic)	0.031311		

Inverted AR Roots	-.81
Inverted MA Roots	-.75

Figura A4.5 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)-GARCH(1,1) del índice S&P con datos semanales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/18/11 Time: 10:49
 Sample (adjusted): 3 574
 Included observations: 572 after adjustments
 Convergence achieved after 78 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001494	0.000855	1.746409	0.0807
AR(1)	-0.790797	0.171181	-4.619647	0.0000
MA(1)	0.736294	0.186268	3.952879	0.0001
Variance Equation				
C	3.34E-05	1.05E-05	3.177295	0.0015
RESID(-1)^2	0.200642	0.023257	8.627168	0.0000
GARCH(-1)	0.764625	0.029798	25.66066	0.0000
R-squared	0.007640	Mean dependent var	-0.000267	
Adjusted R-squared	0.004152	S.D. dependent var	0.027560	
S.E. of regression	0.027502	Akaike info criterion	-4.622164	
Sum squared resid	0.430376	Schwarz criterion	-4.576543	
Log likelihood	1327.939	Hannan-Quinn criter.	-4.604367	
Durbin-Watson stat	1.986527			
Inverted AR Roots	-.79			
Inverted MA Roots	-.74			

Figura A4.6 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)-EGARCH(1,1) del índice S&P con datos semanales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/18/11 Time: 10:53
 Sample (adjusted): 3 574
 Included observations: 572 after adjustments
 Convergence achieved after 29 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 LOG(GARCH) = C(4) + C(5)*ABS(RESID(-1))/SQRT(GARCH(-1)) + C(6)*RESID(-1)/SQRT(GARCH(-1)) + C(7)*LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	2.85E-05	0.000927	0.030737	0.9755
AR(1)	-0.758819	0.204575	-3.709248	0.0002
MA(1)	0.719486	0.217081	3.314374	0.0009
Variance Equation				
C(4)	-0.403070	0.073465	-5.486548	0.0000
C(5)	0.088278	0.031274	2.822743	0.0048
C(6)	-0.179218	0.016355	-10.95824	0.0000
C(7)	0.956418	0.008255	115.8547	0.0000
R-squared	0.010486	Mean dependent var	-0.000267	
Adjusted R-squared	0.007008	S.D. dependent var	0.027560	
S.E. of regression	0.027463	Akaike info criterion	-4.697828	
Sum squared resid	0.429142	Schwarz criterion	-4.644604	
Log likelihood	1350.579	Hannan-Quinn criter.	-4.677065	
Durbin-Watson stat	2.028125			
Inverted AR Roots	-.76			
Inverted MA Roots	-.72			

Figura A4.7 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1) del índice S&P con datos mensuales

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/18/11 Time: 11:33
 Sample (adjusted): 3 132
 Included observations: 130 after adjustments
 Convergence achieved after 13 iterations
 MA Backcast: 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000628	0.004759	-0.132000	0.8952
AR(1)	-0.400316	0.268477	-1.491062	0.1384
MA(1)	0.621904	0.230995	2.692277	0.0081
R-squared	0.067015	Mean dependent var		-0.000638
Adjusted R-squared	0.052322	S.D. dependent var		0.048183
S.E. of regression	0.046906	Akaike info criterion		-3.258547
Sum squared resid	0.279419	Schwarz criterion		-3.192373
Log likelihood	214.8055	Hannan-Quinn criter.		-3.231658
F-statistic	4.561121	Durbin-Watson stat		1.998316
Prob(F-statistic)	0.012219			
Inverted AR Roots	-.40			
Inverted MA Roots	-.62			

Figura A4.8 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)-GARCH(1,1) del índice S&P con datos mensuales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/18/11 Time: 12:07
 Sample (adjusted): 3 132
 Included observations: 130 after adjustments
 Convergence achieved after 21 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.003556	0.003935	0.903617	0.3662
AR(1)	-0.475865	0.527416	-0.902257	0.3669
MA(1)	0.565061	0.482061	1.172179	0.2411
Variance Equation				
C	4.90E-05	7.40E-05	0.662248	0.5078
RESID(-1)^2	0.221015	0.085181	2.594636	0.0095
GARCH(-1)	0.780933	0.085707	9.111682	0.0000
R-squared	0.040205	Mean dependent var		-0.000638
Adjusted R-squared	0.025090	S.D. dependent var		0.048183
S.E. of regression	0.047575	Akaike info criterion		-3.390954
Sum squared resid	0.287448	Schwarz criterion		-3.258606
Log likelihood	226.4120	Hannan-Quinn criter.		-3.337176
Durbin-Watson stat	1.747811			
Inverted AR Roots	-.48			
Inverted MA Roots	-.57			

Figura A4.9 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)-EGARCH(0,1) del índice S&P con datos mensuales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/18/11 Time: 12:14
 Sample (adjusted): 3 132
 Included observations: 130 after adjustments
 Convergence achieved after 38 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 LOG(GARCH) = C(4) + C(5)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(6)*LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.000205	0.003956	-0.051944	0.9586
AR(1)	-0.415771	0.331179	-1.255426	0.2093
MA(1)	0.567400	0.285279	1.988934	0.0467
Variance Equation				
C(4)	-0.576421	0.173763	-3.317271	0.0009
C(5)	-0.280387	0.056934	-4.924798	0.0000
C(6)	0.910981	0.028276	32.21705	0.0000
R-squared	0.060641	Mean dependent var	-0.000638	
Adjusted R-squared	0.045848	S.D. dependent var	0.048183	
S.E. of regression	0.047066	Akaike info criterion	-3.445534	
Sum squared resid	0.281328	Schwarz criterion	-3.313186	
Log likelihood	229.9597	Hannan-Quinn criter.	-3.391756	
Durbin-Watson stat	1.866637			
Inverted AR Roots	-.42			
Inverted MA Roots	-.57			

9.5. Anexo 5 Ibex 35

9.5.1. A.5.1 Ibex 35 datos baja frecuencia

Figura A5.1 Estimación modelo seleccionado ARIMA(2,2) del índice IBEX con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 06/18/11 Time: 22:13
 Sample (adjusted): 4 2778
 Included observations: 2775 after adjustments
 Convergence achieved after 14 iterations
 MA Backcast: 2 3

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-4.06E-05	0.000283	-0.143634	0.8858
AR(1)	0.161193	0.018833	8.559172	0.0000
AR(2)	-0.949034	0.018266	-51.95557	0.0000
MA(1)	-0.185916	0.021668	-8.580364	0.0000
MA(2)	0.933053	0.021288	43.82986	0.0000
R-squared	0.012814	Mean dependent var	-3.49E-05	
Adjusted R-squared	0.011388	S.D. dependent var	0.015332	
S.E. of regression	0.015244	Akaike info criterion	-5.527452	
Sum squared resid	0.643697	Schwarz criterion	-5.516771	
Log likelihood	7674.340	Hannan-Quinn criter.	-5.523595	
F-statistic	8.988846	Durbin-Watson stat	2.003586	
Prob(F-statistic)	0.000000			
Inverted AR Roots	.08-.97i	.08+.97i		
Inverted MA Roots	.09-.96i	.09+.96i		

Figura A5.2 Estimación modelo seleccionado ARIMA(2,2)-GARCH(2,1) del índice IBEX con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 06/20/11 Time: 20:22
 Sample (adjusted): 4 2778
 Included observations: 2775 after adjustments
 Convergence achieved after 55 iterations
 MA Backcast: 2 3
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(6) + C(7)*RESID(-1)^2 + C(8)*RESID(-2)^2 + C(9)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000657	0.000203	3.242318	0.0012
AR(1)	0.172543	0.011273	15.30559	0.0000
AR(2)	-0.968561	0.009202	-105.2500	0.0000
MA(1)	-0.179766	0.013526	-13.29000	0.0000
MA(2)	0.957459	0.011187	85.58867	0.0000
Variance Equation				
C	2.88E-06	5.12E-07	5.618348	0.0000
RESID(-1)^2	0.052377	0.019221	2.725031	0.0064
RESID(-2)^2	0.079853	0.021346	3.740848	0.0002
GARCH(-1)	0.859849	0.012322	69.78398	0.0000
R-squared	0.008053	Mean dependent var	-3.49E-05	
Adjusted R-squared	0.006621	S.D. dependent var	0.015332	
S.E. of regression	0.015281	Akaike info criterion	-5.902442	
Sum squared resid	0.646801	Schwarz criterion	-5.883215	
Log likelihood	8198.639	Hannan-Quinn criter.	-5.895499	
Durbin-Watson stat	2.033394			
Inverted AR Roots	.09-.98i	.09+.98i		
Inverted MA Roots	.09-.97i	.09+.97i		

Figura A5.3 Estimación modelo seleccionado ARIMA(2,2)-EGARCH(1,1) del índice IBEX con datos diarios

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 06/23/11 Time: 20:29
 Sample (adjusted): 4 2778
 Included observations: 2775 after adjustments
 Convergence achieved after 23 iterations
 MA Backcast: 2 3
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 $LOG(GARCH) = C(6) + C(7)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(8)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(9)*LOG(GARCH(-1))$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000171	0.000197	0.865519	0.3868
AR(1)	-0.447339	0.007021	-63.71723	0.0000
AR(2)	-0.985344	0.007484	-131.6616	0.0000
MA(1)	0.449257	0.006136	73.21283	0.0000
MA(2)	0.988707	0.006456	153.1343	0.0000
Variance Equation				
C(6)	-0.284323	0.028543	-9.961219	0.0000
C(7)	0.128879	0.014461	8.912068	0.0000
C(8)	-0.118710	0.007714	-15.38832	0.0000
C(9)	0.979242	0.002489	393.4090	0.0000
R-squared	0.002351	Mean dependent var	-3.49E-05	
Adjusted R-squared	0.000910	S.D. dependent var	0.015332	
S.E. of regression	0.015325	Akaike info criterion	-5.939138	
Sum squared resid	0.650519	Schwarz criterion	-5.919910	
Log likelihood	8249.553	Hannan-Quinn criter.	-5.932194	
Durbin-Watson stat	2.050753			
Inverted AR Roots	-.22+.97i	-.22-.97i		
Inverted MA Roots	-.22-.97i	-.22+.97i		

Figura A5.4 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1) del índice IBEX con datos semanales

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 06/27/11 Time: 14:00
 Sample (adjusted): 3 574
 Included observations: 572 after adjustments
 Convergence achieved after 9 iterations
 MA Backcast: 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000212	0.001280	-0.165267	0.8688
AR(1)	-0.838433	0.112792	-7.433428	0.0000
MA(1)	0.768554	0.132553	5.798101	0.0000
R-squared	0.016915	Mean dependent var	-0.000220	
Adjusted R-squared	0.013460	S.D. dependent var	0.032056	
S.E. of regression	0.031840	Akaike info criterion	-4.050986	
Sum squared resid	0.576826	Schwarz criterion	-4.028176	
Log likelihood	1161.582	Hannan-Quinn criter.	-4.042088	
F-statistic	4.895220	Durbin-Watson stat	2.004141	
Prob(F-statistic)	0.007800			
Inverted AR Roots	-.84			
Inverted MA Roots	-.77			

Figura A5.5 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)-EGARCH(1,1) del índice IBEX con datos semanales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 06/27/11 Time: 14:55
 Sample (adjusted): 3 574
 Included observations: 572 after adjustments
 Convergence achieved after 70 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 $\text{LOG}(\text{GARCH}) = C(4) + C(5) \cdot \text{ABS}(\text{RESID}(-1) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)}) + C(6) \cdot \text{RESID}(-1) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)} + C(7) \cdot \text{LOG}(\text{GARCH}(-1))$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.023322	0.111376	0.209398	0.8341
AR(1)	0.999665	0.001652	605.0060	0.0000
MA(1)	-0.995663	0.001079	-923.0945	0.0000
Variance Equation				
C(4)	-0.126967	0.041295	-3.074631	0.0021
C(5)	-0.044448	0.014672	-3.029522	0.0024
C(6)	-0.141652	0.020042	-7.067645	0.0000
C(7)	0.976948	0.006231	156.7852	0.0000
R-squared	-0.003869	Mean dependent var		-0.000220
Adjusted R-squared	-0.007397	S.D. dependent var		0.032056
S.E. of regression	0.032174	Akaike info criterion		-4.387822
Sum squared resid	0.589021	Schwarz criterion		-4.334598
Log likelihood	1261.917	Hannan-Quinn criter.		-4.367058
Durbin-Watson stat	2.168842			
Inverted AR Roots	1.00			
Inverted MA Roots	1.00			

Figura A5.6 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1) del índice IBEX con datos mensuales

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 06/27/11 Time: 17:38
 Sample (adjusted): 3 132
 Included observations: 130 after adjustments
 Convergence achieved after 6 iterations
 MA Backcast: 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.001389	0.005766	-0.240798	0.8101
AR(1)	-0.482672	0.261478	-1.845940	0.0672
MA(1)	0.631917	0.237362	2.662244	0.0088
R-squared	0.027229	Mean dependent var		-0.001878
Adjusted R-squared	0.011909	S.D. dependent var		0.060175
S.E. of regression	0.059816	Akaike info criterion		-2.772293
Sum squared resid	0.454395	Schwarz criterion		-2.706119
Log likelihood	183.1990	Hannan-Quinn criter.		-2.745404
F-statistic	1.777416	Durbin-Watson stat		2.064186
Prob(F-statistic)	0.173254			
Inverted AR Roots	-.48			
Inverted MA Roots	-.63			

Figura A5.7 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)-GARCH(0,1) del índice IBEX con datos mensuales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/16/11 Time: 11:32
 Sample (adjusted): 3 132
 Included observations: 130 after adjustments
 Convergence achieved after 17 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(4) + C(5)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.002406	0.006357	-0.378564	0.7050
AR(1)	-0.410403	0.251093	-1.634465	0.1022
MA(1)	0.574214	0.237901	2.413664	0.0158
Variance Equation				
C	0.000508	0.000948	0.535532	0.5923
GARCH(-1)	0.858959	0.269475	3.187526	0.0014
R-squared	0.026327	Mean dependent var	-0.001878	
Adjusted R-squared	0.010994	S.D. dependent var	0.060175	
S.E. of regression	0.059843	Akaike info criterion	-2.749203	
Sum squared resid	0.454816	Schwarz criterion	-2.638914	
Log likelihood	183.6982	Hannan-Quinn criter.	-2.704389	
Durbin-Watson stat	2.088646			
Inverted AR Roots	-.41			
Inverted MA Roots	-.57			

Figura A5.8 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)-EGARCH(0,1) del índice IBEX con datos semanales

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/16/11 Time: 11:38
 Sample (adjusted): 3 132
 Included observations: 130 after adjustments
 Convergence achieved after 37 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 LOG(GARCH) = C(4) + C(5)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(6)
 *LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000182	0.005144	0.035461	0.9717
AR(1)	-0.270797	0.343978	-0.787251	0.4311
MA(1)	0.388646	0.337086	1.152957	0.2489
Variance Equation				
C(4)	-0.820748	0.301698	-2.720425	0.0065
C(5)	-0.290682	0.091073	-3.191742	0.0014
C(6)	0.858493	0.052565	16.33216	0.0000
R-squared	0.020895	Mean dependent var	-0.001878	
Adjusted R-squared	0.005476	S.D. dependent var	0.060175	
S.E. of regression	0.060010	Akaike info criterion	-2.903247	
Sum squared resid	0.457353	Schwarz criterion	-2.770899	
Log likelihood	194.7110	Hannan-Quinn criter.	-2.849470	
Durbin-Watson stat	2.013638			
Inverted AR Roots	-.27			
Inverted MA Roots	-.39			

9.5.2. A.5.2 Ibox 35 datos alta frecuencia

Figura A5.9 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1) del índice IBEX con datos 5 minutos

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/23/11 Time: 12:07
 Sample (adjusted): 3 287070
 Included observations: 287068 after adjustments
 Convergence achieved after 10 iterations
 MA Backcast: 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-6.41E-07	2.66E-06	-0.241412	0.8092
AR(1)	-0.529865	0.082970	-6.386213	0.0000
MA(1)	0.542095	0.082213	6.593770	0.0000

R-squared	0.000219	Mean dependent var	-6.48E-07
Adjusted R-squared	0.000212	S.D. dependent var	0.001412
S.E. of regression	0.001412	Akaike info criterion	-10.28811
Sum squared resid	0.572049	Schwarz criterion	-10.28800
Log likelihood	1476696.	Hannan-Quinn criter.	-10.28807
F-statistic	31.50280	Durbin-Watson stat	2.003935
Prob(F-statistic)	0.000000		

Inverted AR Roots	-.53
Inverted MA Roots	-.54

Figura A5.10 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)-GARCH(2,2) del índice IBEX con datos 5 minutos

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/23/11 Time: 12:18
 Sample (adjusted): 3 287070
 Included observations: 287068 after adjustments
 Convergence achieved after 90 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*RESID(-2)^2 + C(7)*GARCH(-1) + C(8)*GARCH(-2)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	1.47E-08	7.19E-07	0.020486	0.9837
AR(1)	-0.596973	0.112623	-5.300624	0.0000
MA(1)	0.598535	0.112412	5.324475	0.0000

Variance Equation				
C	2.10E-08	1.17E-10	178.6771	0.0000
RESID(-1)^2	0.384519	0.001061	362.3870	0.0000
RESID(-2)^2	-0.110529	0.001549	-71.33726	0.0000
GARCH(-1)	0.406078	0.003240	125.3327	0.0000
GARCH(-2)	0.396498	0.002653	149.4393	0.0000

R-squared	0.000063	Mean dependent var	-6.48E-07
Adjusted R-squared	0.000056	S.D. dependent var	0.001412
S.E. of regression	0.001412	Akaike info criterion	-10.80543
Sum squared resid	0.572139	Schwarz criterion	-10.80513
Log likelihood	1550954.	Hannan-Quinn criter.	-10.80534
Durbin-Watson stat	1.982843		

Inverted AR Roots	-.60
Inverted MA Roots	-.60

Figura A5.11 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)-EGARCH(2,2) del índice IBEX con datos 5 minutos

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/23/11 Time: 12:46
 Sample (adjusted): 3 287070
 Included observations: 287068 after adjustments
 Convergence achieved after 47 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

$$\text{LOG}(\text{GARCH}) = C(4) + C(5) \cdot \text{ABS}(\text{RESID}(-1)) \cdot \sqrt{\text{GARCH}(-1)} + C(6) \cdot \text{ABS}(\text{RESID}(-2)) \cdot \sqrt{\text{GARCH}(-2)} + C(7) \cdot \text{RESID}(-1) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)} + C(8) \cdot \text{LOG}(\text{GARCH}(-1)) + C(9) \cdot \text{LOG}(\text{GARCH}(-2))$$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-2.71E-06	9.49E-07	-2.853604	0.0043
AR(1)	-0.993006	0.001915	-518.5808	0.0000
MA(1)	0.993498	0.001833	541.9589	0.0000

Variance Equation				
C(4)	-0.517964	0.002216	-233.7401	0.0000
C(5)	0.477897	0.001014	471.4591	0.0000
C(6)	-0.150900	0.001764	-85.54040	0.0000
C(7)	-0.007890	0.000491	-16.05987	0.0000
C(8)	0.583912	0.003454	169.0537	0.0000
C(9)	0.393601	0.003383	116.3452	0.0000

R-squared	0.000049	Mean dependent var	-6.48E-07
Adjusted R-squared	0.000042	S.D. dependent var	0.001412
S.E. of regression	0.001412	Akaike info criterion	-10.83870
Sum squared resid	0.572147	Schwarz criterion	-10.83837
Log likelihood	1555731.	Hannan-Quinn criter.	-10.83861
Durbin-Watson stat	1.980686		

Inverted AR Roots	-.99
Inverted MA Roots	-.99

Figura A5.12 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,2) del índice IBEX con datos 10 minutos

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/23/11 Time: 17:42
 Sample (adjusted): 3 143755
 Included observations: 143753 after adjustments
 Convergence achieved after 9 iterations
 MA Backcast: 1 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-1.25E-06	5.41E-06	-0.230139	0.8180
AR(1)	0.672107	0.110369	6.089654	0.0000
MA(1)	-0.682215	0.110369	-6.181194	0.0000
MA(2)	0.016214	0.002642	6.137484	0.0000

R-squared	0.000273	Mean dependent var	-1.28E-06
Adjusted R-squared	0.000252	S.D. dependent var	0.002014
S.E. of regression	0.002014	Akaike info criterion	-9.577658
Sum squared resid	0.582900	Schwarz criterion	-9.577383
Log likelihood	688412.5	Hannan-Quinn criter.	-9.577576
F-statistic	13.07151	Durbin-Watson stat	1.999921
Prob(F-statistic)	0.000000		

Inverted AR Roots	.67
Inverted MA Roots	.66 .02

Figura A5.13 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,2)-GARCH(1,1) del índice IBEX con datos 10 minutos

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/23/11 Time: 17:48
 Sample (adjusted): 3 143755
 Included observations: 143753 after adjustments
 Convergence achieved after 29 iterations
 MA Backcast: 1 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(5) + C(6)*RESID(-1)^2 + C(7)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	1.76E-06	2.24E-06	0.785964	0.4319
AR(1)	0.456464	0.045062	10.12969	0.0000
MA(1)	-0.448616	0.045044	-9.959463	0.0000
MA(2)	0.024652	0.002073	11.89154	0.0000
Variance Equation				
C	7.87E-08	4.78E-10	164.6558	0.0000
RESID(-1)^2	0.281330	0.001174	239.6360	0.0000
GARCH(-1)	0.785681	0.000646	1216.727	0.0000
R-squared	-0.000447	Mean dependent var	-1.28E-06	
Adjusted R-squared	-0.000468	S.D. dependent var	0.002014	
S.E. of regression	0.002014	Akaike info criterion	-10.02139	
Sum squared resid	0.583320	Schwarz criterion	-10.02091	
Log likelihood	720309.6	Hannan-Quinn criter.	-10.02125	
Durbin-Watson stat	2.034965			
Inverted AR Roots	.46			
Inverted MA Roots	.38	.06		

Figura A5.14 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,2)-EGARCH(2,2) del índice IBEX con datos 10 minutos

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/23/11 Time: 18:14
 Sample (adjusted): 3 143755
 Included observations: 143753 after adjustments
 Convergence achieved after 78 iterations
 MA Backcast: 1 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 LOG(GARCH) = C(5) + C(6)*ABS(RESID(-1))/SQRT(GARCH(-1)) + C(7)*ABS(RESID(-2))/SQRT(GARCH(-2)) + C(8)*RESID(-1)/SQRT(GARCH(-1)) + C(9)*LOG(GARCH(-1)) + C(10)*LOG(GARCH(-2))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	1.96E-06	2.21E-06	0.886270	0.3755
AR(1)	0.401910	0.061191	6.568140	0.0000
MA(1)	-0.401706	0.061122	-6.572151	0.0000
MA(2)	0.024277	0.001883	12.88950	0.0000
Variance Equation				
C(5)	-1.328797	0.006517	-203.8907	0.0000
C(6)	0.308060	0.001219	252.7805	0.0000
C(7)	0.324909	0.001204	269.9020	0.0000
C(8)	0.002337	0.000131	17.78752	0.0000
C(9)	-0.036491	0.000217	-168.4835	0.0000
C(10)	0.965613	0.000216	4478.396	0.0000
R-squared	-0.000089	Mean dependent var	-1.28E-06	
Adjusted R-squared	-0.000110	S.D. dependent var	0.002014	
S.E. of regression	0.002014	Akaike info criterion	-10.07920	
Sum squared resid	0.583111	Schwarz criterion	-10.07851	
Log likelihood	724467.6	Hannan-Quinn criter.	-10.07900	
Durbin-Watson stat	2.020192			
Inverted AR Roots	.40			
Inverted MA Roots	.33	.07		

Figura A5.15 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1) del índice IBEX con datos 15 minutos

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/25/11 Time: 17:50
 Sample (adjusted): 3 96783
 Included observations: 96781 after adjustments
 Convergence achieved after 9 iterations
 MA Backcast: 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-1.83E-06	8.27E-06	-0.220983	0.8251
AR(1)	0.903428	0.044207	20.43655	0.0000
MA(1)	-0.897963	0.045374	-19.79034	0.0000
R-squared	0.000163	Mean dependent var	-1.88E-06	
Adjusted R-squared	0.000143	S.D. dependent var	0.002434	
S.E. of regression	0.002433	Akaike info criterion	-9.199061	
Sum squared resid	0.573043	Schwarz criterion	-9.198767	
Log likelihood	445150.1	Hannan-Quinn criter.	-9.198971	
F-statistic	7.909583	Durbin-Watson stat	2.006743	
Prob(F-statistic)	0.000367			
Inverted AR Roots	.90			
Inverted MA Roots	.90			

Figura A5.16 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)-GARCH(1,1) del índice IBEX con datos 15 minutos

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/25/11 Time: 17:54
 Sample (adjusted): 3 96783
 Included observations: 96781 after adjustments
 Convergence achieved after 37 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	7.23E-06	3.86E-06	1.872874	0.0611
AR(1)	0.577701	0.059693	9.677802	0.0000
MA(1)	-0.552918	0.060934	-9.074090	0.0000
Variance Equation				
C	1.68E-07	1.28E-09	130.9690	0.0000
RESID(-1)^2	0.273861	0.001568	174.7003	0.0000
GARCH(-1)	0.773657	0.000905	854.6757	0.0000
R-squared	-0.000295	Mean dependent var	-1.88E-06	
Adjusted R-squared	-0.000315	S.D. dependent var	0.002434	
S.E. of regression	0.002434	Akaike info criterion	-9.583132	
Sum squared resid	0.573306	Schwarz criterion	-9.582545	
Log likelihood	463738.6	Hannan-Quinn criter.	-9.582954	
Durbin-Watson stat	2.045249			
Inverted AR Roots	.58			
Inverted MA Roots	.55			

Figura A5.17 Estimación modelo seleccionado ARIMA(1,1)-EGARCH(2,2) del índice IBEX con datos 15 minutos

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/25/11 Time: 18:19
 Sample (adjusted): 3 96783
 Included observations: 96781 after adjustments
 Convergence achieved after 87 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

$$\text{LOG}(\text{GARCH}) = C(4) + C(5) \cdot \text{ABS}(\text{RESID}(-1) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)}) + C(6) \cdot \text{ABS}(\text{RESID}(-2) / \sqrt{\text{GARCH}(-2)}) + C(7) \cdot \text{RESID}(-1) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)} + C(8) \cdot \text{LOG}(\text{GARCH}(-1)) + C(9) \cdot \text{LOG}(\text{GARCH}(-2))$$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	8.46E-06	4.49E-06	1.884423	0.0595
AR(1)	0.971416	0.006958	139.6088	0.0000
MA(1)	-0.971141	0.006992	-138.8903	0.0000

Variance Equation				
C(4)	-0.060250	0.000819	-73.55495	0.0000
C(5)	0.068919	0.000919	74.95301	0.0000
C(6)	-0.012927	0.000956	-13.52747	0.0000
C(7)	-0.035945	0.000429	-83.76939	0.0000
C(8)	0.050435	0.001114	45.28916	0.0000
C(9)	0.947715	0.001108	855.3257	0.0000

R-squared	0.000060	Mean dependent var	-1.88E-06
Adjusted R-squared	0.000039	S.D. dependent var	0.002434
S.E. of regression	0.002433	Akaike info criterion	-9.681199
Sum squared resid	0.573103	Schwarz criterion	-9.680318
Log likelihood	468487.1	Hannan-Quinn criter.	-9.680931
Durbin-Watson stat	1.996146		

Inverted AR Roots	.97
Inverted MA Roots	.97

Figura A5.18 Estimación modelo seleccionado MA(1) del índice IBEX con datos 30 minutos

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/26/11 Time: 19:42
 Sample (adjusted): 2 49785
 Included observations: 49784 after adjustments
 Convergence achieved after 4 iterations
 MA Backcast: 1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-3.65E-06	1.54E-05	-0.236490	0.8131
MA(1)	0.016526	0.004481	3.687798	0.0002

R-squared	0.000274	Mean dependent var	-3.65E-06
Adjusted R-squared	0.000254	S.D. dependent var	0.003386
S.E. of regression	0.003385	Akaike info criterion	-8.538768
Sum squared resid	0.570480	Schwarz criterion	-8.538414
Log likelihood	212549.0	Hannan-Quinn criter.	-8.538657
F-statistic	13.66376	Durbin-Watson stat	1.999912
Prob(F-statistic)	0.000219		

Inverted MA Roots	-.02
-------------------	------

Figura A5.19 Estimación modelo seleccionado MA(1)-GARCH(2,2) del índice IBEX con datos 30 minutos

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/26/11 Time: 19:51
 Sample (adjusted): 2 49785
 Included observations: 49784 after adjustments
 Convergence achieved after 64 iterations
 MA Backcast: 1
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*RESID(-2)^2 + C(6)
 *GARCH(-1) + C(7)*GARCH(-2)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	4.22E-05	1.04E-05	4.067882	0.0000
MA(1)	0.028418	0.005053	5.623939	0.0000
Variance Equation				
C	2.47E-09	2.27E-10	10.86840	0.0000
RESID(-1)^2	0.042914	0.001527	28.09577	0.0000
RESID(-2)^2	-0.035933	0.001299	-27.65570	0.0000
GARCH(-1)	1.505391	0.037319	40.33802	0.0000
GARCH(-2)	-0.512434	0.036750	-13.94362	0.0000
R-squared	-0.000041	Mean dependent var	-3.65E-06	
Adjusted R-squared	-0.000061	S.D. dependent var	0.003386	
S.E. of regression	0.003386	Akaike info criterion	-8.977793	
Sum squared resid	0.570660	Schwarz criterion	-8.976553	
Log likelihood	223482.2	Hannan-Quinn criter.	-8.977404	
Durbin-Watson stat	2.023407			
Inverted MA Roots	-.03			

Figura A5.20 Estimación modelo seleccionado MA(1)-EGARCH(2,2) del índice IBEX con datos 30 minutos

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/26/11 Time: 19:59
 Sample (adjusted): 2 49785
 Included observations: 49784 after adjustments
 Convergence achieved after 22 iterations
 MA Backcast: 1
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 LOG(GARCH) = C(3) + C(4)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) +
 C(5)*ABS(RESID(-2)/@SQRT(GARCH(-2))) + C(6)*RESID(-1)
 /@SQRT(GARCH(-1)) + C(7)*LOG(GARCH(-1)) + C(8)
 *LOG(GARCH(-2))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	4.73E-05	8.71E-06	5.428361	0.0000
MA(1)	0.019304	0.003595	5.369962	0.0000
Variance Equation				
C(3)	-0.103142	0.001950	-52.88348	0.0000
C(4)	0.026646	0.000931	28.63204	0.0000
C(5)	0.070398	0.000772	91.13484	0.0000
C(6)	-0.020918	0.000677	-30.88327	0.0000
C(7)	-0.002442	0.000107	-22.73504	0.0000
C(8)	0.999356	0.000107	9337.605	0.0000
R-squared	0.000049	Mean dependent var	-3.65E-06	
Adjusted R-squared	0.000029	S.D. dependent var	0.003386	
S.E. of regression	0.003386	Akaike info criterion	-9.022096	
Sum squared resid	0.570609	Schwarz criterion	-9.020680	
Log likelihood	224586.0	Hannan-Quinn criter.	-9.021653	
Durbin-Watson stat	2.005045			
Inverted MA Roots	-.02			

Figura A5.21 Estimación modelo seleccionado ARMA(1,1) del índice IBEX con datos 60 minutos

Dependent Variable: RT
 Method: Least Squares
 Date: 07/27/11 Time: 11:13
 Sample (adjusted): 3 24928
 Included observations: 24926 after adjustments
 Convergence achieved after 10 iterations
 MA Backcast: 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-6.86E-06	3.22E-05	-0.213065	0.8313
AR(1)	0.758507	0.112298	6.754421	0.0000
MA(1)	-0.746024	0.114740	-6.501852	0.0000
R-squared	0.000376	Mean dependent var	-7.13E-06	
Adjusted R-squared	0.000296	S.D. dependent var	0.004830	
S.E. of regression	0.004830	Akaike info criterion	-7.828015	
Sum squared resid	0.581313	Schwarz criterion	-7.827037	
Log likelihood	97563.55	Hannan-Quinn criter.	-7.827698	
F-statistic	4.689266	Durbin-Watson stat	1.999415	
Prob(F-statistic)	0.009202			
Inverted AR Roots	.76			
Inverted MA Roots	.75			

Figura A5.22 Estimación modelo seleccionado ARMA(1,1)-GARCH(1,1) del índice IBEX con datos 60 minutos

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/27/11 Time: 11:17
 Sample (adjusted): 3 24928
 Included observations: 24926 after adjustments
 Convergence achieved after 23 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	7.86E-05	2.20E-05	3.571726	0.0004
AR(1)	0.676503	0.125612	5.385662	0.0000
MA(1)	-0.658490	0.128371	-5.129602	0.0000
Variance Equation				
C	2.35E-08	1.64E-09	14.30332	0.0000
RESID(-1)^2	0.025687	0.000531	48.39741	0.0000
GARCH(-1)	0.973809	0.000546	1784.908	0.0000
R-squared	0.000051	Mean dependent var	-7.13E-06	
Adjusted R-squared	-0.000029	S.D. dependent var	0.004830	
S.E. of regression	0.004830	Akaike info criterion	-8.249593	
Sum squared resid	0.581502	Schwarz criterion	-8.247637	
Log likelihood	102820.7	Hannan-Quinn criter.	-8.248960	
Durbin-Watson stat	2.009856			
Inverted AR Roots	.68			
Inverted MA Roots	.66			

Figura A5.23 Estimación modelo seleccionado ARMA(1,1)-EGARCH(1,1) del índice IBEX con datos 60 minutos

Dependent Variable: RT
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 07/27/11 Time: 11:23
 Sample (adjusted): 3 24928
 Included observations: 24926 after adjustments
 Convergence achieved after 23 iterations
 MA Backcast: 2
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 LOG(GARCH) = C(4) + C(5)*ABS(RESID(-1))/SQRT(GARCH(-1)) +
 C(6)*RESID(-1)/SQRT(GARCH(-1)) + C(7)*LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	9.96E-07	2.94E-05	0.033908	0.9730
AR(1)	0.988035	0.002947	335.2493	0.0000
MA(1)	-0.982286	0.003636	-270.1843	0.0000

Variance Equation				
C(4)	-0.063094	0.002379	-26.52563	0.0000
C(5)	0.047411	0.001372	34.56065	0.0000
C(6)	-0.048097	0.001228	-39.17595	0.0000
C(7)	0.997325	0.000182	5494.819	0.0000

R-squared	-0.001049	Mean dependent var	-7.13E-06
Adjusted R-squared	-0.001129	S.D. dependent var	0.004830
S.E. of regression	0.004833	Akaike info criterion	-8.276859
Sum squared resid	0.582142	Schwarz criterion	-8.274578
Log likelihood	103161.5	Hannan-Quinn criter.	-8.276121
Durbin-Watson stat	1.983174		

Inverted AR Roots	.99
Inverted MA Roots	.98