MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volume 9(2), 2016 doi: 10.4995/msel.2016.4523.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada
Universitat Politècnica de València

Curvas en el espacio: un laboratorio virtual

Curves in the space: a virtual laboratory

F. Giménez-Palomares, J. A. Monsoriu
Universitat Politècnica de València
fgimenez@mat.upv.es, jmonsori@fis.upv.es

Abstract

La teoría de las curvas en el plano y en el espacio forma parte fundamental en la formación en geometría de un futuro ingeniero, arquitecto, físico o matemático. En este trabajo presentamos un laboratorio virtual interactivo dedicado a la visualización de las propiedades más importantes de las curvas: el triedro de Frenet, la curvatura, la torsión, etc. con la idea de que los alumnos puedan adquirir y afianzar más rápidamente sus conocimientos sobre el tema.

The theory of curves in the plane and in the space is a fundamental part in the formation in geometry of a future engineer, architect, physicist or mathematician. We present here an interactive virtual laboratory developed to visualize the most important properties of curves: Frenet trihedron, curvature, torsion, etc. with the aim of students acquiring and strengthening their knowledge on the subject more quickly.

Keywords: Virtual laboratory, Matlab©, tangent vector, normal vector, binormal vector, curvature, center of curvature, torsión, osculating circle, involute

Palabras clave: Laboratorio virtual, Matlab©, vector tangente, vector normal, vector binormal, curvatura, centro de curvatura, torsión, circunferencia osculatriz, evoluta

1 Introducción

El uso de las nuevas tecnologías dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje ha ido adquiriendo durante los últimos años cada vez más importancia, lo que ha permitido que los alumnos pueden adquirir más fácilmente competencias y capacidades (Benito, 2006). En este sentido se debe de destacar las posibilidades que ofrece el uso de del ordenador, con sus enormes capacidades de cálculo y gráficas, en la enseñanza de asignaturas de carácter técnico y científico, facilitando la transmisión de conocimientos. La utilización por parte de los alumnos de los laboratorios virtuales permiten trabajar eficientemente muchos conceptos de los campos de las matemáticas, física, ingeniería, etc. de manera que el estudiante adquiere un papel activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Depcik, 2005).

En este trabajo presentamos una Interfaz Gráfica de Usuario (GUI) de Matlab que puede utilizarse en las prácticas docentes de aquellas asignaturas universitarias que estudien la teoría de curvas en el espacio. El laboratorio virtual permite visualizar de forma dinámica las propiedades geométricas de una curva tales como la curvatura, la torsión, la longitud de arco, los vectores tangentes, normales y binormales, el círculo osculador, la evoluta, etc. Pueden consultarse las referencias (Barragán, 2014) y (Mathworks, 2015) sobre las GUI de Matlab.

Otros trabajos relacionados con el uso de laboratorios virtuales y herramientas informáticas para el estudio de curvas son los de GIEMATIC, (Benitez, 2012), (Mora, 2012) y (Cuadrado, 2015). En el trabajo se presenta un laboratorio virtual enfocado al estudio de las propiedades geométricas de las curvas en tres dimensiones por parte de los alumnos de ingeniería y arquitectura. Se comienza introduciendo los conceptos de vector tangente, vector normal, vector binormal, triedro de Frenet, longitud de arco, curvatura, centro de curvatura, torsión, circunferencia osculatriz, evoluta, etc. y se dan las expresiones que permiten su cálculo. A continuación se presenta detalladamente la interfaz gráfica de usuario de Matlab. Por medio de ejemplos se muestra en tiempo real información gráfica y analítica de cada uno de los distintos conceptos que se han estudiado previamente en función del parámetro que define la curva, de manera que el alumno pueda afianzarlos y comprenderlos mejor.

Una de las características de la aplicación es que se obtiene información relevante sobre las curvas a partir de *gráficos animados* para cada uno de los conceptos que se estudian, de forma que se aprecia de forma dinámica la variación de las propiedades geométricas a lo largo de los distintos puntos de la curva, en función de los valores del parámetro que la define.

Se ha diseñado esta herramienta para su uso tanto en las aulas informáticas como en ordenadores particulares, aunque no se disponga del paquete Matlab©, ya que se ha generado una versión ejecutable de la misma. En cualquier caso se facilitará al alumno una guía detallada del laboratorio virtual con una descripción de los distintos parámetros de la aplicación y acompañada de ejemplos ilustrativos.

Con la herramienta que hemos desarrollado se intenta afianzar los conocimientos teóricos adquiridos por los alumnos sobre la teoría de curvas en el espacio, dedicando una especial atención a:

- Visualización de los vectores tangentes, normales y binormales (triedro de Frenet) a una curva generada a partir de su expresión en coordenadas cartesianas, paramétricas.
- Establecer diferencias entre las distintas parametrizaciones que puede tener una curva.
- Interpretación de una curva en paramétricas y sus propiedades a partir del movimiento de un punto.

- Conocimiento del concepto de longitud de arco y valoración de su importancia en la geometría (parametrización).
- Obtención e interpretación geométrica de la curvatura y la torsión a lo largo de los puntos de la curva.
- Conocimiento y visualización de los conceptos de centro de curvatura, circunferencia osculatriz, evoluta y su relación con la curvatura.
- Estudio de los distintos tipos de coordenadas más usados para la definición de curvas.
- Estudio de alguna de las curvas espaciales más famosas.

2 Fundamentos teóricos

Una curva puede considerarse como una línea continua de una dimensión, que varía de dirección paulatinamente. Normalmente una curva se puede obtener como la traza $\alpha(I)$ de una aplicación $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, donde I es un intervalo. Se dice que la curva $C = \alpha(I)$ está *parametrizada por* α.

Si α es diferenciable se llama *vector tangente* o *vector velocidad* a $\alpha'(t)$. El vector tangente unitario es $T = \alpha'(t)/\|\alpha'(t)\|$ si $\alpha'(t) \neq 0$. Si además $\alpha''(t) \neq 0$ se llama *vector binormal unitario* a

$$B = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t))}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|},$$

donde $\wedge$ indica el producto vectorial. Se llama *vector normal unitario* a

$$N = B \wedge T.$$

La función *longitud de arco* $s : I \to \mathbb{R}^3$ se define por $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$ donde a es el extremo izquierdo de I.

La *curvatura de* α en el punto t se define por

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}. \tag{1}$$

Se sabe que la curvatura de una curva mide la desviación de ésta respecto a una dirección prefijada. Es una medida de cómo cambia el campo de vectores tangentes. Si la curva está parametrizada por la longitud de arco la Ecuación 1 se reduce a

$$k(t) = \|\alpha''(t)\|. \tag{2}$$

La *torsión* se define por la expresión

$$\tau(t) = \frac{\|\alpha'(t)\big(\alpha''(t) \wedge \alpha'''(t)\big)\|}{\|\alpha''(t)\|^2}. \tag{3}$$

Mide el cambio de dirección del vector binormal: cuanto más rápido cambia, más rápido gira el vector binormal alrededor del vector tangente y más retorcida aparece la curva.

El *círculo osculador* a una curva en un punto dado es una circunferencia cuyo centro se encuentra sobre plano que contiene a los vectores tangente y normal (*plano osculador*) y tiene la misma curvatura que la curva dada en ese punto. Al centro y el radio de este círculo se les conoce como *centro de curvatura* y *radio de curvatura* respectivamente. El radio de curvatura solo está definido si $\alpha'(t) \neq 0$ y coincide con $1/k(t)$. Se llama *evoluta* al lugar geométrico de los centros de curvatura.

Para profundizar sobre la geometría de curvas se pueden consultar las referencias (Roman, 2013), (Puente, 2007) y (Lastra, 2015).

3 El laboratorio virtual

La aplicación CURVA3D que presentamos puede verse en la Figura 1. Debajo del título se encuentran los campos donde el usuario introduce los parámetros de entrada.

Los parámetros de entrada son:

- Expresión de la curva: campo en donde el usuario debe de introducir la expresión que define la curva. El parámetro tiene que ser forzosamente t. Por ejemplo para la hélice circular se escribiría $[t, \cos(t), \sin(t)]$.
- Para la multiplicación, división y potencias hay que utilizar los operadores de Matlab© `.*`, `./` y `.^`.
- Valor inicial: corresponde al valor inicial del parámetro t.
- Resolución: número de puntos usados para dibujar la curva.
- Velocidad: valor entre 0 y 1 que permite controlar la velocidad de la animación.
- Gráfico animado: si se selecciona se muestra una visualización dinámica.
- t: muestra una visualización estática correspondiente al punto $\alpha(t)$ de la curva.
- Tipo de gráfica: curva, longitud de arco, curvatura, torsión y círculo osculador y evoluta. Si previamente se ha marcado la casilla de gráfico animado entonces
  - En el caso de seleccionar *curva* se genera un gráfico en movimiento del triedro de Frenet a lo largo de la curva. En color rojo aparece el vector tangente, en magenta el vector normal y en verde el vector binormal.
  - En el caso de seleccionar *círculo osculador* se visualiza un punto que se va moviendo a lo largo de la curva en función del parámetro que la define, el círculo correspondiente círculo osculador y la evoluta.
  - En el resto de casos se generan dos gráficos dinámicos: el primero muestra un punto que se va moviendo a lo largo de la curva en función del parámetro que la define y el segundo a un punto que se va moviendo a lo largo de la representación gráfica de la longitud de arco, curvatura y torsión según el caso.

  Si no se ha marcado la casilla de *gráfico animado* entonces se muestran las correspondientes visualizaciones estáticas correspondientes al punto de la curva determinado por t. El botón Pulsar botón procede a la generación de los gráficos.

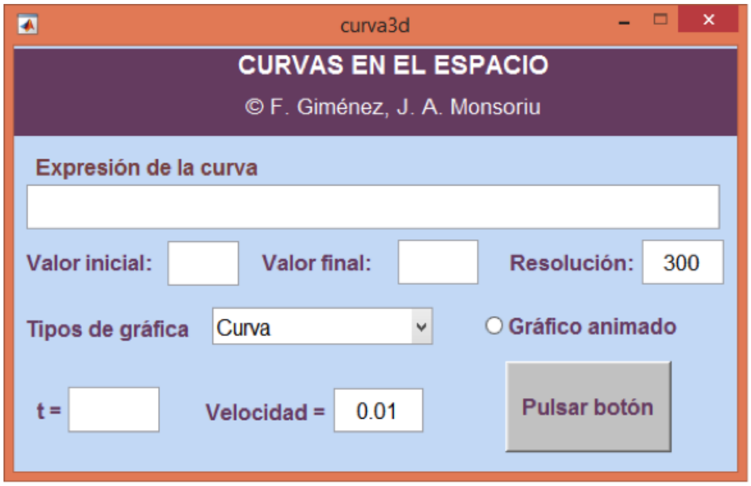

Figura 1 – Interfaz del laboratorio virtual.

3.1 Ejemplo

En este ejemplo se muestra una captura correspondiente a la hélice circular

$$\begin{aligned} x &= \cos(t) \\ y &= \operatorname{sen}(t) \\ z &= t \end{aligned}$$

para $t \in [0, 6\pi]$ y al triedro de Frenet en $t = 10.6541$.

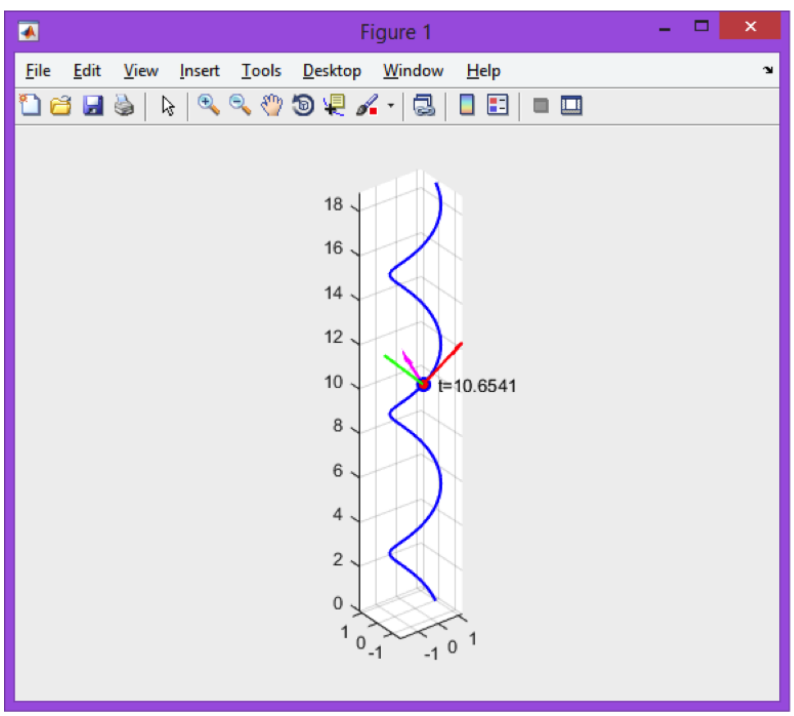

Figura 2 – Gráfica de la hélice circular y el triedro de Frenet.

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

3.2 Ejemplo

En la siguiente figura se muestra las gráficas de la curva $\alpha(t) = (t, t^2, t^3), t \in [0, 3]$ y su longitud de arco. Se puede apreciar que la función longitud de arco no es lineal en este caso. Puede observarse como la longitud de arco adquiere mayor pendiente en los puntos donde crece o decrece más rápidamente la curva.

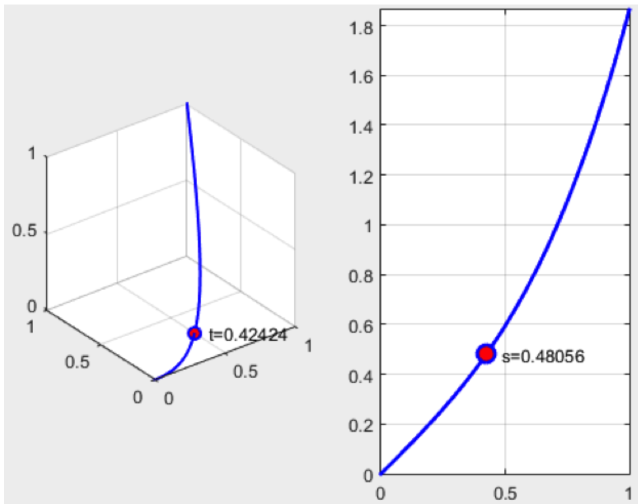

Figura 3 – Gráfica de la curva del ejemplo y su longitud de arco.

3.3 Ejemplo

Las siguientes tres figuras presentan las gráficas de la curvatura, torsión y varias capturas del círculo osculador correspondientes a diversos valores del parámetro de la curva

$$\alpha(t) = \big((1 + 2\cos(2t))\cos(t), (1 + 2\cos(2t))\operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(2t)\big), t \in [0, 2\pi] (\text{nodo toroidal}).$$

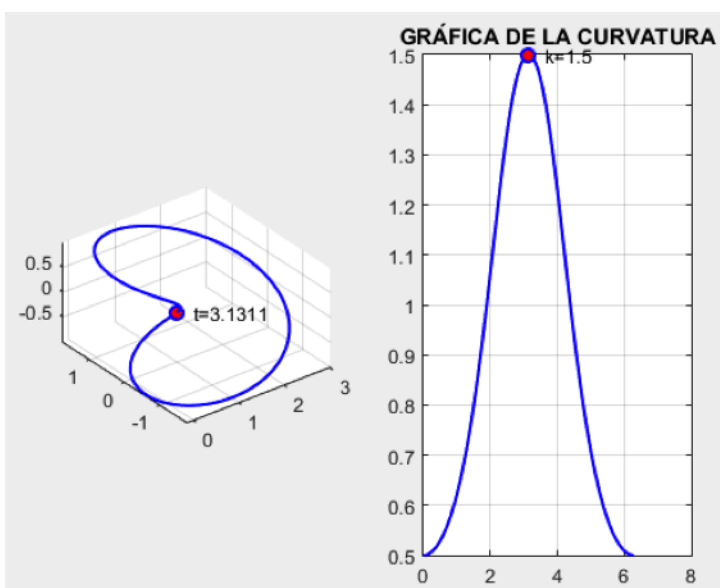

Figura 4 – Gráfica de la curva del ejemplo y de su curvatura.

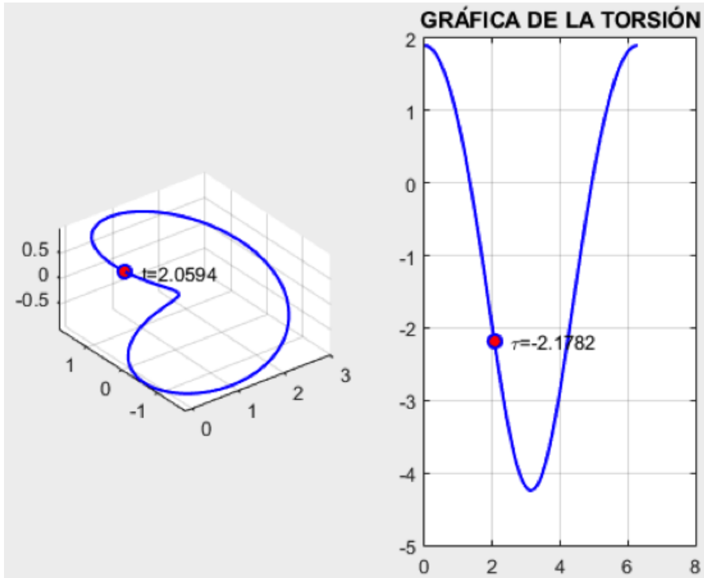

Figura 5 – Gráfica de la curva del ejemplo y de su torsión.

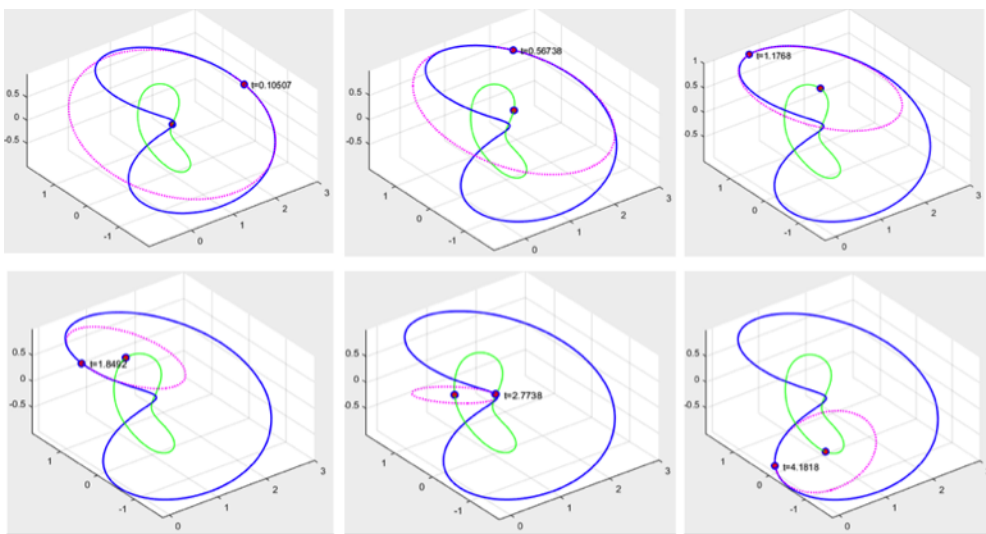

Figura 6 – Gráfica de la curva del ejemplo, de su círculo osculador y de su evoluta.

4 Resultados

Con está herramienta creemos que el alumno podrá asimilar más fácilmente los conceptos relacionados con la teoría de curvas espaciales, de manera que la información de tipo gráfico que aporta el laboratorio virtual ayude a la compresión de la parte teórica.

Se propone la siguiente metodología a seguir en las asignaturas de matemáticas de las ingenierías y, en general, en aquellas disciplinas de carácter científico en donde se necesita conocer y manejar la geometría diferencial de curvas:

1) Introducción en las clases habituales de aula de los conceptos teóricos necesarios.

2) En las clases de laboratorio de ordenador se explicará con detalle como se usa la herramienta docente para obtener información relativa a las curvas y sus propiedades.

3) Se propondrán una serie de ejercicios ilustrativos en donde los alumnos tengan que deducir a partir de la información gráfica proporcionada por la aplicación informática aspectos relacionados con las propiedades geométricas de las curvas. A continuación se trataría de que los estudiantes resuelvan algunos de loa problemas planteados de forma analítica.

Para valorar la incidencia de esta metodología se propone la realización de una pequeña encuesta al final de la sesión práctica.

Los pasos 2) y 3) propuestos también son susceptibles de realizarse de manera autónoma y autodidacta por parte del alumno en su propio ordenador, incluso aunque el alumno no disponga del paquete de software Matlab en su casa, mediante el uso de una versión ejecutable del laboratorio virtual que hemos desarrollado. Se facilitará al alumno una guía detallada del laboratorio virtual.

5 Conclusiones

El laboratorio virtual y la propuesta metodológica se ha diseñado para su utilización en aquellas asignaturas de matemáticas de los primeros cursos de ingeniería en donde se estudien en profundidad la teoría de curvas. La sencillez de manejo, rapidez, opciones gráficas e interactividad pueden ser útiles a la hora de profundizar sobre muchos de los conceptos geométricos que se estudian. También pueden utilizarse en clases de expresión gráfica.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Instituto de Ciencias de la Educación de la Universitat Politècnica de València por su ayuda al Equipo de Innovación y Calidad Educativa MOMA.

Referencias

Barragan, D (2015).
La web de MATLAB, SIMULINK, VHDL, microcontroladores,...
http://www.matpic.com

Benitez, J. (2008).
Curvas rectificables.
Universitat Politècnica de València https://riunet.upv.es/handle/10251/2021.

Benito, A., Portela, A., Rodríguez, R. M. (2006).
Análisis de la enseñanza de la Física en Europa: el fomento de competencias generales en estudiantes universitario.
Revista Iberoamericana de Educación, número 38/7.

Cordero, L. A., Fernández, M., Gray, A. (1995).
Geometría diferencial de curvas y superficies.
Addison-Wesley Iberoamericana.

Cuadrado, J. A. (2015).
Aplicaciones educativas para dibujo técnico.
http://jcuadra2.wix.com/cuadrado#!dibujo-tcnico/c1rvq

Depcik, C., Assanis, D. N. (2005).
Graphical user interfaces in an engineer in educational environment.
Comput. Appl. Eng. Educ. 13.

GIEMATIC UC (2012).
http://www.giematic.unican.es/variasVariables/laboratorios/CurvasSuperficies/indexgie.html

Lastra, A. (2015).
Geometría de curvas y superficies con aplicaciones en arquitectura.
Ed. Paraninfo.

MATHWORKS, (2015).
MATLAB® Creating Graphical User Interfaces.
The MathWorks, Inc.

Mora, J. A. (2012).
Taller: Rectas y curvas de colores.
http://jmora7.com/Color/index.htm

Puente, M. J. (2007).
Curvas algebraicas y planas.
Servicio Publicaciones Universidad de Cádiz.

Roman, J. de B. (2013).
Curvas planas y en el espacio.
García Maroto Editores.

Zoido, R. J. (2008).
Curvas y superficies en la arquitectura.
Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en la Ingeniería y la Arquitectura.

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL