

Using virtual laboratories for teaching and learning in theory of elasticity

Utilización de laboratorios virtuales para la enseñanza y el aprendizaje de la elasticidad

Antonio José Jiménez Mocholí, Fernando Giménez-Palomares, Andrés Lapuebla-Ferri
 UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
ajimene@mes.upv.es, fgimenez@dma.upv.es, anlafer0@mes.upv.es

Abstract

Linear Elasticity is a discipline that studies the elastic solids which generate a mechanical response in linear elastic regime under external forces. In particular, is of special interest to study the stresses and strains at any point of the solid, which is known as the elastic problem. In Elasticity it is necessary to know the so-called state of stress in the differential environment of a point of the elastic solid, and also the associated deformations.

To this end, in this paper we present the virtual laboratories TENSIONES and DEFORMACIONES, made with the package MATLAB[®] through its graphical user interface (GUI). These two virtual laboratories can represent the states of stresses and strains at a point from user-entered variables, and are able to obtain the values of the stresses and strains for any other direction. These applications are excellent tools for teaching and learning the elastic problem in engineering degree courses.

La Elasticidad Lineal es una disciplina que estudia los sólidos elásticos que, bajo fuerzas externas, generan una respuesta mecánica en régimen elástico y lineal. En particular, es de especial interés el estudio de las tensiones y las deformaciones en un punto cualquiera del sólido, lo que se conoce como problema elástico. En Elasticidad es necesario conocer el denominado estado tensional en el entorno diferencial de un punto del sólido elástico, así como las deformaciones asociadas a las tensiones actuantes.

Con este fin, en el presente trabajo se presentan los laboratorios virtuales TENSIONES y DEFORMACIONES, elaborados con el paquete MATLAB[®] a través de su interfaz gráfica de usuario (GUI). Estos dos laboratorios virtuales permiten representar los estados de tensiones y deformaciones en un punto a partir de unas variables introducidas por el usuario, pudiendo obtener también los valores de las tensiones y deformaciones para cualquier otra dirección. Estas aplicaciones constituyen una excelente herramienta de enseñanza y aprendizaje del problema elástico en las titulaciones de grado en ingeniería.

Keywords: Tridimensional Stress States, Intrinsic Components, Principal Stress Directions, Principal Strains, Cauchy's Formula, Longitudinal Strains, Shearing Strains.

Palabras clave: Estados tensionales tridimensionales, Componentes intrínsecas, Tensiones y direcciones principales, Deformaciones principales, Fórmula de Cauchy, Deformaciones longitudinales, Distorsiones angulares.

1 Introducción

Hoy en día el uso de las nuevas tecnologías va adquiriendo una mayor importancia en la enseñanza de asignaturas de carácter técnico-científico. Estos medios posibilitan una interacción y un ritmo de aprendizaje individuales, a la vez que generan de modo realista las situaciones apropiadas sobre las que el estudiante puede actuar (León & Vizcarro, 1997). Actualmente, los profesores disponen de muchas más herramientas para planificar la docencia que la pizarra, las transparencias y los libros (Bartolomé, 2004). En particular, los laboratorios virtuales fomentan un aprendizaje constructivista y pueden convertirse en una buena herramienta para la transmisión de conocimientos. Gracias a ellos, la propia experiencia del estudiante adquiere una gran relevancia dada su interactividad al permitir permiten trabajar de manera sencilla con modelos que representan fenómenos matemáticos y físicos. Así, el alumno puede llegar a comprender más fácilmente dichos modelos y, al aprender por cuenta propia, se fomenta su capacidad de análisis, el pensamiento crítico y la utilización de la tecnología informática (Vázquez, 2009), (Duffy & Jonassen, 1992).

La Mecánica del Sólido Deformable, a diferencia de la Mecánica del Sólido Rígido, estudia el comportamiento de cuerpos que se deforman al ser sometidos a cargas exteriores. Estas deformaciones quedan materializadas en forma de movimientos relativos entre los puntos del cuerpo y llevan asociadas la aparición de fuerzas internas que en última instancia se traducen en deformaciones y tensiones, respectivamente. La determinación de estas deformaciones y tensiones en todo punto del sólido constituye el objeto de la Elasticidad (Gere & Timoshenko, 1992), (Popov, 2000), (Jiménez et al., 2012). Esta materia es necesaria en los recorridos curriculares relacionados con la Ingeniería Civil o la Ingeniería Mecánica.

En el presente trabajo se presentan los laboratorios virtuales TENSIONES y DEFORMACIONES que permiten obtener y representar el estado tensional en un punto a partir de unas variables introducidas por el usuario. Los laboratorios virtuales, programados mediante el programa matemático multifunción MATLAB[®] como una interfaz gráfica de usuario GUI (Mathworks, 2008), (MathPic, (n.d.)) permiten representar el estado tensional en un punto, dibujar y cuantificar las tensiones y las deformaciones que se originan e interpretar la influencia de las mismas en el resultado final. No son necesarios conocimientos informáticos de programación, aunque sí lo son los concernientes a la materia Elasticidad. Sobre las GUI's en general puede consultarse la referencia (Depcik & Assanis, 2005).

2 Estado tensional en un punto un sólido elástico

Si se considera un sólido elástico en equilibrio estático bajo una serie de fuerzas exteriores y se le realiza un corte transversal, en cada uno de los puntos de la sección de corte aparecerán una serie de fuerzas internas que son las que impiden que las dos partes del sólido elástico se separen.

Dado un elemento de sección dA sometido a una fuerza $d\mathbf{F}$, se define el vector tensión en un punto P de una superficie cuyo vector normal es \mathbf{n} como (Figura 1)

$$\mathbf{T}_{\mathbf{n}} = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{F}}{dA} \quad (1)$$

El vector tensión $\mathbf{T}_{\mathbf{n}}$ proporciona información acerca de la distribución de las fuerzas internas

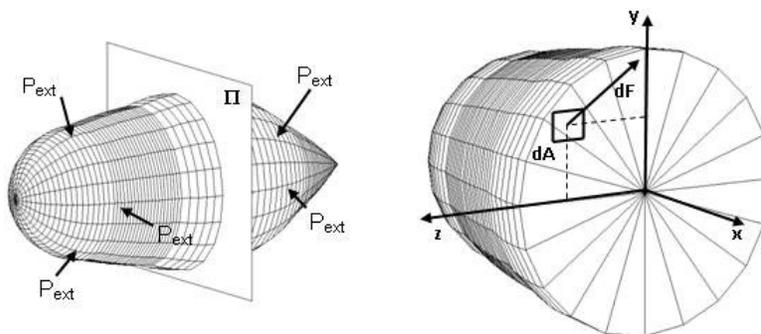


Figura 1: Concepto de tensión en un punto.

en cada punto de la sección de corte, y especialmente su intensidad y direccionalidad. El vector tensión depende del punto P del sólido y del plano de corte π caracterizado por su vector normal \mathbf{n} . Sin embargo, el vector tensión no proporciona directamente una información útil, pues los materiales responden de manera distinta a las fuerzas que tienden a separar las superficies entre sí que a las fuerzas que tienden a que las superficies deslicen entre sí. Se hace necesario representar la tensión en un punto de un sólido elástico mediante sus dos proyecciones fundamentales con respecto a la superficie: la tensión normal σ_n y la tensión tangencial τ_n .

2.1 Componentes intrínsecas del vector tensión

Para descomponer el vector \mathbf{T}_n en sus dos componentes intrínsecas σ_n y τ_n , basta con operar de la forma indicada en la Ecuación (2). Dichas componentes son independientes del sistema de referencia (Figura 2).

$$\sigma_n = \mathbf{T}_n \cdot \mathbf{n}, \quad \tau_n = \sqrt{\mathbf{T}_n \cdot \mathbf{T}_n - \sigma_n^2} \tag{2}$$

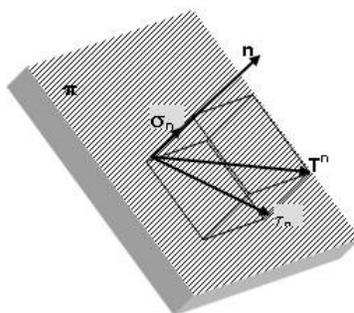


Figura 2: Componentes intrínsecas (normal y tangencial) del vector tensión.

2.2 Matriz de tensiones de Cauchy

En la mayoría de las aplicaciones, la definición del estado tensional en un punto a través de un vector es poco útil, ya que existen infinitos planos de corte que pasan por el mismo, y en consecuencia infinitos vectores tensión posibles. Sería deseable buscar una forma de caracterizar el estado de tensiones con independencia del plano de corte, utilizando unos ejes coordenados de referencia, para luego poder obtener las tensiones en un plano de corte particular (como por ejemplo un plano de soldadura).

Para ello, cada punto P del sólido se caracteriza por un volumen diferencial formado por un cubo de aristas diferenciales, pudiendo interpretarse cada una de las caras de dicho cubo como un plano de corte en el entorno del punto, en cuyas caras aparecen las correspondientes componentes intrínsecas σ_n y τ_n de los respectivos vectores tensión. De este modo, en cada punto P , una vez escogidos unos ejes coordenados, se pueden agrupar las distintas componentes en forma de una matriz (σ) que define el estado tensional de P y que incluye las componentes de los tres vectores tensión anteriores. Dicha matriz se denomina matriz o tensor de tensiones de Cauchy, y consta de 9 componentes independientes (Figura 3).

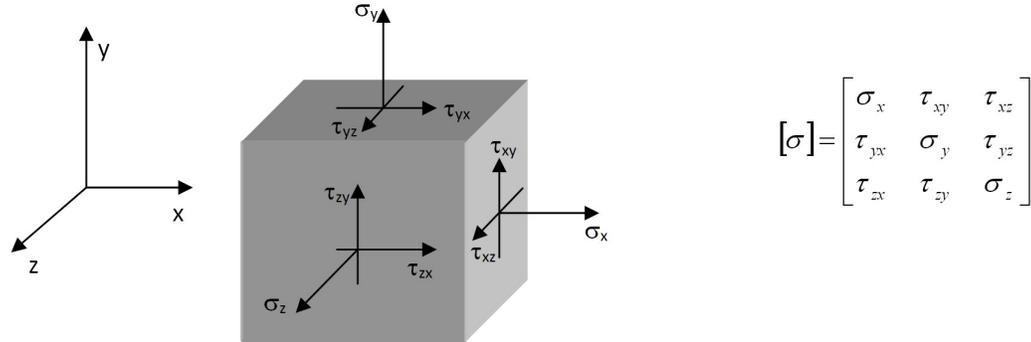


Figura 3: Estado tensional en el entorno de un punto y matriz de tensiones de Cauchy asociada.

2.3 Fórmula de Cauchy

Conocida la matriz de tensiones de Cauchy (σ) respecto de un sistema de referencia dado, a través de la Fórmula de Cauchy es posible obtener las componentes del vector tensión en cualquier otro plano que no coincida con los planos coordenados utilizados para formar la matriz, pudiendo obtenerse así información del conjunto infinito de tensiones que pueden aparecer en ese punto del sólido elástico. Si se considera un elemento tetraédrico diferencial en el entorno de un punto del sólido elástico y se estudia el equilibrio del mismo, puede obtenerse el vector tensión \mathbf{T}_n sobre la superficie $d\mathbf{s}$, cuyo vector normal es $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ (Figura 4)

$$\mathbf{T}_n = (\sigma_n)^T \cdot \mathbf{n}, \quad \text{obien} \quad \begin{pmatrix} T_x^n \\ T_y^n \\ T_z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (3)$$

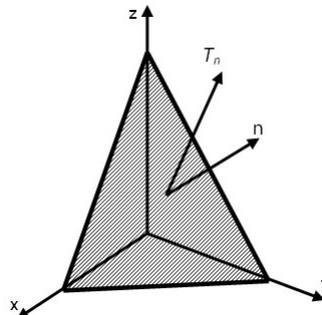


Figura 4: Vector tensión T_n sobre un elemento tridimensional con un plano inclinado.

2.4 Tensiones y direcciones principales

La matriz de tensiones es siempre simétrica y real, luego es diagonalizable. Los 3 autovalores de (σ) son $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, también números reales e independientes del sistema de referencia empleado, y se denominan *tensiones principales*. Los correspondientes autovectores $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ son las *direcciones principales*. Físicamente, los valores propios acotan los valores de las componentes intrínsecas normales de los infinitos vectores tensión en un punto, mientras que las direcciones principales representan los planos de corte en los cuales no existen tensiones tangenciales. Se insiste en el hecho de que los materiales no presentan el mismo comportamiento bajo tensiones normales que bajo tensiones tangenciales.

3 Deformaciones y movimientos

Cuando se aplican fuerzas sobre un sólido elástico este se deforma y, como consecuencia de ello, se generan tensiones en cada punto (Sección 2.2). La deformación del sólido está relacionada con el movimiento relativo de sus puntos. Cuando se deforma un sólido elástico, el movimiento de cada uno de sus puntos se define por la variación de sus coordenadas, denominándose habitualmente $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ a los movimientos de un punto en las direcciones $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ respectivamente.

Si se considera un sólido elástico y se estudia la mecánica de los desplazamientos y deformaciones que experimenta un entorno diferencial de lados paralelos situado en el punto P se observa la transformación sufrida por dicho elemento diferencial puede considerarse como suma de 4 fases independientes, pero simultáneas: traslación de sólido rígido, rotación de sólido rígido, deformación longitudinal (de las aristas del elemento) y deformación angular (de los ángulos que forman dichas aristas). Las dos primeras fases corresponden a movimientos de sólido rígido que no implican tensiones ni deformaciones del elemento, mientras que las dos deformaciones son producidas respectivamente por las tensiones normales y las tensiones tangenciales.

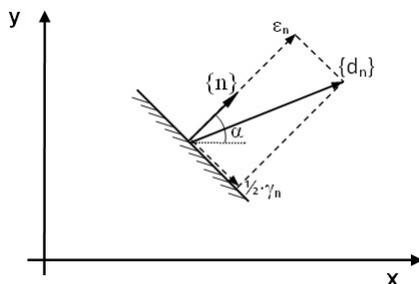
4 Matriz de deformaciones de Cauchy

En Elasticidad son conocidas las relaciones entre deformaciones longitudinales y deformaciones angulares con los movimientos de los puntos de un sólido. En un sólido elástico, los movimientos $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ de un punto P permiten definir la matriz de deformaciones de Cauchy (ε) :

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4)$$

La matriz de deformaciones (ε) es simétrica, luego también se puede hablar de deformaciones principales $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ y de las correspondientes direcciones principales de deformación $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. En medios continuos homogéneos e isótropos las direcciones principales de tensiones y deformaciones coinciden. Conocida (ε) en un punto P , a partir de la fórmula de Cauchy, puede obtenerse el vector deformación $d\mathbf{n}$, correspondiente a un plano caracterizado por su vector normal exterior \mathbf{n} (Figura 5)

$$d\mathbf{n} = (\varepsilon) \cdot \mathbf{n} \quad (5)$$

Figura 5: Componentes intrínsecas del vector deformación \mathbf{d}_n .

El vector deformación tiene asimismo dos componentes intrínsecas: la componente normal ε_n representa la deformación longitudinal en esa dirección, mientras que la componente transversal $\frac{1}{2}\gamma_n$, representa la deformación angular.

5 Leyes de Hooke generalizadas

Las Leyes de Hooke generalizadas relacionan las componentes de las matrices de tensiones (σ) y de deformaciones (ε), asumiendo para ello un comportamiento lineal para el material. Si se considera el estado tensional tridimensional de la Figura 6, las Leyes de Hooke generalizadas se escriben de la forma (6), donde (E, G, ν) son las denominadas constantes elásticas del material que caracterizan su comportamiento elástico, y se obtienen a través de ensayos.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)), & \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)), & \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_x)), & \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{cases} \quad (6)$$

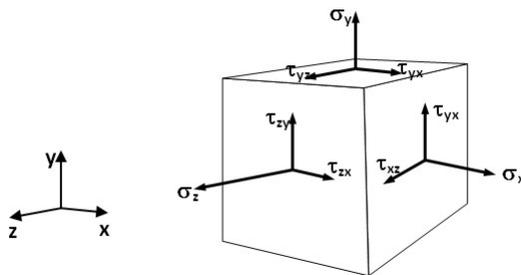


Figura 6: Estado tridimensional de tensiones.

En un material isótropo, las tensiones tangenciales τ_{ij} no intervienen en las deformaciones producidas por las tensiones normales σ_i . Análogamente, las deformaciones normales ε_i no dependen de las tensiones tangenciales τ_{ij} .

6 Descripción de los laboratorios virtuales tensiones y deformaciones

Los laboratorios virtuales Tensiones y Deformaciones que se presentan están desarrollados como una GUI de MATLAB[®], siendo fácilmente implementables como una aplicación web interactiva que no requiere ni el paquete MATLAB[®] ni conocimientos específicos de programación con su código propio.

Los laboratorios virtuales muestran información gráfica y numérica referida al estado tensional inicial, el estado de deformaciones producido por estas tensiones y los estados de tensiones y deformaciones principales. Los parámetros de entrada son las componentes de la matriz de tensiones de Cauchy en las direcciones (x, y, z), el vector \mathbf{n} perpendicular a una superficie inclinada dada y, en el caso del laboratorio Deformaciones, también las constantes elásticas E y ν .

Los laboratorios virtuales presentan una salida gráfica que resulta de gran utilidad, permitiendo representar diversas opciones que se seleccionan mediante un sencillo menú desplegable. En ambos laboratorios virtuales y para cualquiera de las opciones, el usuario puede rotar todas las imágenes situándose sobre las figuras, manejando simplemente el ratón.

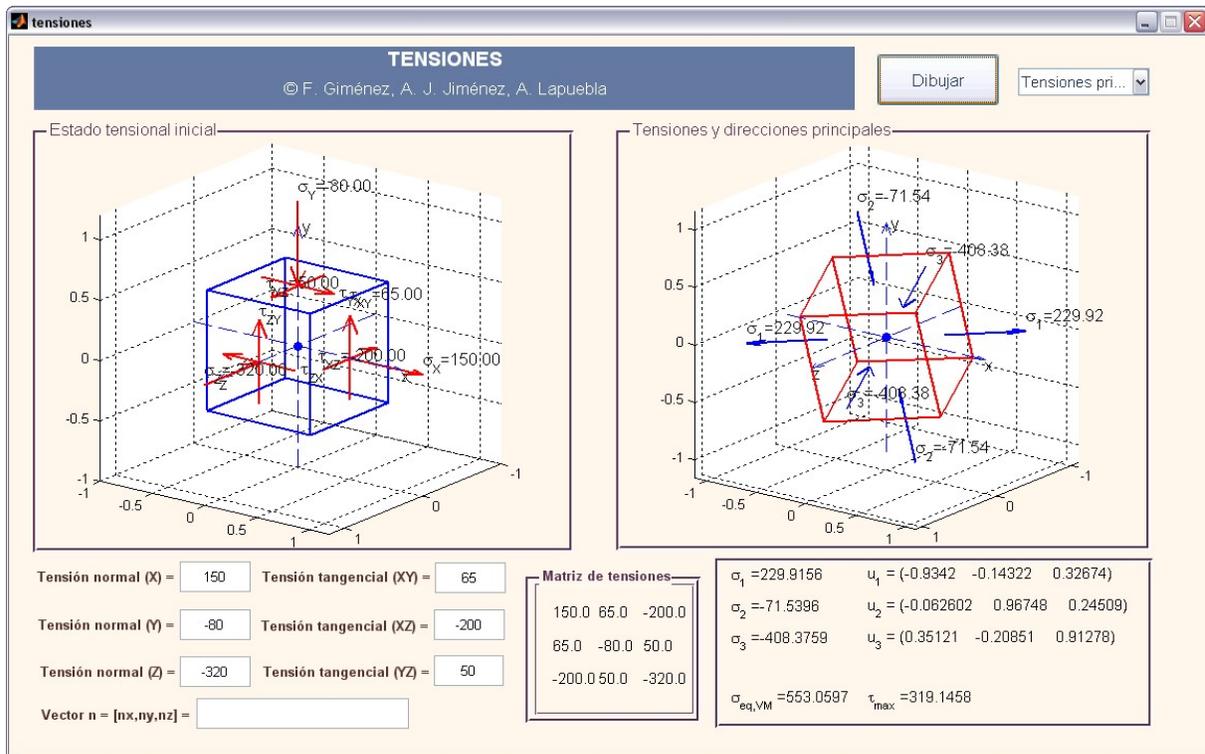


Figura 7: Resultados del laboratorio virtual TENSIONES: opción “Tensiones principales”.

El laboratorio virtual TENSIONES muestra los siguientes parámetros de salida: tensiones y direcciones principales, planos de tensión tangencial máxima y tensión equivalente de Von Mises $\sigma_{qe,VM}$. En las Figuras 7, 8 y 9 se muestran las opciones del laboratorio virtual TENSIONES.

Por su parte, en el laboratorio virtual DEFORMACIONES se presentan: la deformación del elemento referida a los ejes (x, y, z), las direcciones principales de las deformaciones y sus valores, así como el aspecto deformado del elemento diferencial referido a los ejes principales.

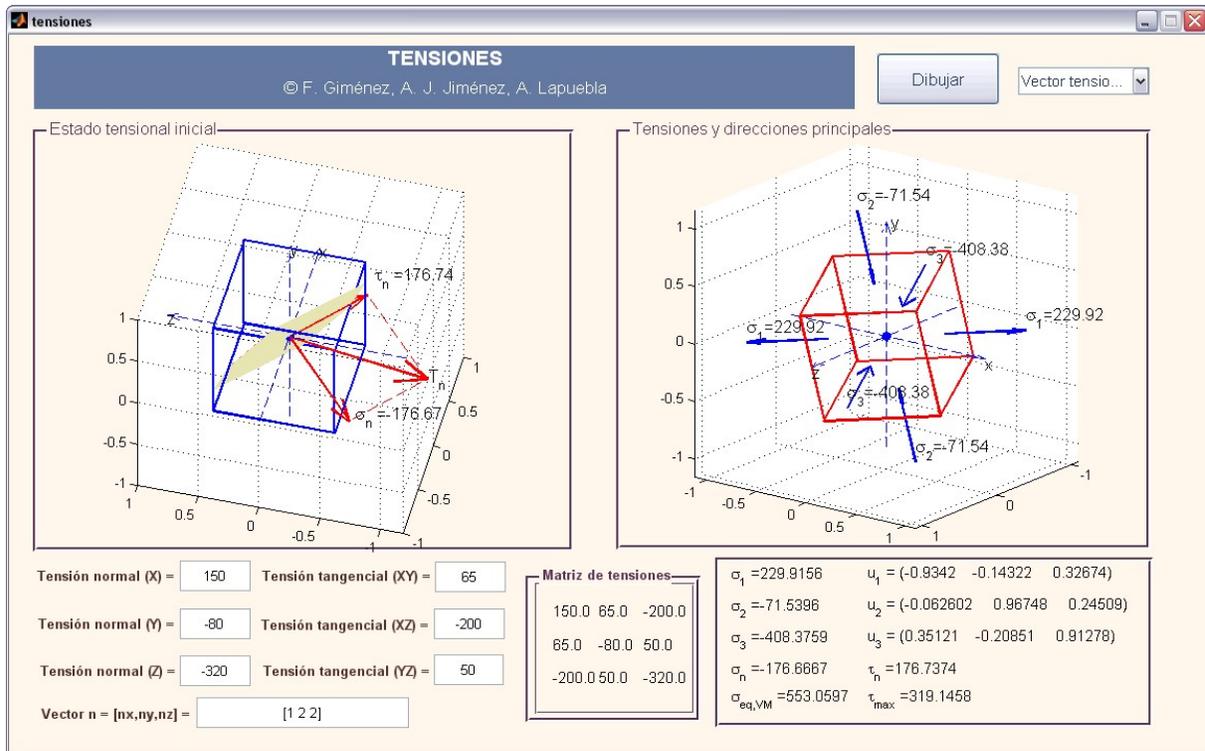


Figura 8: Resultados del laboratorio virtual TENSIONES: opción “Vector tensión”.

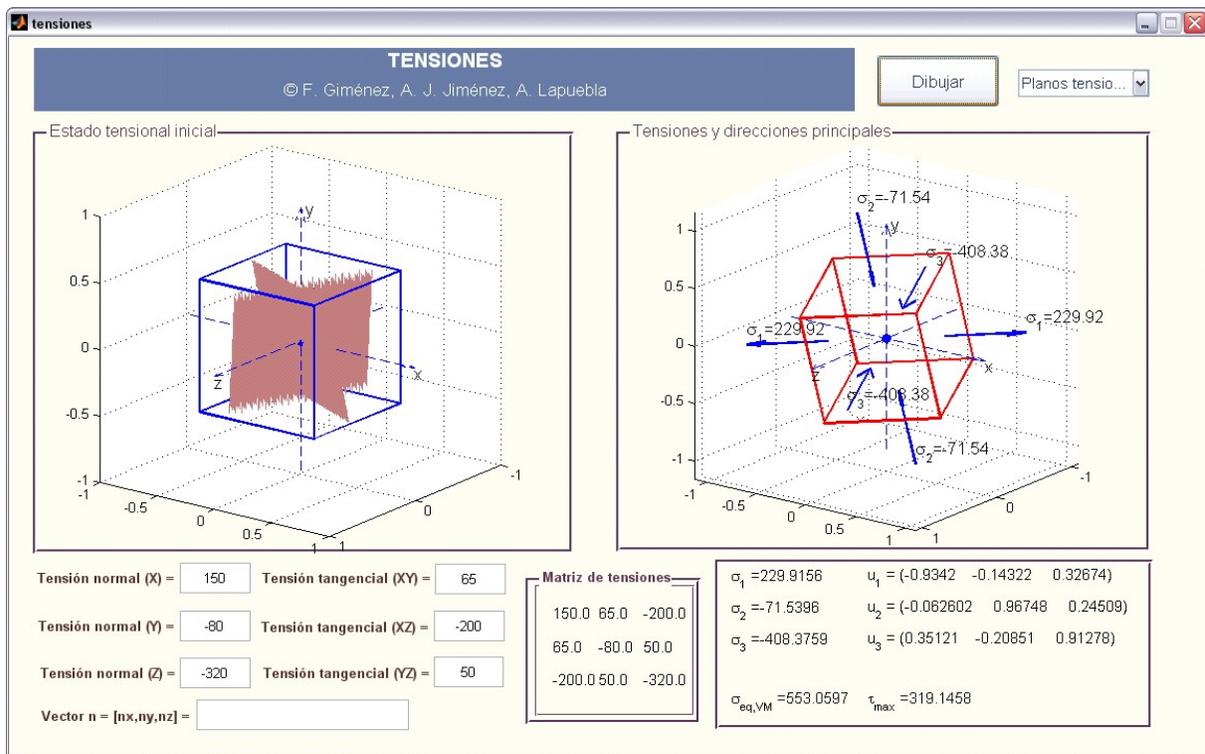


Figura 9: Resultados del laboratorio virtual TENSIONES: opción “Planos tensión tangencial máx.”.

También puede mostrarse el vector deformación \mathbf{d}_n y sus componentes intrínsecas en un punto P de la superficie inclinada, caracterizada por el vector \mathbf{n} (Figuras 10 y 11).

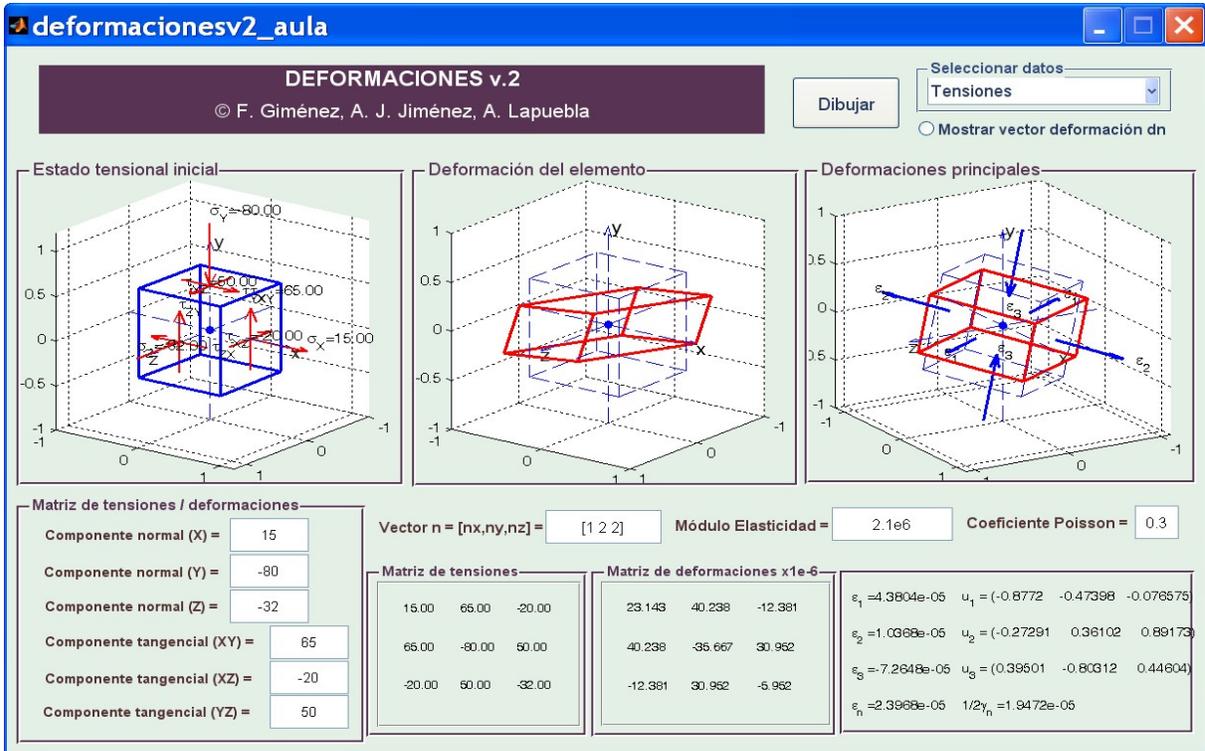


Figura 10: Resultados del laboratorio virtual DEFORMACIONES opción “Deformaciones principales”.

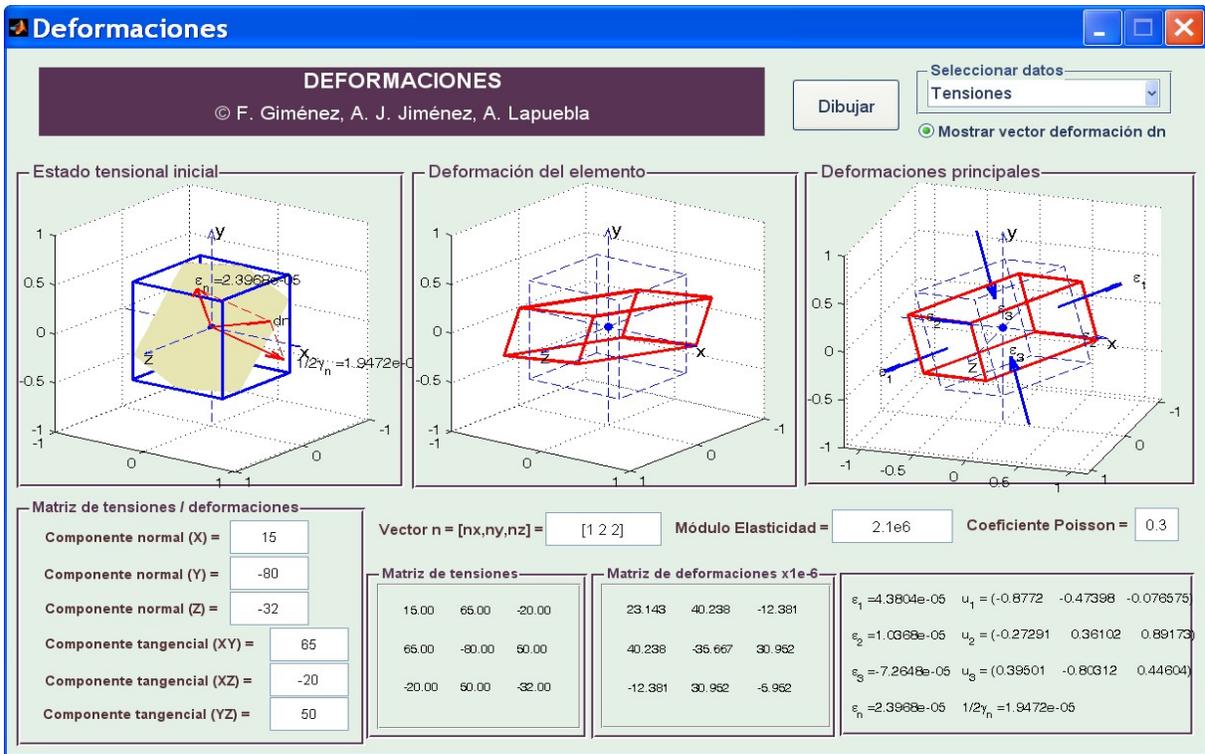


Figura 11: Resultados del laboratorio virtual DEFORMACIONES opción “Vector deformación”.

7 Conclusiones

El uso de los laboratorios virtuales TENSIONES y DEFORMACIONES permite, además de obtener los resultados numéricos correspondientes que el alumno, de forma tradicional, puede calcular analíticamente, presentar de una manera gráfica muy clara todos los conceptos introducidos en Elasticidad, contribuyendo a una mejor comprensión de los conocimientos. El interfaz gráfico creado, sencillo pero eficaz, traslada a imágenes conceptos cuyo grado de abstracción dificulta su asimilación. De acuerdo con algunos estudios (Logatt, n.d.), las imágenes son el mecanismo más eficiente y completo de transmitir información sobre un estímulo determinado dado que el sentido de la vista es el sentido más importante con el que los humanos se conectan al mundo exterior. Estos estudios revelaron que las personas podían recordar imágenes incluso un año después con un elevado grado de precisión.

Los laboratorios virtuales creados son útiles desde el punto de vista docente en asignaturas relacionadas con cálculo y dimensionado de elementos estructurales. De este modo, se cubre un gran abanico de materias relacionadas con las disciplinas de Elasticidad, Resistencia de Materiales, Cálculo de Estructuras o Mecánica de Suelos.

Los laboratorios virtuales TENSIONES y DEFORMACIONES se encuentran disponibles para su libre utilización en el repositorio institucional RIUNET de la Universitat Politècnica de València (Jiménez et al., 2013). Para su utilización no son necesarios otros paquetes de software comercial, de elevado coste. Como ventajas adicionales, cabe citar su fácil manejo –al no requerir el usuario conocimientos especializados de MATLAB[®]– y el uso de la misma notación y metodología de trabajo que en el aula.

Referencias

-  [Bartolomé A. R. \(2004\).](#)
Nuevas Tecnologías en el Aula. Guía de Supervivencia.
ICE-Universitat de Barcelona. Ed. Graó de IRIF, S.L. Barcelona.
-  [Depcik C., Assanis D. N. \(2005\).](#)
Graphical user interfaces in an engineer in educational environment.
Comput. Appl. Eng. Educ. Vol. 13, 48–59.
-  [Duffy T., Jonassen K. \(1992\).](#)
Constructivism and the technology of instruction.
Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, New Jersey, USA.
-  [Gere J. M., Timoshenko S. P. \(1992\).](#)
Resistencia de Materiales.
Ed. Paraninfo, Madrid.
-  [Jiménez-Mocholí A. J., Lapuebla-Ferri A., Romero-García M., Ivorra-Chorro, S. \(2012\).](#)
Elasticidad y Resistencia de Materiales.
Apuntes de clase para las titulaciones de grado en ingeniería.
Editorial UPV, Valencia.
-  [Jiménez-Mocholí A. J., Lapuebla-Ferri A., Giménez-Palomares F. \(2013\).](#)
Elasticidad y Resistencia de Materiales.
Materiales docentes: <http://riunet.upv.es/handle/10251/34351>
-  [León, J. A., Vizcarro, C. \(1997\).](#)
Nuevas tecnologías para el aprendizaje.
Ediciones Pirámide, Madrid.
-  [The Mathworks, INC. \(2008\).](#)
Matlab R2008a User's Guide.
The Mathworks, INC. Natick, MA. USA.
-  [Logatt C. \(n.d.\).](#)
La importancia del sentido de la vista en la educación y el aprendizaje.
Asociación educar. Ciencias y Neurociencias aplicadas al desarrollo humano.
<http://www.asociacioneducar.com>
-  [MathPic. \(n.d.\).](#)
<http://www.matpic.com>.
-  [Popov E. P. \(2000\).](#)
Mecánica de Sólidos.
Ed. Pearson Educación, Madrid.
-  [Vázquez C. \(2009\).](#)
Laboratorios Virtuales, Innovación y Experiencias Educativas.
Revista digital CSIF-enseñanza Andalucía.

Modelling in Science Education and Learning
<http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL>