MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volume 10 (1), 2017 doi: 10.4995/msel.2017.5949.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada
Universitat Politècnica de València

El uso de contraseñas para introducir los conceptos de conjunto generador y espacio generado

The use of passwords to introduce the concepts of spanning set and span

Andrea Cárcamo
Universidad Austral de Chile Y Universidad Autónoma de Barcelona
andrea.carcamo@uach.cl

Abstract

El objetivo de este artículo es presentar una propuesta de enseñanza para álgebra lineal fundamentada en la heurística de los modelos emergentes y la modelización matemática. Ésta comienza con una situación problemática relacionada con el uso de contraseñas seguras, la que introduce a los estudiantes de primer año de ingeniería en la construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado. La propuesta se diseña a partir de los resultados de los dos primeros ciclos de experimentación de enseñanza, de una investigación basada en el diseño, que dan evidencias que permiten a los estudiantes progresar de una situación en contexto real hacia los conceptos de álgebra lineal. Esta propuesta, previamente adaptada, podría tener resultados similares al aplicarse con otro grupo de estudiantes.

The aim of this paper is to present a proposal for teaching linear algebra based on heuristic of emergent models and mathematical modelling. This proposal begins with a problematic situation related to the creation and use of secure passwords, which leads first-year students of engineering toward the construction of the concepts of spanning set and span. The proposal is designed from the results of the two cycles of experimentation teaching, design-based research, which give evidence that allows students to progress from a situation in a real context to the concepts of linear algebra. This proposal, previously adapted, could have similar results when applied to another group of students.

Keywords: Mathematical modelling, emergent models, spanning set, span, teaching innovation.
Palabras clave: Modelización matemática, modelos emergentes, conjunto generador, espacio generado, innovación docente.

1. Introducción

El álgebra lineal es difícil para los estudiantes tanto cognitiva como conceptualmente (Dorier y Sierpinska, 2001) y es por este motivo que se han realizado diversas innovaciones para su enseñanza, entre ellas: el uso de la modelización matemática y la aplicación de diseños instruccionales basados en la heurística de los modelos emergentes.

Trigueros y Possani (2013) afirman que la modelización matemática puede resultar exitosa en la enseñanza de los conceptos de algebra lineal a través del uso de ricos problemas contextualizados y que a pesar de que la construcción de conceptos abstractos es un proceso difícil, el uso de actividades de modelización puede ser una herramienta eficaz para que los estudiantes utilicen sus conocimientos previos y afronten las nuevas necesidades conceptuales. A su vez, Calabuig, García y Sánchez-Pérez (2015) señalan que problemas conectados con la realidad puede motivar a los estudiantes a tener una visión de la matemática tanto práctica como real. Por su parte, Wawro, Rasmussen, Zandieh y Larson (2013) plantean que el uso de la heurística de los modelos emergentes para la creación de diseños instruccionales de álgebra lineal ayuda a que los estudiantes universitarios avancen desde su razonamiento informal matemático hacia uno más complejo y formal.

A partir de lo expuesto, el objetivo de este estudio es presentar una propuesta de enseñanza, para apoyar a los estudiantes en la construcción de conjunto generador y espacio generado, basada en la heurística de los modelos emergentes y la modelización matemática.

Se eligen los conceptos de conjunto generador y espacio generado porque son fundamentales para álgebra lineal por su relación con otros contenidos de este curso como el concepto de base de un espacio vectorial (Stewart y Thomas, 2010).

2. Marco teórico

El marco teórico de esta investigación complementa la heurística de los modelos emergentes con la modelización matemática que sustentan la propuesta de enseñanza.

2.1. La heurística de los modelos emergentes

La heurística para el diseño instruccional de los modelos emergentes es una alternativa a los métodos de enseñanza que se centran en la enseñanza de las representaciones ya hechas (Gravemeijer, 2002) y su objetivo es crear una secuencia de tareas en la que los estudiantes inicialmente desarrollen *modelos* de su actividad matemática informal y que después, se transformen en un *modelo* para el razonamiento matemático más sofisticado (Gravemeijer, 1999).

La transición del *modelo* de al *modelo* para se define en términos de cuatro niveles de actividad establecidos por Gravemeijer (1999) que son: situacional, referencial, general y formal. La actividad situacional involucra que los estudiantes trabajen hacia los objetivos matemáticos a partir de una experiencia que sea real para ellos. La actividad referencial implica modelos de descripciones, conceptos y procedimientos que se refieren al problema de la actividad situacional. La actividad general supone modelos para explorar, reflexionar y generalizar lo aparecido en el nivel anterior, pero con un foco matemático sobre las estrategias sin hacer referencia al problema inicial. La actividad formal conlleva a que los estudiantes reflejen el surgimiento de una nueva realidad matemática, por lo tanto, trabajan con procedimientos y notaciones convencionales.

2.2. La modelización matemática

El interés de la comunidad investigadora en educación matemática por la modelización matemática ha ido en aumento (Burkhardt, 2006). Lo anterior porque en las últimas décadas, tanto el aprendizaje como la enseñanza de la modelización y las aplicaciones se han convertido en temas importantes, no sólo en la escuela sino que también en la universidad, debido a la creciente demanda en el mundo por el uso de las matemáticas en: la ciencia, la tecnología y la vida diaria (Kaiser, 2010).

A nivel universitario, Alsina (2007) especifica que la investigación en educación matemática destaca que el enfoque de modelización matemática, es exitoso y una constatación de ello, es que hay evidencia científica de que los estudiantes aprenden mejor en contexto, ya sea porque proporciona motivación e interés o porque involucra a los estudiantes en la resolución de problemas del mundo real. Por lo tanto, el énfasis en el contexto, en problemas aplicados, en matematización de la realidad, entre otros, puede ser un paso positivo hacia el éxito en el aprendizaje.

Sin embargo, Trigueros (2009) señala que la importancia de la modelización matemática en el aprendizaje de las matemáticas en el ámbito universitario ha tardado en llegar, pues la enseñanza de las matemáticas que sigue predominando es la tradicional, es decir, aquellas en que las clases se imparten casi siempre en forma de conferencia introduciendo definiciones y teoremas de manera más o menos lineal y dejando el trabajo de los estudiantes únicamente para la solución de problemas como tarea a realizar fuera del aula. Lo anterior, sin importar que dicha enseñanza se dirija a estudiantes, cuyo interés primordial es justamente la aplicación de las matemáticas.

En este estudio, la modelización matemática es concebida como una herramienta de ayuda al estudio de las matemáticas (Barquero, 2009) porque se asume que articular la actividad matemática escolar con ciertos ámbitos de la realidad tiene un efecto positivo tanto en la motivación de estudiantes por las matemáticas como en su capacidad para utilizar estas matemáticas en los problemas que le surjan en la vida cotidiana. Además, se considera el ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiss (2007) para guiar a los estudiantes con la tarea de modelización propuesta en este estudio. La relación entre los siete pasos de este ciclo y la tarea de modelización de la propuesta didáctica se presenta en la Figura 1.

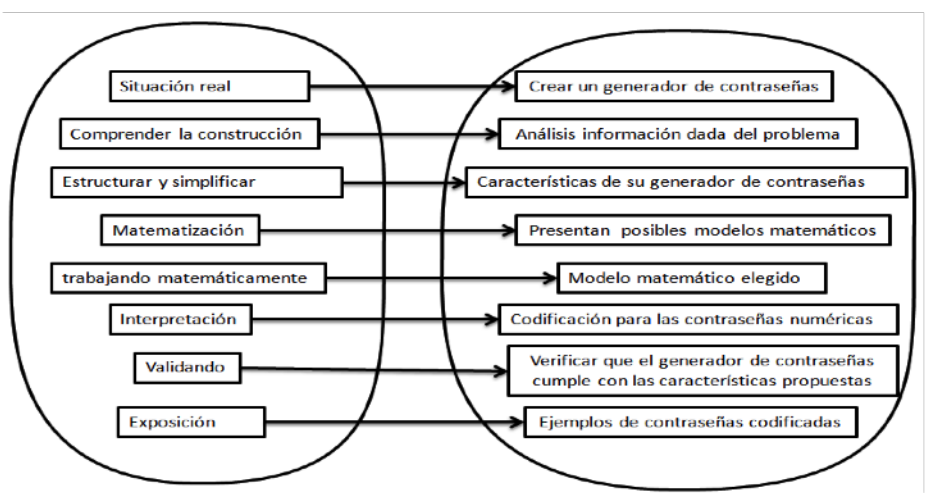

Figura 1: Relación entre el ciclo de modelización según Blum y Leiss (2007) y la tarea de modelización de la propuesta de enseñanza (Cárcamo, Gómez y Fortuny, 2016).

3. Metodología

La metodología de este estudio es la investigación basada en el diseño que se caracteriza por el diseño de entornos educativos innovadores que se entrelazan con la experimentación y el desarrollo de la teoría. Consiste en tres fases: (1) preparación y diseño, (2) experimentos de enseñanza y (3) análisis retrospectivo (Bakker y van Eerde, 2015).

La fase de preparación y diseño abarca, lo que Simon (1995) denomina, la trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) que tiene tres componentes: (1) el objetivo de aprendizaje que define las metas que hay que alcanzar, (2) las actividades de aprendizaje y (3) una posible ruta de aprendizaje o proceso cognitivo que es una predicción de cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes se desarrollarán en el marco de las actividades de aprendizaje.

La fase de experimentos de enseñanza contempló dos ciclos de experimentación. El estudio se efectuó entre los periodos 2013-2014 y 2014-2015 en L'Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú (UPC) situada en Catalunya (España) con estudiantes de primer año de ingeniería que cursaban la asignatura de fundamentos matemáticos y no habían tenido experiencia previa con problemas que involucraran modelización matemática ni habían estudiado previamente los conceptos de conjunto generador y espacio generado. Los datos recopilados en cada ciclo de experimento de enseñanza fueron: registros de audio y video del trabajo en grupo, las respuestas escritas de los estudiantes a las tareas propuestas en la THA y una entrevista individual al finalizar la experimentación. En el primer ciclo participaron 31 estudiantes mientras que en el segundo, 45 estudiantes.

La fase de análisis retrospectivo incluyó un análisis de las regularidades en los dos ciclos de experimento de enseñanza basados en la heurística de los modelos emergentes y la modelización matemática para apoyar a los estudiantes en la construcción de conjunto generador y espacio generado. A partir de lo anterior, se elabora la propuesta de enseñanza para estos conceptos de álgebra lineal.

4. Propuesta de enseñanza

Las tareas de la propuesta de enseñanza se fundamentaron en la heurística de los modelos emergentes y la modelización matemática. La modelización matemática se consideró como una herramienta de enseñanza para iniciar la construcción de los conceptos en estudio a través de un problema que consistió en crear un generador de contraseñas con vectores. Asimismo, tal como señalan Gravemeijer y Stephan (2002) la heurística de los modelos emergentes sirvió para diseñar y estructurar las tareas de tal manera de motivar a los estudiantes en la transición de su razonamiento de actividad matemática informal hacia un razonamiento matemático formal.

A partir del análisis retrospectivo de los datos recopilados en este estudio, la propuesta de enseñanza contempla 4 tareas en grupo y una tarea individual, las cuales se detallan a continuación.

4.1. Tarea 1: Generando contraseñas con vectores

El contexto para iniciar la experiencia de enseñanza es la creación de contraseñas. A los estudiantes se les presenta el problema de la Figura 2.

El objetivo de la tarea, es que los estudiantes en grupo, determinen un modelo matemático para generar contraseñas basado en vectores, siguiendo los pasos del ciclo de modelización matemática propuesto por Blum y Leiss (2007).

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

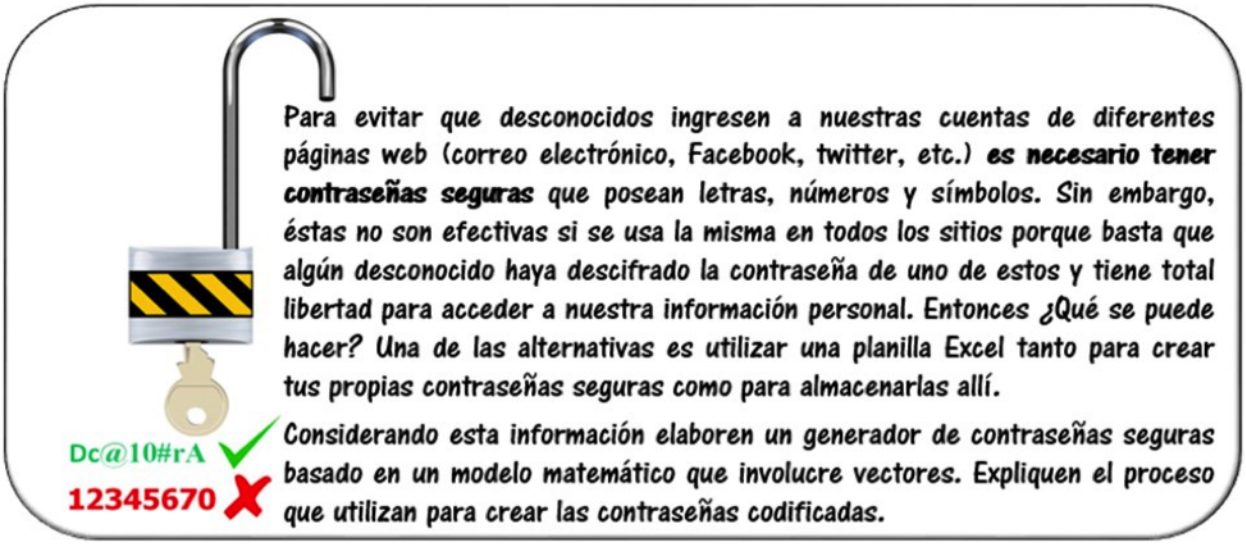

Figura 2: La tarea 1 propuesta a los estudiantes para trabajar en grupo.

4.2. Tarea 2: Relacionando el generador de contraseñas con conjunto generador y espacio generado

Después de que el profesor introduce los conceptos conjunto generador y espacio generado relacionado con el contexto de las contraseñas, los estudiantes en grupo tienen que completar la tabla de la Figura 3 en la que establecen una analogía entre dos conjuntos asociados a su generador de contraseñas (aquel que contiene vectores que al hacer la combinación lineal con ellos se obtiene el vector para cada contraseña numérica y aquel que posee todos los vectores que permiten generar las contraseñas numéricas) y los conceptos de conjunto generador y espacio generado.

Nombre que recibe en tu generador de contraseñas	Cómo se escribe en lenguaje matemático	Nombre que recibe en matemática

Figura 3: La tabla que los estudiantes deben completar en la tarea 2.

El objetivo de la tarea 2 es que los estudiantes relacionen los conceptos en estudio con un contexto real y así, eviten confundirlos, ya que es una de las principales dificultades que tienen con estas definiciones (Nardi, 1997).

4.3. Tarea 3: Explorando propiedades de conjunto generador y espacio generado

En la tarea 3, los estudiantes en grupo conjeturan respecto a propiedades asociadas a los conceptos de conjunto generador y espacio generado, como se observa en las preguntas de la Figura 4. Además, ellos no hacen alusión al contexto de las contraseñas.

(a) Los conjuntos C y D que se muestran en la siguiente tabla son conjuntos generadores de $\mathbb{R}^2$ mientras que A y B no lo son. Conjeturen cuál debe ser el rango de la matriz que tiene por filas vectores de un conjunto de $\mathbb{R}^2$ para que este conjunto genere a $\mathbb{R}^2$

Conjunto pertenecientes a $\mathbb{R}^2$	Matriz cuyas filas son los vectores del conjunto	Rango de la matriz	**Su conjetura:**
$A=\{(0,-3)\}$	$M_1=\begin{pmatrix}0 & -3\end{pmatrix}$		
$B=\{(5,0),(7,0)\}$	$M_2=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 7 & 0\end{pmatrix}$		
$C=\{(1,0),(1,-1)\}$	$M_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$		
$D=\{(-1,-4),(2,8),(0,-1)\}$	$M_1=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 2 & 8\\ 0 & -1\end{pmatrix}$		

(b) Conjeturen sobre cuál debe ser el rango de una matriz que tiene como filas vectores de $\mathbb{R}^3$ para que el conjunto que contenga esos vectores genere a $\mathbb{R}^3$. ¿Qué ocurrirá con vectores de $\mathbb{R}^4$?

(c) ¿Cuántos vectores debe tener como mínimo un conjunto para generar a $\mathbb{R}^2$? Fundamenten.

(d) ¿Existe un número máximo de vectores para generar a $\mathbb{R}^2$? Fundamenten.

Figura 4: Ejemplo de preguntas de la tarea 3.

El objetivo de la tarea 3 es que los estudiantes exploren propiedades de los conceptos de conjunto generador y espacio generado para que progresen hacia un nivel de razonamiento más formal en relación a estos.

4.4. Tarea 4: Aplicando los conceptos de conjunto generador y espacio generado

En la tarea 4, los estudiantes en grupo aplican los conceptos de conjunto generador y espacio generado. En la Figura 5 se observan algunas preguntas de este apartado.

El objetivo de la tarea 4 es que los estudiantes en grupo den evidencias de que han logrado un razonamiento más formal de los conceptos, de conjunto generador y espacio generado, al resolver preguntas que implican estos en un contexto matemático.

(a) Sea el subespacio $V=\{(w,d,I,P,G)\,/\,P=w, d+I=G\}$. w es el crecimiento de los salarios, d es el crecimiento de los impuestos directos, I es el crecimiento de los impuestos indirectos, P es el crecimiento de los precios y G es el crecimiento del gasto. Determinen:
   (i) Un conjunto generador de V.
   (ii) Si el vector $(3,2,-7,3,-5)$ pertenece a V. Si es así, interprételo según el problema.

(b) Indiquen si $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0)\}$ es un conjunto generador para $W=\{(x,y,z,w)\,/\,x=w\}$.

(c) Establezcan si el conjunto de vectores $S=\{(2,1,0),(3,1,1),(3,2,-1)\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$. Si no es así, determina el espacio que genera.

Figura 5: Ejemplo de preguntas de la tarea 4.

4.5. Tarea 5: Aplicando los conceptos individualmente

En la tarea 5, los estudiantes individualmente aplicaron los conceptos de conjunto generador y espacio generado en un contexto matemático. El objetivo es observar el nivel de progreso, hacia el razonamiento formal de los conceptos de álgebra lineal que han estado estudiando. Algunas preguntas de este apartado se observan en la Figura 6.

(a) ¿Qué le sugerirías recordar a un estudiante que confunde los conceptos de conjunto generador y un espacio generado para que distinga entre ellos?

(b) Si el conjunto $\{(1,2),(2,3)\}$ genera a $\mathbb{R}^2$ entonces $\{(1,2),(2,3),(-2,5)\}$ también genera a $\mathbb{R}^2$? Justifica.

(c) Dado el espacio generado $W=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\,/\,x=z, y=w=0\}$ determina:
   (i) un conjunto generador de W
   (ii) si los vectores (1,5,0,0) y (5,0,5,0) pertenecen a W. Justifica.

Figura 6: Ejemplo de preguntas de la tarea 5.

5. Algunas respuestas del segundo ciclo del experimento de enseñanza

A continuación, se muestran ejemplos de respuestas de las tareas 1 y 2 del segundo ciclo del experimento de enseñanza.

La tarea 1 presenta como desafío que los estudiantes en grupo elaboren un generador de contraseñas basado en vectores y guiados por el ciclo de modelización matemática. En la tabla 1 se observa la respuesta escrita del grupo 5 y algunos de los pasos del ciclo de modelización matemática que siguieron para dar ésta.

Pasos del ciclo de modelización. Comprender la situación, estructurar y simplificar: características de su generador de contraseñas

Nuestro método para generar passwords, estará basado en 2 vectores fijos, con tres variables cada uno que luego serán sumados, para mayor seguridad. Cuando estén sumados y tengamos el número, todos los números a excepción del primero y el último, serán sustituidos por este código:

Paso ciclo del modelización. Trabajando matemáticamente: elección del modelo matemático para generar contraseñas

Vector 1: $a(3,-3,4)+b(-1,1,2)+c(0,4,2)$

Vector 2: $a(1,2,-3)+b(-4,9,2)+c(2,0,-7)$

Paso del ciclo del modelización. Interpretación: codificación a utilizar para generar las contraseñas

0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9
m	M	c	d	S	g	Q	r	z	P

Pasos del ciclo de modelización. Validación y presentación de la solución: Ejemplo de una contraseña codificada creada por su generador de contraseñas

Ejemplo:

$a=2 \quad b=-1 \quad c=3$

$V_1 \to 2(3,-3,4)+(-1)(-1,1,2)+3(0,4,2)=$
$=(6,-6,8)+(1,-1,-2)+(0,12,6)=(7,5,12)$

$V_2 \to 2(1,2,-3)+(-1)(-4,9,2)+3(2,0,-7)=$
$=(2,4,-6)+(4,-9,-2)+(6,0,-21)=(12,-5,-29)$

$(7,5,12)+(12,-5,-29)=(19,0,-17)$

$(19,0,-17)\to 19017$

$\downarrow$

1PmM7

Tabla 1: Respuesta escrita del grupo 5 a la tarea 1.

En la Tabla 1 se ve que los estudiantes en grupo, en general, siguen los pasos del ciclo de modelización matemática (Figura 1), aunque no hay una evidencia escrita del paso de matematización que es donde ellos sugieren posibles modelos matemáticos para su generador de contraseñas. Sin embargo, ellos definen su modelo matemático que corresponde a dos vectores representados ambos por combinaciones lineales de vectores de $\mathbb{R}^3$.

En la tarea 2, los grupos de estudiantes debían completar una tabla de analogía entre su generador de contraseñas y los conceptos en estudio. En la Figura 7 se muestra, como ejemplo, la respuesta del grupo 14. En ésta se observa que escribieron correctamente en notación analítica dos conjuntos asociados a su generador de contraseñas: aquel que contenía vectores que al hacer la combinación lineal con ellos se obtenía el vector para cada contraseña numérica y otro que poseía todos los vectores que permitían generar las contraseñas numéricas. Estos conjuntos los asociaron con los nombres de conjunto generador y espacio generado, respectivamente. Se observa falta de rigurosidad con la notación matemática de estos conceptos, ya que anotaron en forma vertical los vectores del conjunto que conectaron con el nombre de conjunto generador.

Nombre que recibe en tu generador de contraseñas	Cómo se escribe en lenguaje matemático	Nombre que recibe en matemática
conjunto que contiene los vectores para generar contraseñas numéricas.	$E=\{(7a,2b,-3c)\in \mathbb{R}^3\}$	Espacio generado
Conjunto que al hacer combinación lineal con sus vectores se obtiene cada vector que genera una constraseña numérica	$B=\{(7,0,0),(0,2,0),(0,0,-3)\}$	conjunto generador

Figura 7: Respuesta escrita del grupo 14 a la tarea 2.

La tabla de analogía, a pesar de las dificultades con el lenguaje matemático que mostraron los estudiantes en su respuesta, permitió que vincularan dos conjuntos en notación matemática con los nombres asignados en el contexto de su generador de contraseñas, pero también con sus denominaciones matemáticas de conjunto generador y espacio generado, es decir, ampliaron la visión de estos conceptos hacia un contexto real lo que podría lograr que los estudiantes recuerden las características de cada uno y así, eviten confundirlos.

6. Conclusiones

Se plantea una propuesta didáctica que da la oportunidad a los estudiantes de iniciar la construcción de nuevos conceptos de álgebra lineal desde su actividad matemática informal (a través de una situación que involucra la modelización matemática) hacia un conocimiento más formal por medio de los niveles de actividad asociados a la heurística de los modelos emergentes propuestos por Gravemeijer (1999).

A partir del análisis de los resultados de los dos ciclos de experimentos de enseñanza se observaron que las siguientes características del diseño instruccional apoyaron la construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado:

- La tarea 1 que consiste en crear un generador de contraseñas con vectores permitió a los estudiantes activar sus concepciones previas de vectores que les sirvieron para las siguientes tareas.
- La tarea 2 a través de la tabla de analogía contribuyó a que los estudiantes distinguieran los conceptos de conjunto generador y espacio generado tanto en un contexto real como matemático, lo que les ofrece la oportunidad de evitar confundirlos.

• La tarea 3 facilitó que los estudiantes transiten hacia un nivel general de los contenidos al explorar conjeturas que involucren a los conceptos de conjunto generador y espacio generado.

• Las tareas 4 y 5 permitieron a los estudiantes progresar hacia un nivel de razonamiento más formal de los conceptos de conjunto generador y espacio generado al resolver actividades con notación matemática convencional.

Finalmente, señalar que esta propuesta de enseñanza, previamente adaptada, podría proporcionar resultados similares, a los ciclos de experimentación de enseñanza indicados en este estudio, si se aplica a otra población de estudiantes.

Referencias

Alsina C. (2007).
Teaching applications and modelling at tertiary level.
In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), Modelling and applications in mathematics education (pp. 469–474). New York: Springer.

Bakker A., van Eerde D. (2015).
In introduction to design-based research with an example from statistics education.
In Approaches to qualitative research in mathematics education (pp. 429–466). Springer Netherlands.

Barquero B. (2009).
Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas. Tesis doctoral.
Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

Blum W., Leiss D. (2007).
How do students and teachers deal with modelling problems?
In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), Mathematical modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics (pp. 222–231). Chichester, UK: Horwood Publishing.

Calabuig J. M., Garcia Raffi L. M., Sánchez-Perez E. A. (2015).
Álgebra lineal y descomposición en valores singulares.
Modelling in Science Education and Learning, 8(2), 133–144.

Burkhardt H. (2006).
Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future.
ZDM, 38(2), 178–195.

Cárcamo A., Gómez J., Fortuny J. (2016).
Mathematical Modelling in Engineering: A Proposal to Introduce Linear Algebra Concepts.
Journal of Technology and Science Education (JOTSE), 6(1), 62–70.

Dorier J. L., Sierpinska A. (2001).
Research into the teaching and learning of linear algebra.
In The Teaching and Learning of Mathematics at University Level (pp. 255–273). Springer Netherlands.

Gravemeijer K. (1999).
How emergent models may foster the constitution of formal mathematics.
Mathematical Thinking and Learning, 1, 155–177.

Gravemeijer K. (2002).
Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis.
In Proceedings of the 6th International Conference on Teaching Statistics.

Gravemeijer K., Stephan M. (2002).
Emergent models as an instructional design heuristic.
In Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education (pp. 145–169). Springer Netherlands.

Kaiser G. (2010).
Introduction: ICTMA and the teaching of modeling and applications.
In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), Modeling students' mathematical modeling competencies (pp. 1–2). New York: Springer.

Nardi E. (1997).
El encuentro del matemático principiante con la abstracción matemática: una imagen conceptual de los conjuntos generados en el análisis vectorial.
Educación Matemática, 9(1), 47–60.

Stewart S., Thomas M. O. (2010).
Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra.
International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(2), 173–188.

Simon M. A. (1995).
Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective.
Journal for Research in Mathematics Education, 26, 114–145.

Trigueros G. (2009).
El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas.
Innovación Educativa, 9 (46), 75–87.

Trigueros M., Possani E. (2013).
Using an economics model for teaching linear algebra.
Linear Algebra and its Applications, 438(4), 1779–1792.

Wawro M., Rasmussen C., Zandieh M., Larson C. (2013).
Design research within undergraduate mathematics education: An example from introductory linear algebra.
Educational design research–Part B: Illustrative cases, 905–925.