

# *Representación de distribuciones tensionales en elementos lineales prismáticos y cilíndricos*

## *Representation of stress distributions in prismatic and cylindrical linear elements*

**Fernando Giménez-Palomares, Antonio-José Jiménez-Mocholí,  
Andrés Lapuebla-Ferri, Juan-Antonio Monsoriu-Serra**  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA  
[fgimenez@mat.upv.es](mailto:fgimenez@mat.upv.es), [ajimene@mes.upv.es](mailto:ajimene@mes.upv.es), [anlafer0@mes.upv.es](mailto:anlafer0@mes.upv.es), [jmonsori@fis.upv.es](mailto:jmonsori@fis.upv.es)

---

### Abstract

*Las cargas aplicadas sobre un elemento estructural lineal generan esfuerzos en las secciones transversales que, a su vez, se traducen en tensiones a lo largo del mismo. La naturaleza, magnitud y la forma de actuación de las distribuciones tensionales son parámetros de obligado cálculo para el dimensionado o la comprobación de la resistencia de elementos estructurales o de piezas de maquinaria. En este trabajo se presenta un laboratorio virtual que permite obtener distintas distribuciones tensionales en una viga isostática, prismática o cilíndrica, sometida a esfuerzos axiales, esfuerzos cortantes y momentos flectores. El laboratorio virtual posibilita una gran interactividad, permitiendo la simulación de diversas situaciones reales en las que el usuario puede modificar a su conveniencia la magnitud, dirección y sentido de aplicación de las cargas, así como las condiciones de contorno de la viga. El objetivo último de este trabajo es presentar una herramienta orientada a la enseñanza y el aprendizaje de asignaturas de grado universitario relacionadas con las materias Elasticidad y Resistencia de Materiales.*

*The loads applied on a linear structural element generate internal forces in the cross sections which, in turn, result in stresses along the element. The nature, extent and shape of stress distributions are required parameters to compute the strength of structural elements or machinery components in order to its analysis or design. In this work, it is presented a virtual laboratory which allows to obtain different stress distributions in an isostatic beam, prismatic or cylindrical, subjected to axial forces, shear forces and bending moments. The virtual laboratory permits a great interactivity, allowing the simulation of various real situations in which the user can modify the magnitude and direction of acting loads, and also the boundary conditions of the beam. The ultimate goal of this paper is to present a tool aimed to support the learning and teaching of subjects related to Elasticity and Strength of Materials that are found in bachelor university degrees.*

---

Palabras clave: Laboratorio virtual, Esfuerzos, Tensiones, Elasticidad, Resistencia de Materiales.  
Keywords: Virtual laboratory, Internal forces, Stresses, Elasticity, Strength of Materials.

## 1. Introducción

Las aplicaciones informáticas de simulación son un paradigma en el ámbito de la educación superior. En las titulaciones de carácter tecnológico, su uso ha llegado a complementar, cuando no a reemplazar, a las prácticas tradicionales de laboratorio (Infante, 2014). Un motivo subyacente es el económico: las prácticas de laboratorio requieren de personal especializado, equipamiento de muy costosa adquisición y el empleo de material fungible que debe reemplazarse al finalizar cada sesión. Otra dificultad añadida es la situación habitual en la que el número de alumnos es elevado con respecto al número disponible de montajes experimentales, un hecho que además dificulta la adquisición de las competencias transversales relacionadas con el manejo de instrumentos.

En contraposición, las simulaciones computerizadas —que en este contexto podrían denominarse *experimentos virtuales*— requieren únicamente de un ordenador con las prestaciones necesarias y el software adecuado. Con respecto al criterio económico, un ordenador es un bien longevo capaz de acomodar un buen número de aplicaciones (y sus correspondientes actualizaciones) y servir a los fines docentes durante un número no desdeñable de cursos académicos. A este hecho han contribuido, a su vez, tanto el auge de las tecnologías informáticas como la accesibilidad a las mismas por el gran público en el último decenio.

Pero la adquisición de software precisa a menudo de una inversión económica considerable, ya que las licencias de uso de algunos programas son muy gravosas. Por ejemplo, en el ámbito de la ingeniería estructural, muchos de los programas más comunes se diseñan para cubrir necesidades no sólo docentes, sino también para fines profesionales o de investigación, y de ahí su elevado coste. Pese a que los programas *freeware* cubren un gran abanico de necesidades, son pocas las aplicaciones gratuitas que satisfagan los objetivos docentes de las asignaturas en el ámbito universitario. En añadidura, estos programas se caracterizan por tener una curva de aprendizaje muy pronunciada y que suele trascender el tiempo disponible para impartir la asignatura.

En el contexto actual de la educación superior, los planes de estudio de las titulaciones se diseñan para favorecer el aprendizaje autónomo del alumnado (Rué, 2009) (Michavila et al., 2011). En la actual corriente constructivista de los estudios, el discente construye su propio cuerpo de conocimientos, al tiempo que el profesor adquiere un rol de facilitador de recursos de aprendizaje (Duffy y Jonassen, 1992) (Bartolomé, 2004). Considerando todos estos precedentes, queda justificado el desarrollo de aplicaciones informáticas específicas, diseñadas *ex profeso* para un grupo objetivo muy concreto como es el colectivo de estudiantes de una determinada asignatura.

Estos requisitos los cumple un tipo de aplicación informática denominada *laboratorio virtual*, que constituye por sí mismo un entorno de aprendizaje si se diseña de modo que reúna, principalmente, las siguientes características (Depick y Assanis, 2005):

1. *Facilidad de uso*, lo que se logra mediante el diseño adecuado de la interfaz de usuario.
2. *Interactividad completa* con el fenómeno que se pretende simular.
3. Existencia de una salida gráfica para la interpretación de resultados.
4. *Accesibilidad y libre disposición*.

Un laboratorio virtual así concebido no solamente puede contribuir a cubrir las necesidades de aprendizaje de los alumnos, sino también a apoyar la labor docente del profesor.

En este trabajo se presenta el laboratorio virtual FLEXIÓN, diseñado para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje de asignaturas relacionadas con la Elasticidad y la Resistencia de Materiales. Estas materias se encuentran en el ámbito de la ingeniería estructural, y su presencia es obligatoria en muchas titulaciones de grado en ingeniería o arquitectura.

El presente trabajo se ha dividido en varias partes. En la Sección 2 se explican algunos de los conceptos previos de la materia, justificándose el desarrollo del laboratorio virtual. En la Sección 3 se describe el funcionamiento del laboratorio virtual, haciendo especial hincapié en la interfaz de usuario. En la Sección 4 se resuelven dos ejemplos con el laboratorio virtual. Por último, en la Sección 5 se establecen las conclusiones del trabajo y se plantean futuros desarrollos.

## 2. Conceptos previos

Con el fin de limitar la extensión de este documento, se emplaza al lector a la consulta de la bibliografía especializada sobre la materia: (Feodósiev, 1997) (Gere y Timoshenko, 2009).jpg (Jiménez-Mocholí et al., 2011a) (Popov, 2000), entre otras referencias.

La Elasticidad y la Resistencia de Materiales son disciplinas con distinto alcance que estudian la respuesta mecánica de los sólidos deformables cuando se someten a una serie de fuerzas externas o cargas. La respuesta mecánica del elemento se traduce en la aparición de dos tipos de fenómenos:

- *Observables*, derivados de las deformaciones provocadas por las cargas y que causan cambios de forma del elemento: flexión, cambio de longitud, etc.
- *No observables*, cuyo estudio requiere del empleo de artificios matemáticos, como es el caso de las distribuciones de tensión causadas por las cargas aplicadas.

El estudio de las distribuciones tensionales reviste especial interés porque permite predecir la peligrosidad del estado de cargas aplicado. Un elemento estructural falla cuando el nivel de tensiones en un punto supera el valor que es capaz de soportar el material con el que se fabrica.

Para caracterizar matemáticamente las tensiones en el contexto de este trabajo hay que prestar atención a la geometría del sólido en estudio. Muchos de los elementos estructurales tienen una geometría tal que una de sus dimensiones es muy superior a las otras dos, luego a efectos de cálculo el elemento puede reducirse a un elemento lineal que recibe el nombre de *barra*. El dominio en  $\mathbb{R}^3$  se reduce entonces al dominio en  $\mathbb{R}$  en la que *curva* resultante se caracteriza por (Figura 4):

- Su longitud coincide con la del eje longitudinal (o directriz) del elemento que representa.
- A cada punto de la curva se le asigna:
  - Una propiedad geométrica, la sección transversal (recta o normal) del elemento. Dicha sección es la geometría plana que se obtiene al intersectar el elemento con un plano perpendicular su eje longitudinal.
  - Las constantes elásticas que caracterizan el comportamiento del material, usualmente en régimen elástico y lineal.
- Si se fija un triedro  $xyz$  en un extremo de la barra, el eje  $x$  indica la posición de un punto sobre su eje —que se corresponde con la posición de una sección determinada—. Los ejes  $y$ ,  $z$  están contenidos en el plano de la sección, con origen en el centro de gravedad de la misma y de manera que el triedro resultante sea directo, central y principal de inercia.

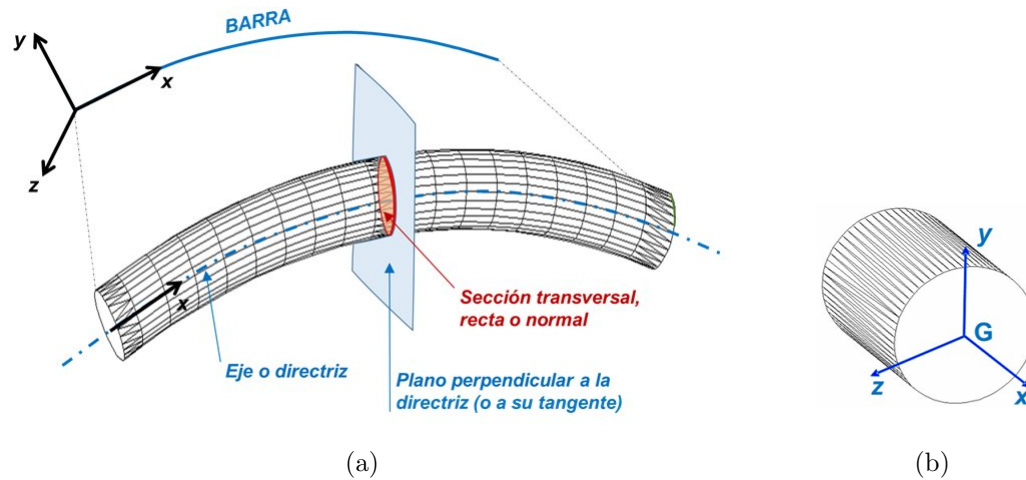


Figura 1: (a) Asimilación de un elemento estructural cilíndrico a un elemento de cálculo tipo barra. (b) Posición del triedro local  $xyz$  en una sección transversal del elemento.

Parte de la respuesta mecánica de una barra se estudia en la sección, y de ahí la importancia de su estudio. Dado un elemento estructural sometido a un sistema vectorial que representa el sistema de cargas actuantes sobre el mismo, en una sección cualquiera aparecerá un campo vectorial continuo de *fuerzas* y *momentos* que mantiene el elemento en equilibrio, según los principios de la Estática. El campo vectorial puede reducirse a un *torsor cinemático*  $(\mathbf{R}, \mathbf{M})$  constituido por los vectores *resultantes*  $\mathbf{R}$  y *momento resultante*  $\mathbf{M}$ , aplicados en el centro de gravedad de la sección. En el modelo del elemento, se denominan esfuerzos a las proyecciones del torsor cinemático sobre los ejes del triedro local de la barra (Figura 2). Los esfuerzos sobre una sección producen distribuciones tensionales en el dominio  $\mathbb{R}^2$  de la misma, como se explicará posteriormente.

Un elemento estructural suele caracterizarse por la naturaleza de los esfuerzos que es capaz de transmitir. Por ejemplo, una *viga* es toda barra concebida para recibir (principalmente) cargas que actúan perpendicularmente a su eje. De este modo, el elemento transmite esfuerzos cortantes y momentos flectores, aunque también puede soportar en menor medida esfuerzos axiales. Las vigas forman parte de estructuras, como las que sustentan los edificios industriales. El laboratorio virtual objeto de este trabajo se centra fundamentalmente en el estudio de estos elementos.

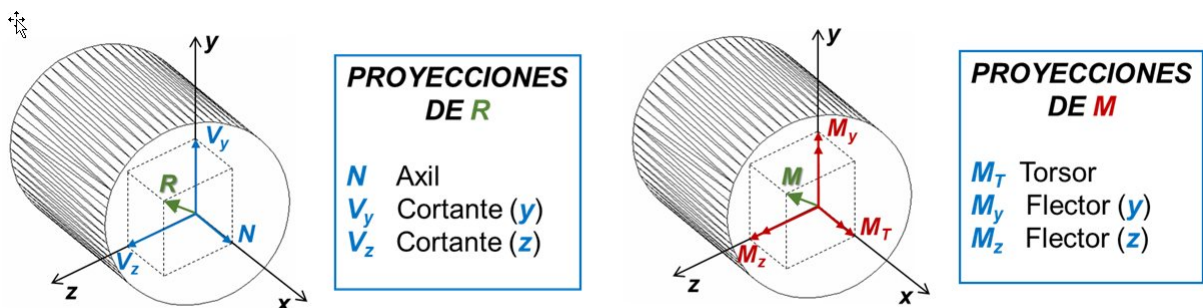


Figura 2: Esfuerzos actuantes en una sección como proyecciones de los vectores  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{M}$ .

Matemáticamente, los esfuerzos que actúan en la sección transversal se caracterizan por un

sistema de vectores. Lo mismo sucede con respecto a la tensión en un punto  $P(y_P, z_P)$  de la sección que generan dichos esfuerzos. Se considera que en el punto  $P$  actúa un vector fuerza interna  $dF$  que es la resultante del campo vectorial de fuerzas internas en un elemento diferencial de área  $dA$  en la vecindad de  $P$  (Figura 3).

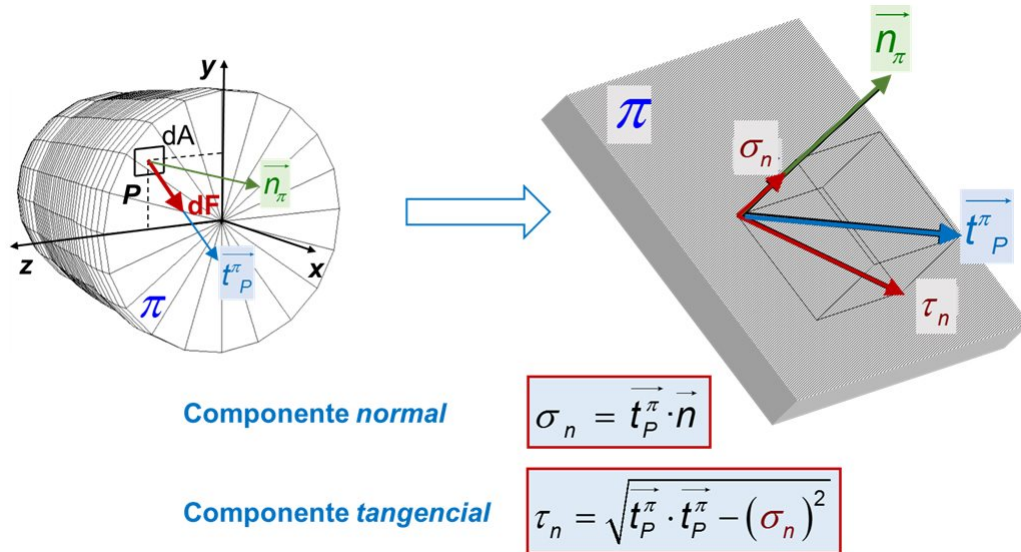


Figura 3: El vector tensión y sus componentes intrínsecas.

Según la Teoría de la Elasticidad, el *vector tensión* en el punto  $P$  asociado al plano de corte  $\pi$  cuyo vector normal es  $\vec{n}_\pi$  se define como:

$$\vec{T}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} \tag{1}$$

El vector tensión proporciona información acerca de la intensidad y la direccionalidad de la distribución de las fuerzas internas en cada punto de la sección de corte. Sin embargo, el vector tensión definido por (1) no proporciona información útil a efectos de diseño o comprobación de elementos estructurales, puesto los materiales responden de manera distinta a las fuerzas que tienden a separar las superficies que a las fuerzas que tienden a que las superficies deslicen entre sí. Para tener en cuenta estos fenómenos es necesario descomponer el vector tensión en las denominadas *componentes intrínsecas* (Figura 3): la *componente tensional*  $\sigma_n$  normal a la superficie y la *componente tangencial*  $\tau_n$  contenida en la misma, que son las responsables, respectivamente, de los fenómenos de separación y deslizamiento de superficies contiguas.

Por otro lado, resulta necesario relacionar las componentes intrínsecas del vector tensión con los esfuerzos que las generan. La tensión normal  $\sigma_x(x, y, z)$  —ya que el eje  $x$  es siempre la dirección normal a la sección transversal— en un punto  $(x, y, z)$  de una viga viene dada por la *Ley de Navier*<sup>1</sup>:

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{A(x)} - \frac{M_z(x)}{I_z(x)}y + \frac{M_y(x)}{I_y(x)}z, \tag{2}$$

siendo:

$x$ : posición de la sección en la barra;

<sup>1</sup>Claude-Louis Henri Navier (1785-1821). Ingeniero y físico francés.

$y, z$ : coordenadas del punto considerado en el plano de la sección;

$N(x)$ : esfuerzo axial en la sección;

$M_z(x)$ : momento flector alrededor del eje  $z$  de la sección;

$M_y(x)$ : momento flector alrededor del eje  $y$  de la sección;

$A(x)$ : área de la sección;

$I_z(x)$ : momento de inercia de la sección respecto del eje principal  $z$ ;

$I_y(x)$ : momento de inercia de la sección respecto del eje principal  $y$ .

Por otro lado, las distribuciones de tensiones tangenciales  $\tau_n$  en la sección son causadas por los esfuerzos cortantes ( $V_y, V_z$ ) y por el momento torsor  $M_T$ . El laboratorio virtual objeto del presente trabajo únicamente contempla las que se producen a causa de los esfuerzos cortantes, tal y como se explicará posteriormente. En este caso, la tensión tangencial  $\tau(x, y, z)$  en un punto  $(x, y, z)$  de una viga se obtiene a partir de la *expresión de Zhuravski*<sup>2</sup>, distinguiendo entre:

- Vigas de sección llena.

$$\tau_{xy}(x, y, z) = \frac{V_y(x)}{b(y)I_z(x)} S_z^*(y), \quad (3)$$

$$\tau_{xz}(x, y, z) = \frac{V_z(x)}{h(z)I_y(x)} S_y^*(z). \quad (4)$$

- Vigas de sección de pared delgada (espesor inferior a 1/10 de las otras dimensiones de la sección).

$$\tau_{xs}(x, s) = \frac{V_y(x)}{t(s)I_z(x)} S_z^*(s), \quad (5)$$

$$\tau_{xs}(x, s) = \frac{V_z(x)}{t(s)I_y(x)} S_y^*(s). \quad (6)$$

siendo:

$x$ : posición de la sección en la barra;

$y, z$ : coordenadas del punto en el plano de la sección;

$s$ : en secciones de pared delgada, variable de recorrido que indica la posición de un punto de la sección sobre la línea media del espesor de la sección;

$b(y)$ : ancho de la sección en un punto situado en una coordenada  $y$ ;

$h(z)$ : canto de la sección en un punto situado en una coordenada  $z$ ;

$t(s)$ : espesor de la sección en un punto situado en una posición  $s$ ;

$V_y(x)$ : esfuerzo cortante en el eje  $y$  de la sección;

$V_z(x)$ : esfuerzo cortante en el eje  $z$  de la sección;

$I_z(x)$ : momento de inercia de la sección respecto del eje principal  $z$ ;

$I_y(x)$ : momento de inercia de la sección respecto del eje principal  $y$ ;

<sup>2</sup>Dmitri Ivánovich Zhuravski (1821-1891). Ingeniero ferroviario ruso.

$S_z^*(y)$ : momento estático respecto del eje  $z$  del área de la sección situada más allá de la coordenada  $y$ ;

$S_y^*(z)$ : momento estático respecto del eje  $y$  del área de la sección situada más allá de la coordenada  $z$ ;

$S_z^*(s)$ : momento estático respecto del eje  $z$  del área de la sección que se ha recorrido hasta alcanzar la posición  $s$  de un punto sobre la línea media del perfil;

$S_y^*(s)$ : momento estático respecto del eje  $y$  del área de la sección que se ha recorrido hasta alcanzar la posición  $s$  de un punto sobre la línea media del perfil.

Así pues, las distribuciones de tensiones normales y tangenciales en un elemento estructural, causadas por los esfuerzos (y estos, a su vez, por las cargas actuantes), constituyen un *campo escalar* en el volumen del elemento, si los esfuerzos se distribuyen de la misma manera. En el contexto de la asignatura, la obtención de la tensión normal y la tensión tangencial en un punto de una viga es un proceso directo para el alumno y, una vez asimilados los conceptos correspondientes, relativamente sencillo. No obstante, la obtención de las distribuciones de tensiones de manera analítica para todo el volumen puede resultar una tarea compleja. El desarrollo y el empleo del laboratorio virtual FLEXIÓN se justifica entonces por dos motivos:

- Servir como alternativa a los métodos experimentales de obtención de tensiones, como la fotoelasticidad (Torroja, 1967) que tiene escasa aplicación práctica y requiere de una considerable inversión en equipamiento de laboratorio.
- Representar gráficamente las distribuciones de tensiones en una sección cualquiera de un elemento estructural, así como en todo el volumen del mismo.

### 3. Descripción del laboratorio virtual flexión

El laboratorio virtual FLEXIÓN se ha programado en el entorno del software MATLAB<sup>®</sup> mediante la interfaz gráfica de usuario (GUI), que permite una elevada interactividad con el usuario. Este hecho se pone de manifiesto observando la interfaz que se muestra al ejecutar el programa (Figura 4).

En la interfaz se distinguen las siguientes regiones con los parámetros que puede introducir o controlar el usuario de manera directa:

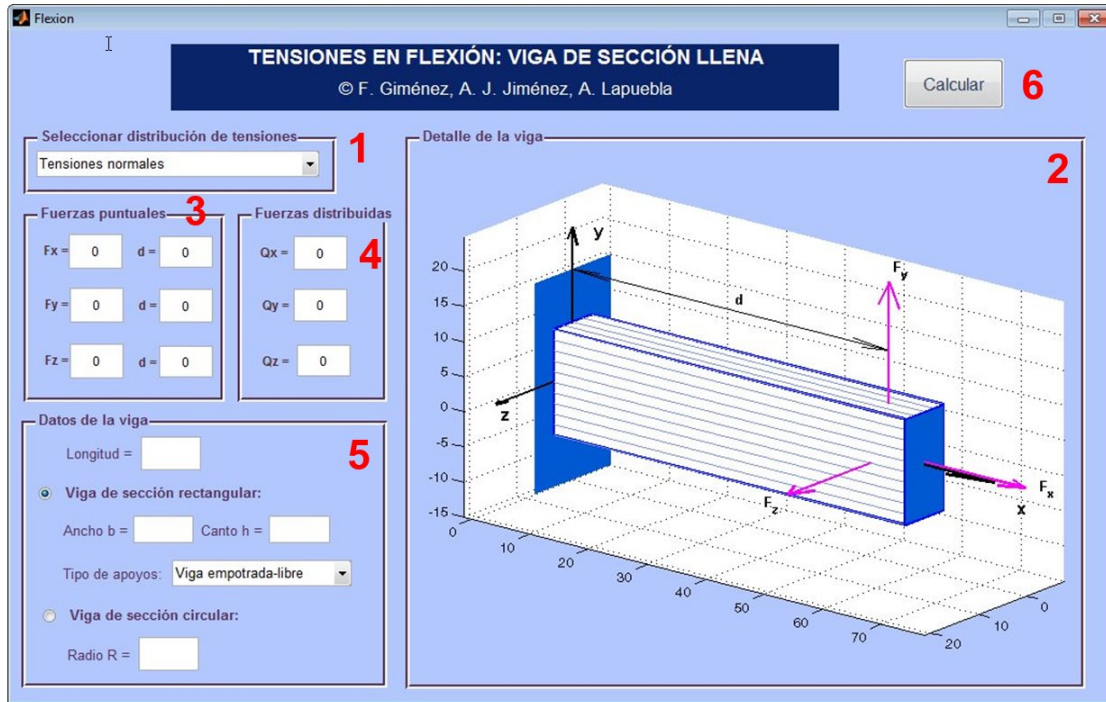


Figura 4: Interfaz de usuario del laboratorio virtual FLEXIÓN.

1. Lista desplegable “*Seleccionar distribución de tensiones*” (Figura 5). Permite seleccionar la distribución de tensiones a visualizar:

- Tensiones normales, producidas por los esfuerzos axiales o de flexión.
- Tensiones tangenciales (plano  $xy$ ) producidas por el esfuerzo cortante  $V_y$ .
- Tensiones tangenciales (plano  $xz$ ) producidas por el esfuerzo cortante  $V_z$ .
- Tensión equivalente de Von Mises<sup>3</sup>. Es un valor (ficticio) de tensión obtenido a partir de la tensión normal y de las tensiones tangenciales en el mismo según la expresión (7). Es la base del criterio de fallo de materiales dúctiles propuesto por dicho autor

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)}. \quad (7)$$

- Tensión principal 1. Es la tensión principal máxima en un punto ( $\sigma_1$ ).
- Tensión principal 2. Es la tensión principal intermedia en un punto ( $\sigma_2$ ).
- Tensión principal 3. Es la tensión principal mínima en un punto ( $\sigma_3$ ).

2. *Detalle de la viga*. Muestra el sistema coordenado local  $xyz$  necesario para situar y orientar las fuerzas puntuales sobre la barra.

3. *Fuerzas puntuales*. Permite la introducción de fuerzas puntuales  $\mathbf{F}_i$  paralelas a los ejes coordenados  $xyz$ , situadas a una distancia  $\mathbf{d}_i$  de uno de sus extremos.

4. *Fuerzas distribuidas*. Permite la introducción de fuerzas uniformemente distribuidas a lo largo de la longitud de la barra.

<sup>3</sup>Richard Von Mises (1883-1953). Físico austríaco.



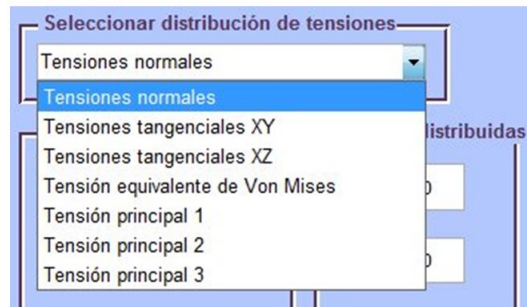


Figura 5: Distribuciones de tensiones que se pueden representar con el laboratorio virtual FLEXIÓN.

5. *Datos de la viga.* En este campo se especifican la geometría de la viga y sus condiciones de contorno:

- *Longitud de la viga.*
- *Viga de sección rectangular.* Si esta es la geometría de la sección de la viga, se hace clic en el radio botón y se especifican el ancho **b** y el canto **h** de la sección.
- *Tipo de apoyos.* Para simular vigas de sección rectangular, se pueden seleccionar del menú desplegable de la Figura 6 uno de los tres tipos de apoyo disponibles.

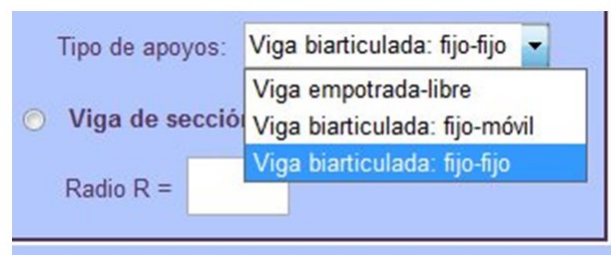


Figura 6: Selección de los tipos de apoyo para vigas de sección rectangular.

- *Viga de sección circular.* En este caso, se hace clic en el radio botón correspondiente y se especifica el radio **R** de la sección.

6. Botón “*Calcular*”. Una vez se han introducido todos los datos, se hace clic en este botón para que el laboratorio virtual realice los cálculos correspondientes.

## 4. Ejemplos de aplicación

### 4.1. Viga biapoyada

El modelo de cálculo de una viga biapoyada, fabricada con acero S275, se ilustra en la Figura 7. Se pide estudiar las distribuciones de tensiones que tienen lugar en la misma y calcular el coeficiente de seguridad.

La viga tiene una longitud  $L = 2$  m y su sección es rectangular de dimensiones  $b \times h = 10 \times 15$  cm.

Los datos del ejercicio se introducen en la interfaz, tal y como se muestra en la Figura 8.

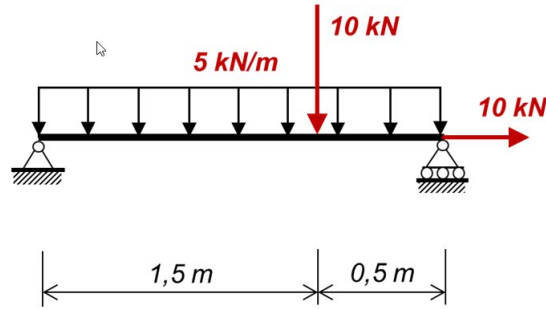


Figura 7: Viga biapoyada a resolver mediante el laboratorio virtual FLEXIÓN.

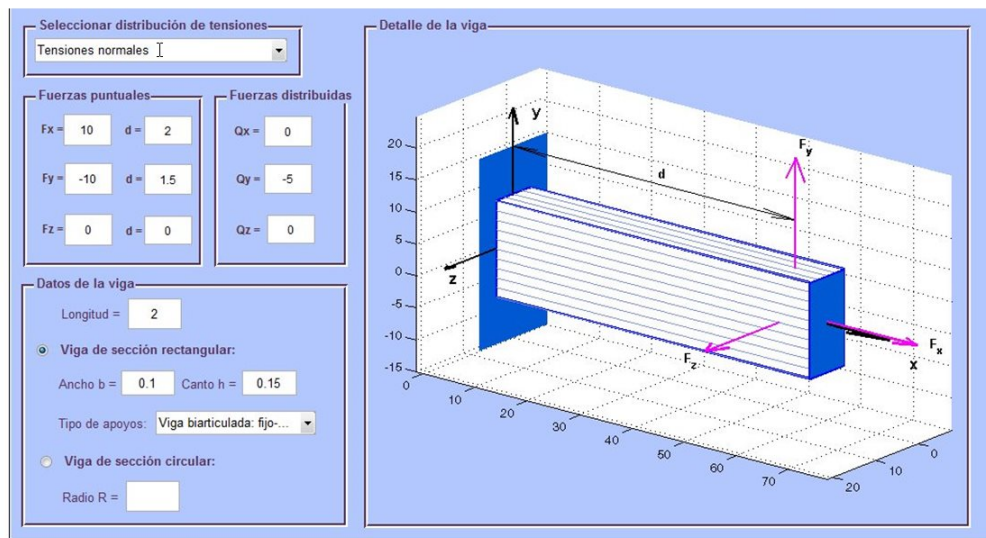


Figura 8: Introducción de los datos del ejemplo 4.1

En la ventana de la interfaz del usuario no se especifica qué sistema de unidades emplear. Corresponde al usuario ser coherente con la introducción de las cantidades.

Para visualizar la distribución de las tensiones normales, se selecciona del desplegable la opción *Tensiones normales* y se hace clic en el botón *Calcular* (Figura 9). En esta nueva pantalla, el aspecto de la interfaz de usuario se modifica, mostrando la distribución tensional buscada junto a un esquema de cómo actúan las cargas en el elemento. Se observa que la tensión normal aumenta rápidamente en las secciones centrales, puesto que en ellas el momento flector es mayor. Esto se comprueba en el campo inferior izquierdo de la pantalla, donde se indican los valores de las tensiones normales máximas (de tracción y de compresión) así como la posición  $x$  de la sección (o secciones) donde tienen lugar. Si se desea conocer la distribución de tensiones internas en dicha sección (o en cualquier otra), basta con anotar la posición de la misma en el campo correspondiente (resaltado en la Figura 9) y hacer clic en el botón *Calcular* de esta pantalla (Figura 10).

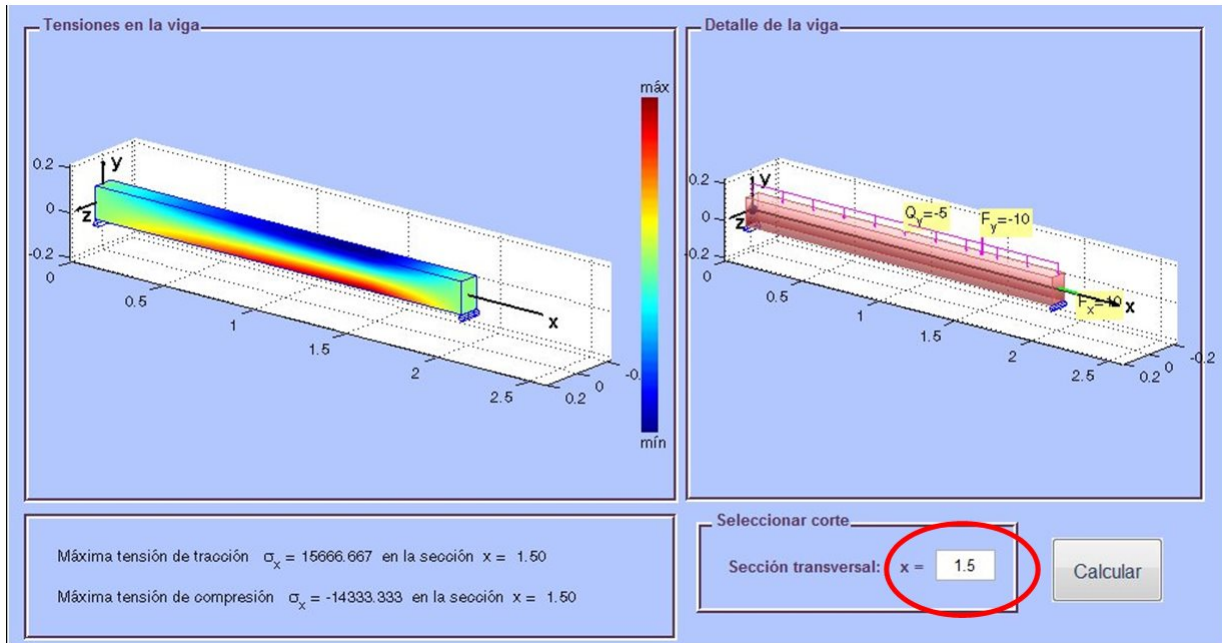


Figura 9: Distribución de tensiones normales en la viga.

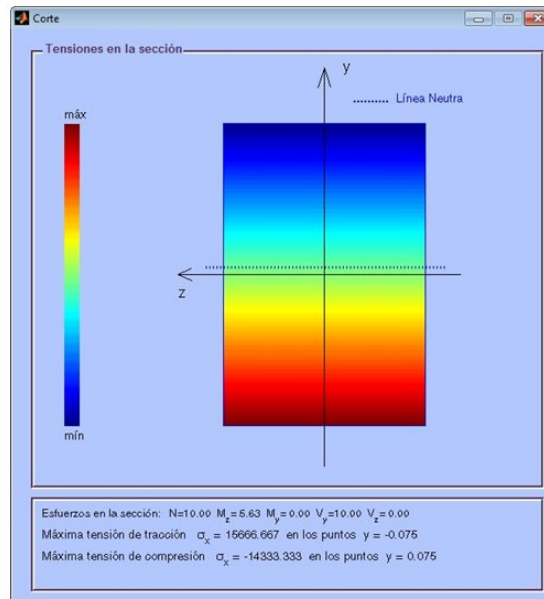


Figura 10: Distribución de tensiones normales en la sección más solicitada de la viga ( $x = 1.5$  m).

La utilidad de la Figura 10 está fuera de toda duda. En ella, se identifica la posición de la línea neutra de la sección —lugar geométrico de puntos de tensión normal  $\sigma_x = 0$ — y la posición de los puntos más alejados de ella, en los que se da la máxima tensión normal (de tracción y de compresión). El campo inferior de la ventana indica los esfuerzos, los valores máximos de las tensiones y las coordenadas de los puntos donde tienen lugar.

En la Figura 11 y la Figura 13 se representan las distribuciones de las tensiones tangenciales

producidas por los esfuerzos cortantes  $V_y$  y  $V_z$ , respectivamente. En la Figura 11 se observa que la distribución es discontinua, en tanto que lo es el esfuerzo cortante  $V_y$  a lo largo de la barra. En el caso de la Figura 13 el resultado es trivial, ya que no actúan esfuerzos cortantes en la dirección del eje  $z$ .

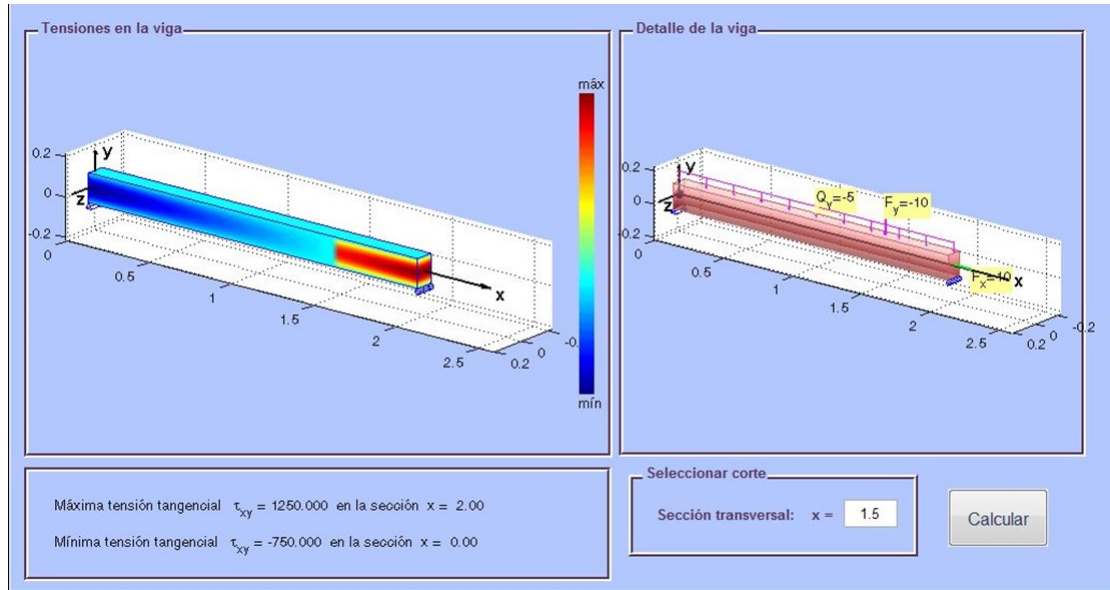


Figura 11: Distribución de tensiones tangenciales en la viga provocadas por el esfuerzo cortante  $V_y$ .

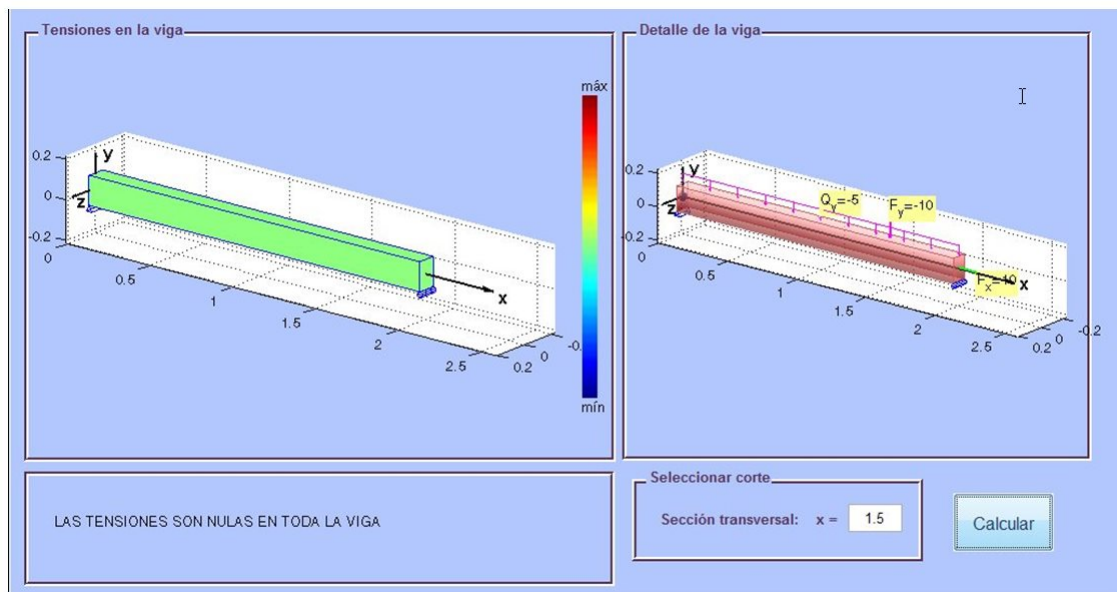


Figura 12: Distribución de tensiones tangenciales en la viga provocadas por el esfuerzo cortante  $V_z$ .

En la Figura 13 se ilustra la distribución de tensiones tangenciales debidas al esfuerzo cortante  $V_y$  en la sección situada en  $x = 1.5$  m. En elementos estructurales de sección llena y relativamente esbeltos (elevada relación longitud/canto), que trabajan fundamentalmente a flexión y cortante, suelen desprejarse las tensiones tangenciales debidas al cortante. La razón

es que, en general, para cargas y condiciones de apoyo habituales, la relación entre tensiones normales y tangenciales es proporcional a la esbeltez de la viga (Popov, 2000). De hecho, basta con comparar los valores máximos de ambas tensiones (Figuras 10 y 13) para corroborarlo. El valor de la tensión normal máxima que proporciona la expresión (2) suele condicionar el diseño de los elementos a flexión.

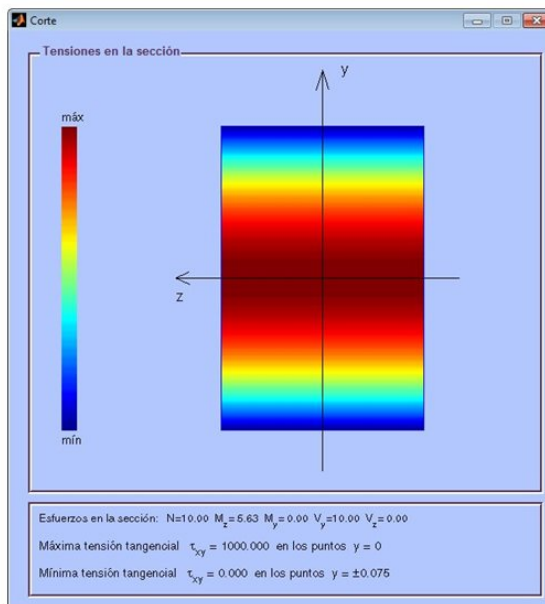


Figura 13: Distribución de tensiones tangenciales en la sección situada en  $x = 1.5$  m.

Para comprobar el efecto combinado de las tensiones normales y las tensiones tangenciales debidas al cortante en un mismo punto, se emplea el criterio de tensión equivalente de Von Mises en tanto que la viga de acero y este es un material dúctil. Los resultados obtenidos en el laboratorio virtual se ilustran en la Figura 14 para todo el elemento y en la Figura 15 para la sección más solicitada.

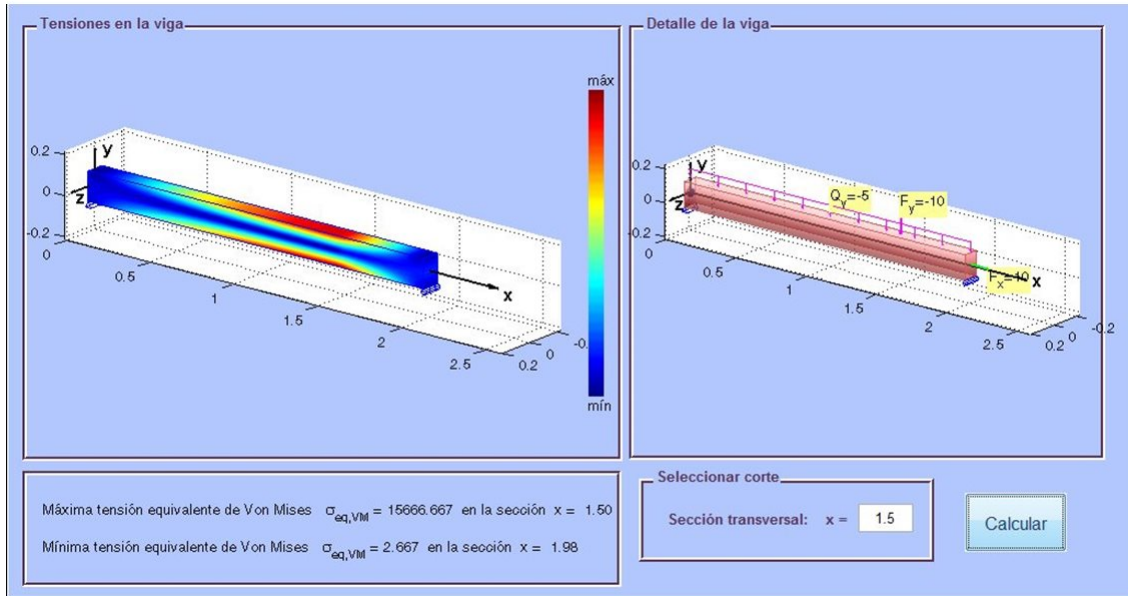


Figura 14: Distribución de la tensión equivalente de Von Mises a lo largo de la viga.

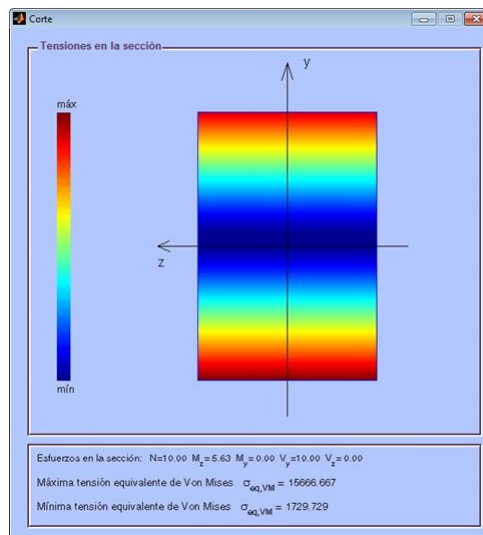


Figura 15: Distribución de la tensión equivalente de Von Mises en la sección situada en  $x = 1.5$  m.

De la Figura 15 se obtiene que la tensión equivalente máxima de Von Mises es de 15667  $\text{kN/m}^2$  (todas las cantidades se han introducido empleando  $\text{kN}$  y  $\text{m}$  como unidades), lo que equivale a menos de 16 MPa. El material con el que se ha fabricado la viga es acero S275, cuyo límite elástico es  $\sigma_e = 275$  MPa. Se asume este valor como la tensión última que el material es capaz de absorber en régimen elástico y lineal, luego el coeficiente de seguridad  $n$  se calcula como:

$$n = \frac{\sigma_u}{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} = \frac{275}{16} = 17.2 \gg 1, \quad (8)$$

Se concluye que la viga resiste holgadamente las cargas aplicadas. Se puede plantear una reducción de las dimensiones de la sección, con el fin de reducir peso y lograr una reducción de

costes. El empleo de una sección maciza de acero es, a todas luces, antieconómica.

Otros resultados interesantes que se pueden obtener con el laboratorio virtual son las tensiones principales, lo que se ilustra en las figuras Figuras 16 a 19.

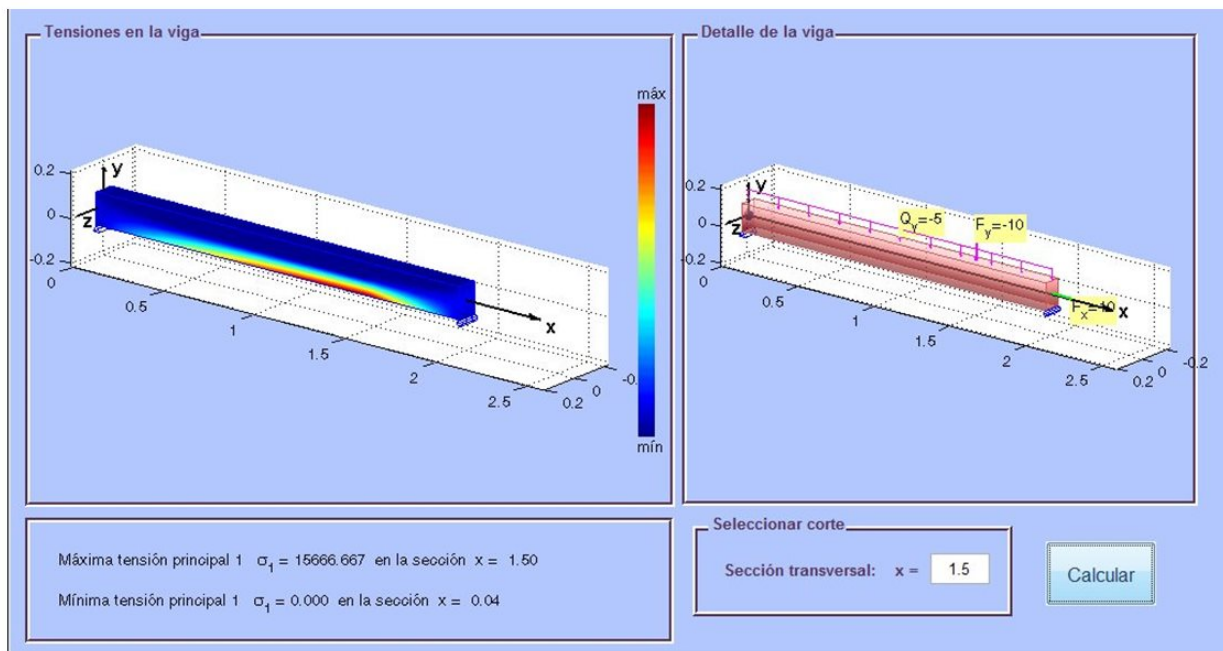


Figura 16: Distribución de la tensión principal máxima  $\sigma_1$  a lo largo de la viga.

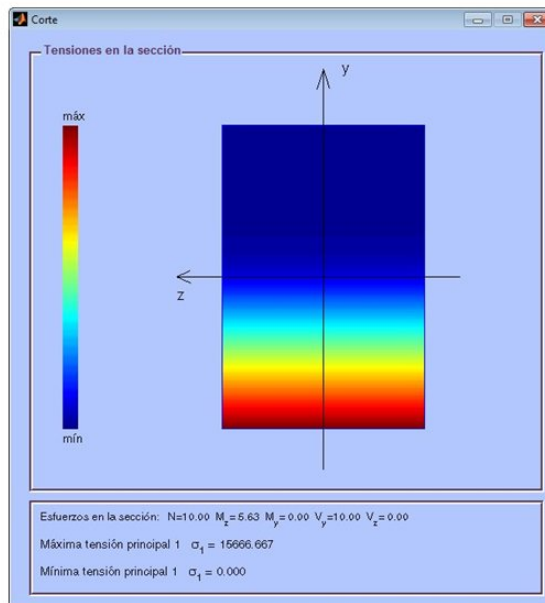


Figura 17: Distribución de la tensión principal máxima  $\sigma_1$  en la sección situada en  $x = 1.5$  m.

La obtención de las distribuciones de tensiones principales son de interés desde el punto de vista de la Elasticidad, así como para el diseño o la comprobación de los elementos estructurales según los conceptos de la Resistencia de Materiales.

De la Figura 16 y la Figura 17 se obtiene el valor máximo de la tensión principal máxima  $\sigma_1$  en la viga. Lógicamente, este valor coincide con el de la máxima tensión normal  $\sigma_x$  de tracción y se da en los mismos puntos.

Algo análogo puede afirmarse con respecto a la mínima tensión principal  $\sigma_3$  en la viga. Su valor coincide con el de la máxima tensión normal de compresión obtenido anteriormente, tal y como se ilustra en la Figura 18 y en la Figura 19.

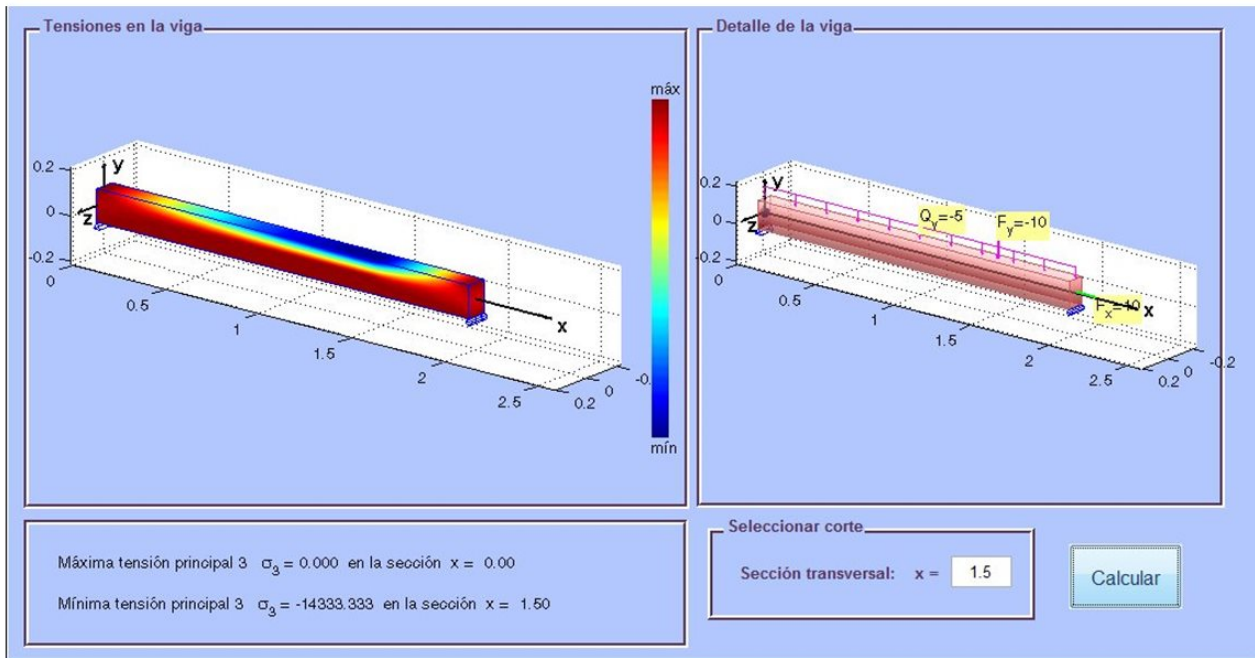


Figura 18: Distribución de la tensión principal mínima  $\sigma_3$  a lo largo de la viga.



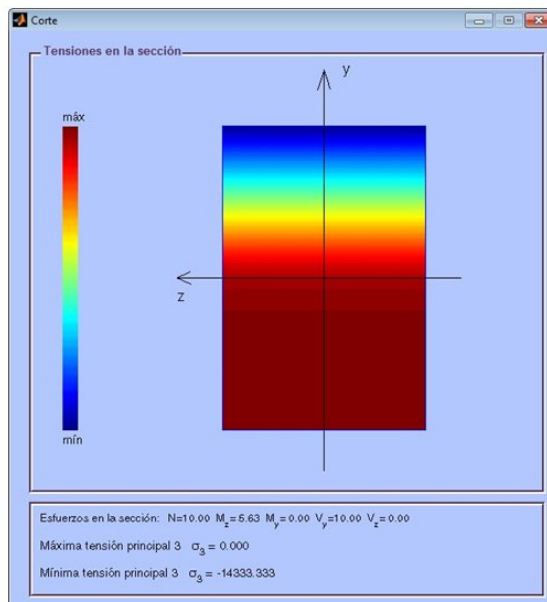


Figura 19: Distribución de la tensión principal mínima  $\sigma_3$  en la sección situada en  $x = 1.5$  m.

#### 4.2. Viga en ménsula

La Figura 20 muestra el modelo de cálculo de una ménsula cilíndrica de 2 m de longitud, fabricada con acero S275. Se pide obtener la distribución de tensiones normales a lo largo de la misma.

La sección de la viga es maciza y su radio es  $R = 10$  cm.

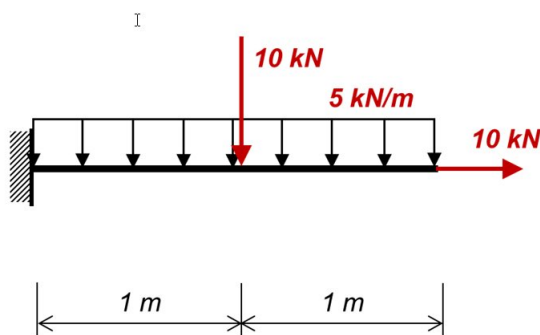


Figura 20: Viga en ménsula.

Para resolver este ejemplo, se va a emplear el laboratorio virtual FLEXIÓN del mismo modo que en el ejemplo 4.1. En este caso, todas las dimensiones se dan en metros salvo el radio, que se da en centímetros.

La solución de este ejemplo se ilustra en la Figuras 21 y 22.

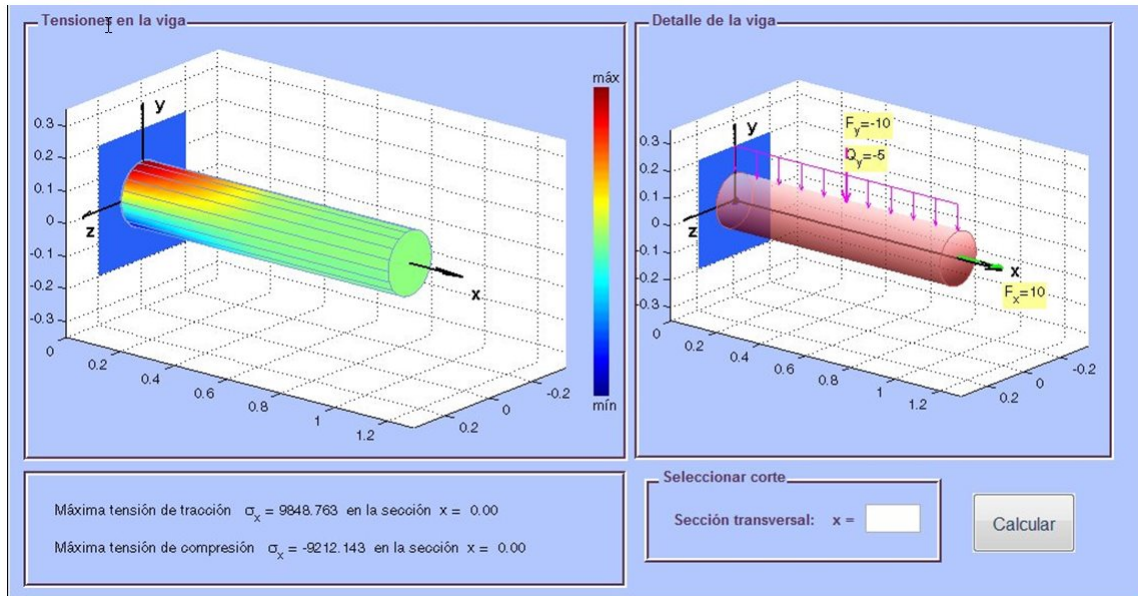


Figura 21: Distribución de tensiones normales en una ménsula de sección circular.

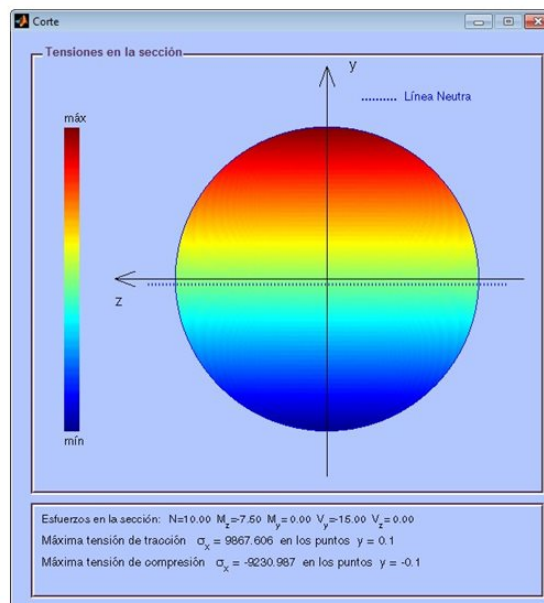


Figura 22: Distribución de tensiones normales en la sección más solicitada de la ménsula, situada en  $x = 0$  m.

## 5. Conclusiones

Los laboratorios virtuales son aplicaciones informáticas que constituyen entornos virtuales de aprendizaje, así como herramientas de apoyo al proceso de la enseñanza. De hecho, suponen un complemento o una alternativa muy interesante a las tradicionales prácticas de laboratorio, que requieren de elevadas inversiones en equipamiento.

En este trabajo se ha descrito el laboratorio virtual FLEXIÓN, que ha sido concebido para obtener distribuciones tensionales en elementos lineales prismáticos o cilíndricos, de presencia

habitual en estructuras. Si bien este es un objetivo de aprendizaje que los alumnos pueden llevar a cabo de forma manual, el empleo del laboratorio virtual FLEXIÓN supone las siguientes ventajas:

- La obtención manual de una distribución de tensiones en todo un elemento es laboriosa. Esta tarea es sumamente sencilla gracias a la salida gráfica del laboratorio virtual.
- Refuerza la asimilación de los conceptos explicados durante las sesiones teóricas de la asignatura.
- Permite la simulación de diversos problemas y la rápida obtención de los resultados correspondientes.
- Su interfaz de usuario es intuitiva y muy sencilla de usar. No resultan necesarios conocimientos de informática para su empleo. De este modo, se soslaya el problema inherente al uso de software de cálculo complejo —como los basados en el Método de los Elementos Finitos—, que requieren de conocimientos de los que carece, generalmente, un alumno de los primeros cursos de grado.

Del laboratorio virtual FLEXIÓN, los autores destacan dos aspectos en particular:

- La salida gráfica. Se ha diseñado de manera que se adapte de manera dinámica a los resultados obtenidos en cada momento.
- La independencia de las cantidades introducidas con respecto a un sistema de unidades en particular. Con esto, el usuario solamente debe preocuparse de introducir coherentemente las cantidades en un mismo sistema, sin que sea necesario realizar conversiones.

Por otro lado, el laboratorio virtual FLEXIÓN no está exento de inconvenientes que pueden soslayarse con futuras versiones de la aplicación:



- Únicamente se pueden obtener distribuciones tensionales en elementos isostáticos, que son independientes del material empleado.
- Las geometrías seccionales disponibles se limitan a la rectangular (maciza o hueca) o a la circular.
- Por motivos similares al punto anterior, no se puede obtener la distribución de tensiones tangenciales de torsión porque esta depende de la geometría de la sección transversal.
- Hasta el momento, y por diversos motivos, no se ha podido implementar como una aplicación interactiva accesible desde cualquier navegador web, con lo que su uso sería independiente de la plataforma informática.

Como ya se ha hecho constar, el laboratorio virtual FLEXIÓN ha sido concebido como una herramienta destinada a facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje de asignaturas relacionadas con las materias *Elasticidad y Resistencia de Materiales*. En los últimos años, los autores han programado otros laboratorios virtuales para el mismo fin (Giménez-Palomares et al., 2011a) (Giménez-Palomares et al., 2011b) (Jiménez-Mocholí et al., 2011) (Jiménez-Mocholí et al., 2013) y (Jiménez-Mocholí et al., 2014). Estos laboratorios virtuales se encuentran disponibles para el alumnado de la universidad que desee emplearlos en una colección del repositorio institucional de recursos electrónicos en línea RIUNET, de la Universitat Politècnica de València (<https://riUNET.upv.es/handle/10251/34351>). Se pretende que el uso combinado del laboratorio virtual FLEXIÓN con los otros ya existentes en la colección facilite grandemente el aprendizaje de las materias citadas.

Finalmente, y teniendo en cuenta las limitaciones del laboratorio virtual FLEXIÓN, los autores concluyen que se trata de una herramienta excelente para los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Elasticidad y la Resistencia de Materiales en las titulaciones de grado en ingeniería. El uso del laboratorio virtual FLEXIÓN por parte de los alumnos, y la posterior recogida de comentarios y opiniones, permitirá a los autores detectar puntos débiles que han pasado desapercibidos hasta el momento y plantear las medidas correctoras oportunas.

## Referencias

-  [Bartolomé A. R. \(2004\).](#)  
*Nuevas tecnologías en el aula: guía de supervivencia.*  
Barcelona, España: editorial Graó de IRIF.
-  [Depcik C., Assanis D. N. \(2005\).](#)  
*Graphical user interfaces in an engineering educational environment.*  
Computer Applications in Engineering Education, 13(1), 48–59.
-  [Duffy T., Jonassen, K. \(1992\).](#)  
*Constructivism and the technology of instruction.*  
Hilsdale, New Jersey, NY, EEUU: Lawrence Erlbaum Associates.
-  [Feodósiev V. I. \(1997\).](#)  
*Resistencia de Materiales.*  
Sevilla, España: editorial URSS.
-  [Gere J. M., Timoshenko, S. P. \(2009\).](#)  
*Resistencia de Materiales.*  
Madrid, España: Thompson.
-  [Giménez-Palomares F., Lapuebla-Ferri A. , Jiménez-Mocholí A. J. y Monsoriu-Serra, J. A. \(2011a\).](#)  
*Simulación de esfuerzos en pórticos.*  
Modelling in Science Education and Learning, 4(16), 207–221.
-  [Giménez-Palomares F., Monsoriu-Serra J. A., Lapuebla-Ferri A. Jiménez-Mocholí, A. J. \(2011b\).](#)  
*Un laboratorio virtual para la enseñanza de momentos de inercia de figuras planas.*  
Modelling in Science Education and Learning, 4(18), 231–239.
-  [Infante Jiménez C. \(2014\).](#)  
*Propuesta pedagógica para el uso de laboratorios virtuales como actividad complementaria en las asignaturas teórico-prácticas.*  
Revista Mexicana de Investigación Educativa, 19(62), 919–937.
-  [Jiménez-Mocholí A. J., Lapuebla-Ferri A., Romero-García M. e Ivorra-Chorro, S. \(2011a\).](#)  
*Elasticidad y Resistencia de Materiales: apuntes de clase para las titulaciones de grado en ingeniería.*  
Valencia, España: Editorial de la Universitat Politècnica de València.
-  [Jiménez-Mocholí A. J., Giménez-Palomares F., Lapuebla-Ferri, A. \(2011b\).](#)  
*Obtención de las características seccionales de secciones metálicas de pared delgada abiertas.*  
Modelling in Science Education and Learning, 4(20), 251–261.

-  Jiménez-Mocholí A. J., Giménez-Palomares F. y Lapuebla-Ferri A. (2013). *Círculos de Mohr: un laboratorio virtual para la enseñanza y el aprendizaje de estados tensionales planos*. Modelling in Science Education and Learning, 6(1)(12), 157–171.
-  Jiménez-Mocholí A. J., Giménez-Palomares F., Lapuebla-Ferri A. (2014). *Utilización de laboratorios virtuales para la enseñanza y el aprendizaje de la Elasticidad*. Modelling in Science Education and Learning, 7(1), 37–47.
-  Michavila F., Ripollés F., Esteve F. (2011). *El día después de Bolonia*. Madrid, España: Editorial Tecnos.
-  Popov E. P. (2000). *Mecánica de Sólidos*. Madrid, España: Pearson Educación.
-  RIUNET (repositorio institucional de recursos electrónicos en línea de la Universitat Politècnica de València). <https://riunet.upv.es/handle/10251/34351/browse?type=dateissued>. Consultado el 12 de mayo de 2016.
-  Rué J. (2009). *El aprendizaje autónomo en educación superior*. Madrid, España: Nacerca S. A. de Ediciones.
-  The Mathworks. Matlab user's manual (2013). *Natick, MA, USA: The Mathworks*.
-  Torroja E. (1967). *Lecciones elementales de Elasticidad con aplicación a la técnica de la construcción*. Madrid, España: Dossat.

Modelling in Science Education and Learning  
<http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL>