MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volume 10 (2), 2017 doi: 10.4995/msel.2017.7707.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada
Universitat Politècnica de València

Los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización
Fermi problems as tasks to introduce modelling: what we know and what else we should know

Lluís Albarracín
Universitat Autònoma de Barcelona.
lluis.albarracin@uab.cat

Abstract

Los problemas de Fermi han sido ampliamente utilizados en la enseñanza de la Física a nivel universitario en Estados Unidos. En la literatura pueden encontrarse múltiples recomendaciones de uso en otros ámbitos educativos, como sería el caso de la introducción de la modelización matemática, pero todavía no se ha logrado su presencia en las aulas de matemáticas. En este artículo presentamos este tipo de problemas y discutimos sobre su definición y sus características, que los hacen especialmente interesantes para utilizar las matemáticas en contextos reales. También repasamos aquellos aspectos que ha sido investigados desde la perspectiva de la Educación Matemática, en especial la forma en la que los alumnos generan modelos matemáticos al resolverlos y apuntamos algunas direcciones que deberían ser tratadas en futuras investigaciones.

Fermi problems have been widely used in Physics teaching at university level in the United States. Multiple recommendations for use in other educational areas can be found in the literature, as the case of mathematical modeling introduction, but its presence in math classrooms has not been yet achieved. We present these problems and discuss about its definition and characteristics that make them particularly interesting for the use of mathematics in real contexts. We also review those aspects that have been investigated from the perspective of mathematics education, especially the way in which students generate mathematical models to solve them and we aim some directions that should be addressed in future research.

Palabras clave: Problemas de Fermi, modelización, estimación, grandes cantidades
Keywords: Fermi problems, modelling, estimation, big numbers

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

1. Introducción

Enricco Fermi fue uno de los grandes físicos del siglo XX, seguramente, el último gran físico con aportaciones relevantes en aspectos tanto teóricos como empíricos (Navarro, 2013). Destacó por su labor investigadora -recibió el premio Nobel en 1938 y participó en el proyecto Manhattan, siendo clave en el desarrollo de la bomba atómica- pero también es recordado por utilizar un tipo muy concreto de problemas en sus clases. Para preparar a sus alumnos para el trabajo experimental en el laboratorio (en el sentido descrito en Reif y John, 1979) y con la idea de agilizar procesos a partir del razonamiento, Fermi les proponía problemas de estimación para mostrar la potencia del pensamiento deductivo. Por ello estos problemas han acabado siendo denominados *problemas de Fermi*.

El potencial didáctico de estos problemas y la influencia de la figura de Fermi propiciaron el inicio de una tradición bastante arraigada en las facultades de Física de Estados Unidos, en las que los problemas de Fermi son comunes. Su uso se ha ido extendiendo a otros ámbitos y en la actualidad existenten concursos de resolución de problemas de Fermi [1] y han sido utilizados como herramienta en entrevistas de trabajo en empresas de perfil tecnológico (Poundstone, 2003). Actualmente pueden encontrarse grandes colecciones de problemas de Fermi en la red, a continuación destacamos algunas de estas fuentes:

- http://www.fermiquestions.com/

  Una web interactiva que propone miles de problemas de Fermi y que permite introducir las respuestas para conocer el grado de acierto obtenido.

- http://mathforum.org/workshops/sum96/interdisc/sheila1.html

  La web de problemas de Fermi de Sheila Talamo contiene una gran cantidad de problemas y explicaciones sobre la forma en la que pueden utilizarse en las aulas.

- http://www.edgalaxy.com/journal/2012/5/29/an-excellent-collection-of-fermi-problems-for-your-class.html

  Otra extensa lista de problemas de Fermi.

- https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/Numbers/Math/Mathematical_Thinking/

  Una extensa colección de problemas con resolución comentada.

En la literatura científica se pueden encontrar diversas recomendaciones de su uso, tanto para introducir el uso de tecnología en la clase de matemáticas (Tangney y Bray, 2013), combinar conocimientos de distintos ámbitos (Weiss, 2013) o tratar el sentido numérico (Wagner y Davis, 2010). Sin embargo, los problemas de Fermi no se han incorporado a las propuestas educativas en nuestro entorno. De hecho, las investigaciones en el marco de la Educación Matemática son escasas aunque muestran la potencialidad de los problemas de Fermi como herramientas para promover la modelización matemática (Ärlebäck, 2009) y trabajar la estimación (Siegel et al., 1982). Desde este punto de vista, este artículo aborda una recopilación de la investigación sobre problemas de Fermi efectuada hasta la fecha y se pretende destacar aquellos aspectos sobre los que sería necesario enfocar futuros estudios.

[1] véase el Science Olympics Program: http://www.physics.uwo.ca/science_olympics/events/index.html

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

2. Algunos ejemplos de problemas de Fermi y su resolución

Es habitual en la literatura que los problemas de Fermi sean introducidos a partir de ejemplos. En esta sección mostraremos algunos problemas y sus procesos de resolución para mostrar el tipo de razonamiento que pueden promover en los alumnos.

El ejemplo habitual de problema de Fermi que se utiliza para ejemplificar sus características es el de *¿cuántos afinadores de piano hay en Chicago?* Se puede resolver este problema desde diversas perspectivas, pero una posibilidad es realizar las siguientes suposiciones razonadas que provienen de diferentes conocimientos del contexto del problema:

- Población de Chicago: 3 millones de personas
- Promedio estimado de dos personas en cada casa
- Una de cada veinte casas tiene un piano
- Un piano se afina una vez al año
- Tiempo para afinar un piano: 2 horas
- Cada afinador trabaja 8 horas por día, 5 días a la semana y 50 semanas en un año

A partir de este punto, la resolución se estructura en conseguir el número de afinaciones de piano necesarias en un año y el número de afinaciones que puede realizar un afinador profesional en el mismo periodo de tiempo.

- (3.000.000 personas)/(2 personas/casa) $\times$ (1 piano/20 casas) $\times$ (1 afinación por piano por año) $=$ 75.000 afinaciones por año
- (50 semanas) $\times$ (5 días) $\times$ (8 horas)/(2 horas por afinación) $=$ 1.000 afinaciones por año y afinador
- Estimación final: 75.000 $\div$ 1.000 $=$ 75 afinadores en Chicago

Evidentemente, la resolución del problema presenta una cadena de suposiciones que se enlazan para responder a la pregunta a partir de dos aspectos básicos. Por una parte trabajamos a partir de la *necesidad* de afinar pianos, por otro con las *posibilidades y limitaciones* de los afinadores profesionales. Identificar estos aspectos requiere de un conjunto de conocimientos sobre aspectos sociales y estructurar la resolución obliga al resolutor a trasladar al entorno matemático estos conocimientos.

Otro problema de Fermi que puede ser resuelto por un procedimiento similar es el del cáculo del valor del *naming* de nuestra propia casa. El *naming* se refiere al valor económico concedido al impacto publicitario de colocar la nomenclatura de una marca a un lugar. En este caso es necesario obtener información externa sobre el valor del *naming* de algún lugar de referencia. Las suposiciones y cálculos serían los siguientes:

- Un año de naming del Camp Nou son 20 millones de euros al año[2]
- Los partidos Barça - Madrid los ven unos 400 millones de personas en el mundo[3]
- Toda esta gente puede tener de media un impacto publicitario del nombre de Camp Nou cada semana durante todo el año (400.000.000 $\times$ 52 $=$ 20.800.000.000 impactos)

[2] http://www.sport-english.com/en/news/barca/barca-considering-renaming-stadium-qatar-airways-camp-nou-5274715
[3] http://www.elmundo.es/elmundo/2013/10/24/television/1382637348.html

- Cada impacto publicitario vale 20.000.000 ÷ 20.800.000.000 =0,00096 euros

- Yo hablo de mi casa con unas 200 personas y puedo impactar unas 10 veces al año con ellas

- El *naming* de mi casa valdría $200 \times 10 \times 0,00096$= 1,92 euros al año

La discusión sobre la magnitud del resultado y las implicaciones de las diferentes suposiciones realizadas (¿tiene mi casa el mismo prestigio social que el Camp Nou?) proporcionan un ambiente de discusión que va más allá del ámbito de las Matemáticas y que puede y debe ser aprovechado en las aulas.

Los libros de Weinstein y Adam (2009) y Weinstein (2012) se centran en proponer una gran cantidad de problemas de Fermi y exponer sus procesos de resolución. En ellos se puede observar la forma en la que utilizan el conocimiento sobre los contextos estudiados para organizar las soluciones. De hecho también añaden elementos interesantes como resolver un problema de dos formas distintas para poder corroborar la validez del resultado obtenido. En concreto, utilizan este procedimiento para estimar el número de desplazamientos en avión en un año en Estados Unidos y obtienen sus resultados primero a partir de la necesidad de viajar de las personas y en segundo lugar a partir de la capacidad de los aeropuertos de acoger vuelos.

En función del contexto tratado en los problemas utilizados es posible que la situación esté alejada de los intereses de los resolutores. Sriraman y Lesh (2006) entienden que el problema de los afinadores de piano no es más que un ejercicio mental que no tiene todo el valor pedagógico que puede proporcionar la resolución de problemas de Fermi. Por ello proponen problemas basados en contextos que conecten con el entorno cotidiano de los alumnos, estudiando situaciones como el consumo de agua corriente, el del uso de combustibles fósiles, de comida desechada o producción de basura en una ciudad. De hecho, en Sriraman y Knott (2009) se muestran los resultados que producen los alumnos y el proceso de reflexión que promueven, conectando con el posicionamiento de la Educación Matemática crítica.

En la misma línea, en Albarracín y Gorgorió (2015a) se usan problemas de Fermi en los que intervienen recuentos de personas para analizar informaciones aparecidas en los medios de comunicación. Primeramente se solicita a los alumnos que estimen la cantidad de personas que pueden asistir a un concierto celebrado en el patio del instituto. A partir del conocimiento generado para resolver este problema sobre el terreno, posteriormente se proponen problemas para contrastar informaciones sobre asistencia a manifestaciones o mítines políticos. El trabajo inicial permite que los alumnos construyan su propio conocimiento matemático que permite sostener sus afirmaciones, con lo que adquieren la competencia de cuestionar informaciones publicadas en periódicos o televisión, que normalmente consultan sin un proceso reflexivo sobre la veracidad de la información que proporcionan.

Por lo tanto, una vez se ha evidenciado que los problemas de Fermi pueden ser una herramienta útil para que los alumnos adquieran hábitos reflexivos sobre su entorno, además de promover el trabajo de modelización matemática, aparece la necesidad de conseguir listas de problemas ideadas para cubrir cada uno de estos objetivos. Hasta el momento se pueden encontrar listados de problemas de Fermi, pero no pasan de ser recopilaciones que no aportan ese conocimiento complementario necesario para elegirlos. De hecho, la mayoría de investigaciones sobre problemas de Fermi se centran en un número muy reducido de estos, dada la propia naturaleza de los procesos de análisis cualitativos. Es necesario entonces un esfuerzo de elaboración de problemas y análisis de las posibilidades didácticas y pedagógicas que estos proporcionan.

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

3. Sobre las definiciones propuestas de los problemas de Fermi

Más allá de proporcionar ejemplos concretos de problemas de problemas de Fermi, es necesario ofrecer al lector una definición que pueda ser utilizada para determinar si una pregunta concreta puede entenderse como uno de estos problemas y proporcionar algunas de las características que los identifican. Parte de la dificultad se encuentra en que es un tipo de problemas que se crearon en un entorno muy concreto que compartía listas de problemas. De hecho, en algunos artículos del campo de la Educación de las Ciencias Físicas (véase Robinson, 2008), por ejemplo) ni siquiera se intenta dar una definición, dando por supuesto que el público al que se dirigen ya conoce estos problemas.

Algunos autores del ámbito de la Educación Matemática han tratado en los útimos años de recoger la esencia de lo que transforma una pregunta en un problema de Fermi. Ridgway et al. (2001) los definen como sigue:

> Problems which at first seemed impossible but, on reflection, can be solved by making assumptions based on common knowledge and following simple-but-long chains of reasoning.

Entendemos que esta definición no funciona en el sentido de que no ofrece una caracterización completa de la naturaleza de los problemas de Fermi, pero presenta dos aspectos que son esenciales. Por un lado, la imposibilidad aparente que presentan y que procede de la falta de datos concretos. Por otro lado, el proceso de resolución presenta diversas estimaciones razonadas que deben encadenarse. Otro aspecto de gran relevancia es determinar el rango de valores aceptable para la solución obtenida por los alumnos. Anderson y Sherman (2010) proponen la siguiente definición que incluye este elemento:

> The Fermi question is a type of order of magnitude estimation, often introduced in physics courses, which seeks an estimate at least as accurate as the correct answer rounded to the nearest power of ten.

De esta forma se determina el margen de error o incertidumbre adecuado para considerar válida una respuesta. Sriraman y Knott (2009) dan un paso más allá y los definen como sigue:

> Fermi problems are estimation problems used with the pedagogical purpose of clearly identifying starting conditions or assumptions and making educated guesses about various quantities or variables which arise within a problem with the added requirement that the end computation be feasible or computable by hand.

Esta definición pone de manifiesto uno de los aspectos más relevantes de los problemas de Fermi. La falta de información sobre la situación o fenómeno a estudiar propicia que los alumnos deban identificar aquellos aspectos que aportan información relevante sobre la cantidad a estimar. Este proceso es relevante en entornos de resolución de problemas contextualizados en los que se pretende la modelización de un fenómeno y es el elemento esencial que permite que los problemas de Fermi puedan ser un recurso útil para introducir la modelización matemática.

En este sentido, la definición que ofrece Ärlebäck (2009) se mueve en la misma dirección:

> Open, non-standard problems requiring the students to make assumptions about the problem situation and estimate relevant quantities before engaging in, often, simple calculations.

Este autor nos ofrece en Ärlebäck (2011) una lista de características de los problemas de Fermi que enumera como sigue:

- Son accesibles y pueden ser abordados por todos los estudiantes tanto de forma individual o en grupo.
- Pueden ser resueltos en diferentes niveles educativos con diferente nivel de complejidad.
- No requieren de conocimientos matemáticos previos concretos.
- Conectan con el mundo real.
- Demandan al alumno especificar y estructurar la información relevante y relaciones necesarias para poder abordar el problema.
- Al ser problemas abiertos, no están ligados a priori a estrategias o procedimientos concretos, con lo que instan a los resolutores a generar construcciones, estrategias y otras habilidades cognitivas al abordar el problema.
- No ofrecen datos numéricos, con lo que promueven la necesidad de hacer estimaciones razonables de las cantidades relevantes.
- Promueven la discusión, especialmente si son tratados como actividad grupal.

En esta lista vemos que un aspecto que dota a los problemas de Fermi de gran parte de su potencialidad es la conexión con fenómenos del mundo real. Las preguntas formuladas en un contexto conocido permiten a los alumnos utilizar su propio conocimiento sobre ese contexto y aplicarlo a la resolución. De hecho, ese conocimiento de base unido a preguntas que no ofrecen ninguna información sobre el proceso que debe desarrollarse para resolverlas son los aspectos que promueven la modelización matemática, ya que los alumnos se ven obligados a estructurar los aspectos relevantes a considerar para poder encontrar una solución. Siguiendo a Ärlebäck(2011), entendemos que en este proceso de resolución es cuando los alumnos generan métodos y estrategias propios y aparecen procesos de modelización espontáneos. Por su parte, Peter-Koop (2004) ofrece una visión similar sobre lo esencial de los problemas de Fermi, su descripción es la que sigue:

- Los problemas deben presentar desafíos y motivar a la cooperación y la interacción con los compañeros.
- El texto de los problemas no debe contener números con el fin de evitar que los alumnos inicien inmediatamente el cálculo sin analizar primero el contexto de la situación, así como para desafiar a los alumnos a utilizar la estimación o la recogida de los datos pertinentes.
- Los problemas deben basarse en una selección de situaciones relacionadas con el mundo real que sean representativas para los alumnos[4].
- Los enunciados deben ser abiertos promoviendo la toma de decisiones con respecto al proceso de modelización.

De esta lista de características destacamos el hecho de que la falta de información numérica concreta evita la precipitación de los alumnos y no les permite conseguir respuestas de compromiso a partir de cálculos sin sentido. Cabe destacar que el trabajo de Peter-Koop (2004) se centra en las resoluciones de problemas de Fermi por parte de alumnos de tercero y cuarto curso de Educación Primaria, con lo que evitar estas actitudes poco reflexivas es parte de las necesidades del profesor para gestionar el aula y una estrategia docente para introducir la modelización en esta etapa.

[4] Esta característica ha sido parafraseada por el autor debido a la especificidad de las edades de los alumnos del texto original

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Finalmente, Navarro (2013) añade algunas características que permiten entrever las posibilidades de utilizar problemas de Fermi en distintos niveles educativos y asociados a diversos contenidos. Destacamos las siguientes:

- Los problemas de Fermi, a pesar de las limitaciones en los datos o la dificultad de análisis, se refieren a cuestiones objetivas que pueden abarcar cualquier campo o disciplina. En ocasiones son asombrosamente familiares.
- Si dispusiésemos de todos los datos necesarios llegaríamos a una solución determinada de manera muy sencilla; por lo tanto, la dificultad está en la naturaleza de esos datos, no en el cálculo en sí.

A partir de lo expuesto, podemos sintetizar lo aportado por los autores presentado afirmando que los problemas de Fermi son un tipo de problemas que se plantean a partir de una pregunta contextualizada en un fenómeno o situación real y que preguntan explícitamente sobre la estimación del valor numérico de alguna cantidad concreta sin proporcionar información sobre la naturaleza o características del contexto a estudiar. Sin embargo, y desde el punto de vista del desarrollo teórico, sería necesario alcanzar un mayor detalle en la definición de los problemas de Fermi y, especialmente, elaborar un listado de características que incluya a las antes indicadas y que permita complementar la información proporcionada en la definición.

En este sentido, algunas de las características de los problemas de Fermi que destacan los autores citados se refieren a la estructura de la pregunta, otras al tipo de trabajo matemático que promueven y otras a aspectos pedagógicos que incumben al tipo de decisiones que debe tomar el profesorado. Justamente, dado que son los profesores los que deben elegir el uso de los problemas de Fermi en las aulas, se antoja esencial que estos posean el máximo de información contrastada posible para fundamentar sus decisiones. Por la forma en la que se han desarrollado las investigaciones previas sobre el uso de problemas de Fermi, este corpus de conocimiento no ha sido todavía desarrollado y compilado, con lo que este es un aspecto a abordar desde la perspectiva de la Educación Matemática.

4. Producciones de los alumnos

En esta sección nos centraremos en las producciones de los alumnos al resolver problemas de Fermi. El primer apartado se refiere a investigaciones desconectadas en diferentes ámbitos de la Educación. El segundo apartado se centra en el estudio de los procesos de modelización de los alumnos al resolver problemas de Fermi. Aunque no existe un gran número de estudios que aborden este tema, los estudios presentados permiten obtener una perspectiva suficiente de los procesos matemático que pueden desarrollarse. Finalmente, se presentan los estudios sobre el uso de secuencias de Fermi efectuados hasta la fecha.

4.1. Estudios en otros campos de conocimiento

Robinson (2008) ha estudiado la influencia del trabajo con problemas de Fermi en los resultados de sus alumnos de primer curso de Física en estudios universitarios de ingeniería. En cada clase propone un problema y deja 10 minutos a sus alumnos para que lo discutan. El estudio compara los resultados obtenidos en diversos test sobre problemas de Fermi efectuados en distintos momentos del curso con las calificaciones obtenidas en los exámenes ordinarios de la asignatura. Los resultados muestran que los alumnos inician el curso con dificultades para resolver problemas de Fermi y que aquellos que muestran una mejora más notable son aquellos alumnos que acaban obteniendo las mejores calificaciones en la asignatura.

Según el autor este hecho se explica porque la dinámica de aula en la que se resuelven problemas de Fermi proporciona herramientas que se pueden aplicar para mejorar el rendimiento académico. Este estudio está relacionado con lo que observa Shakerin (2006) al evidenciar que los estudiantes de los primeros cursos de ingeniería no poseen métodos o conocimientos para realizar estimaciones adecuadas a las necesidades de cada situación, con lo que los problemas de Fermi se posicionan como una opción para tratar esta problemática.

Algunos estudios se han centrado específicamente en determinar la forma en la que los alumnos afrontan la resolución de problemas de Fermi. Anderson y Sherman (2010) muestran algunas de las estructuras de resolución utilizadas por alumnos universitarios de diversas carreras, Economía y Física entre ellas. En la Figura 1 se muestra la forma más elaborada en la que los alumnos rompen el problema de estimar la cantidad de bocadillos (*hot dogs* en el original) que se venden durante los partidos de la liga de beisbol profesional americana en un año completo.

Se puede observar en la Figura 1 que los alumnos han determinado las variables más relevantes y proporcionan una estimación parcial para cada subproblema. Aunque no todos los alumnos desarrollan estrategias tan detalladas, se observa que en todos los casos se realiza un análisis previo que identifica las variables principales a considerar. En este caso, los autores del estudio conocen los datos reales de referencia y pueden estudiar el nivel de éxito en la resolución. El estudio determina que los estudiantes de carreras científicas obtienen mejores resultados y concluyen que el uso de problemas de Fermi podría ser beneficioso para estudios como los de Economía en los que en muchos casos se trabaja sin la posibilidad de obtener información real.

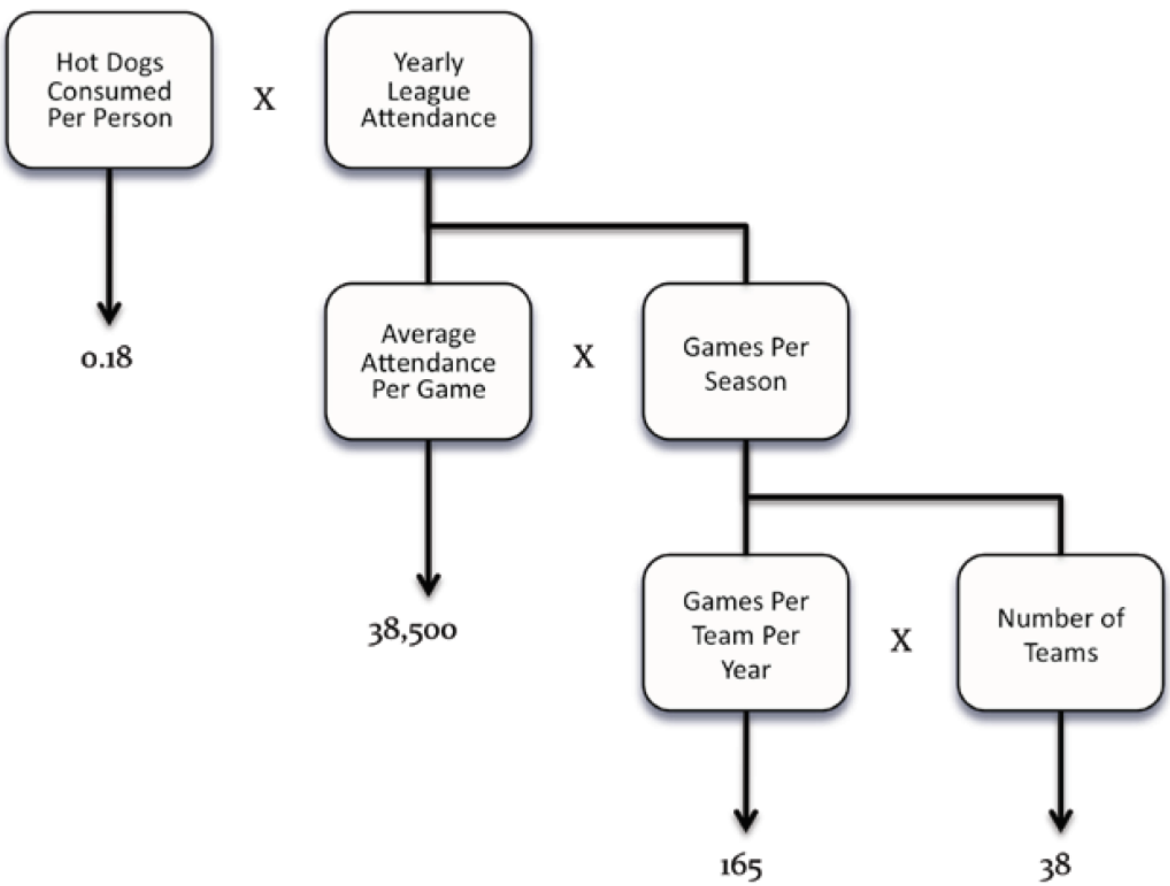

Figura 1: Esquema de la estructura de resolución del problema de los *hot dogs*

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Estos estudios parecen indicar que efectivamente el uso de problemas de Fermi tiene un impacto positivo sobre el rendimiento académico de los estudiantes. Sin embargo, los estudios se centran en entornos educativos muy concretos y debemos ser cautos al interpretar estos resultados desde otros entornos educativos.

4.2. Análisis de los procesos de modelización al resolver problemas de Fermi

Si nos centramos en los estudios realizados sobre las producciones de los alumnos en relación al proceso de modelización, existen algunos estudios que nos proporcionan una visión general de los procesos que desarrollan los alumnos al resolver problemas de Fermi. Peter-Koop (2004) analiza las resoluciones de alumnos de 9 y 10 años para el problema *¿cuántos coches hay en una retención de 3 km en la autopista?* y observa que los alumnos lo resuelven a partir de un proceso de modelización matemática. Dada la edad de los alumnos y los pocos detalles proporcionados en el enunciado, los alumnos realizan un proceso iterativo que va revisando aspectos de la solución propuesta hasta llegar a un valor satisfactorio.

Este estudio se enmarca en la visión teórica propuesta por Blum y Leiss (2007) que entienden que los procesos de modelización se desarrollan en ciclos que se inician con la pregunta formulada en el contexto del mundo real y se traduce al dominio matemático, en el que se usas herramientas matemáticas para generar una solución que debe contrastarse con el fenómeno real estudiado. Si en esta comparación se observa alguna posibilidad de mejora se vuelve a iniciar un nuevo ciclo de modelización constituyendo un proceso multicíclico. En el estudio de Peter-Koop (2004) los alumnos reducen el problema inicial a un problema más pequeño y aplican proporcionalidad para determinar el número de coches en los 3 km de retención antes de que hayan aprendido esta estrategia en la escuela.

En Albarracín et al. (2015b) se utilizan diversos problemas de Fermi en los que se deben estimar grandes cantidades para determinar las estrategias de resolución y los modelos generados por alumnos entre 10 y 12 años. Nuevamente se observa que los alumnos generan modelos matemáticos para resolver los problemas y desarrollan diversas estrategias. En este caso el modelo predominante es la distribución en cuadrícula de elementos cuando se deben estimar el número de ladrillos en una pared o personas que caben en un espacio, pero los alumnos también utilizan el modelo basado en establecer una unidad como base (denominada punto de referencia en Joram et al., 2005) y la reducción a un problema más pequeño en problemas de estimación de objetos en un volumen, como el de determinar el número de folios en un montón dado.

Por su parte, Ärlebäck (2009) pone en duda que el proceso de modelización de los alumnos sea realmente un proceso multicíclico y analiza el proceso de resolución de alumnos de Educación Secundaria. Para ello graba el proceso completo de resolución de los alumnos al resolver el problema *¿cuánto se tarda en subir por las escaleras al Empire State Building?* y lo analiza a partir de identificar los siguientes subprocesos: lectura del enunciado (R)[5], elaboración del modelo (M), estimación (E), cálculo (C), validación (V) y escritura (W). Estos subprocesos son adaptados de una propuesta de análisis de procesos de resolución de problemas de Schoenfeld (1985).

La Figura 2 muestra la complejidad del proceso de resolución del modelo. En concreto, puede observarse cómo los alumnos no completan ciclos desde la lectura hasta el cálculo de la respuesta sino que pasan de un proceso al siguiente y si es necesario vuelven atrás en numerosas ocasiones para ir asegurando el proceso. De hecho, el análisis de la situación es casi constante durante la resolución, como se observa por la presencia reiterativa del subproceso de elaboración del modelo.

[5] Se mantienen las iniciales en lengua inglesa del original para facilitar la interpretación del gráfico presentado en la Figura 2.

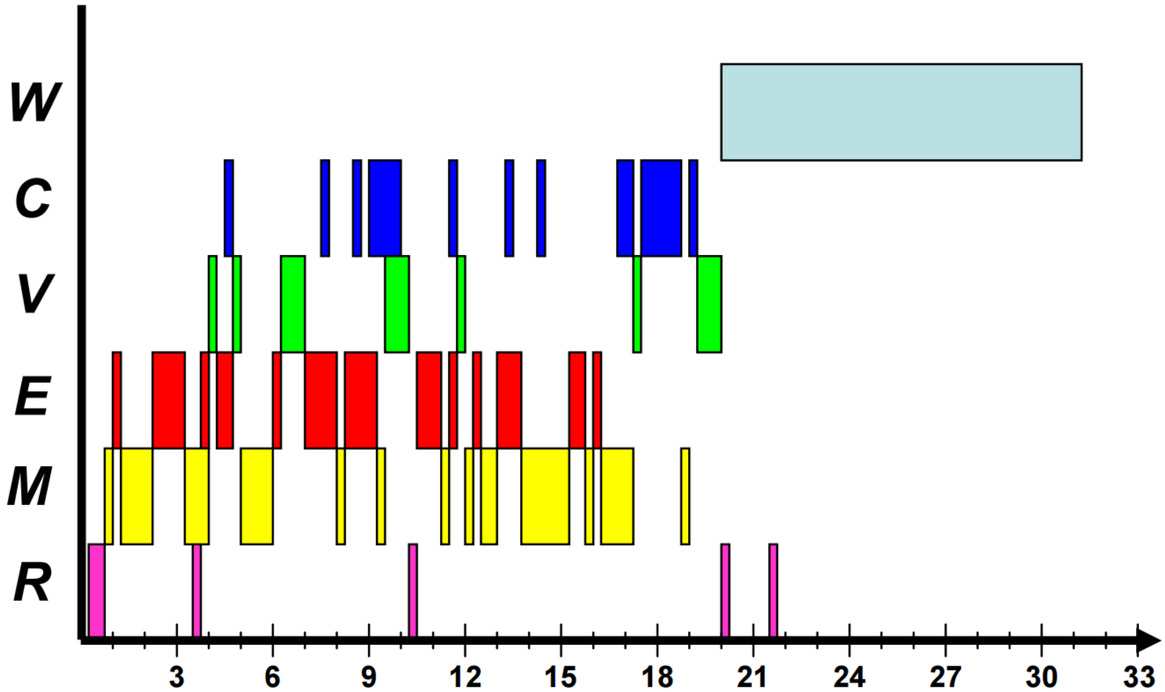

Figura 2: Análisis del procesos de modelización de alumnos de Educación Secundaria

Estos resultados están en la misma línea de los obtenidos por Czocher (2016) al analizar la resolución de alumnos universitarios que cursan la asignatura de Ecuaciones Diferenciales provenientes de Ingenierías y carreras de Ciencias. En este estudio los alumnos muestran procesos cíclicos en los casos de problemas conocidos previamente, pero muestran un comportamiento complejo similar al observado por Ärlebäck (2009) cuando no conocen el problema o su contexto. También Civil (2013) obtiene resultados similares cuando analiza los procesos de resolución de alumnos de Educación Secundaria respecto a la complejidad del proceso de modelización al resolver un problema de Fermi. La Figura 3 muestra a la izquierda el recorrido real de los alumnos durante la resolución respecto al recorrido ideal propuesto por Blum y Leiss (2007). En ella se pueden observar que los alumnos trabajan intensamente en el domino real tratando de elaborar su modelo y reformulándolo varias veces antes de obtener su primer ciclo completo.

Como hemos apuntado anteriormente, uno de los aspectos clave de los problemas de Fermi es que obligan a los alumnos a identificar los aspectos relevantes de la situación estudiada para elaborar sus modelos. Este proceso no es trivial y ha sido estudiado específicamente en Albarracín y Gorgorió (2013a) donde se utiliza una serie de problemas de estimación de grandes cantidades. Los resultados del estudio indican que la formulación concreta del contexto presentado tiene una gran influencia en los métodos que desarrollan los alumnos. De hecho, estos llegan a cambiar las preguntas formuladas para poder dar respuestas coherentes en el contexto descrito.

El caso más claro observado en este estudio es un problema que pide estimar el número de gotas necesarias para llenar un cubo, pero ambientado en una situación problemática con una gotera en la sala de profesores que afecta a los ordenadores.

Los métodos de resolución propuestos por los alumnos muestran que tratan de resolver preguntas que se mueven en otra dirección, más ajustada al contexto planteado como las siguientes: ¿en cuánto tiempo se llenará el cubo colocado bajo la gotera?, ¿se llenará el cubo antes de que pase toda la noche? o ¿cuál debe ser el tamaño del cubo para que no se llene en el tiempo que

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

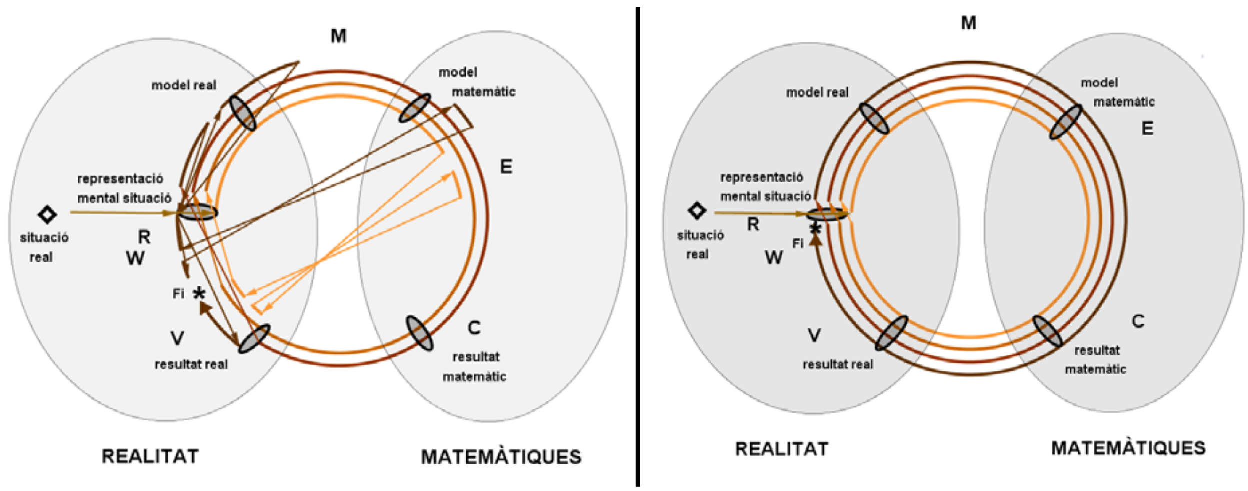

Figura 3: Comparación entre el proceso de modelización real (a la izquierda) y el proceso ideal (a la derecha)

debemos estar fuera? Una vez se analizan los procesos propuestos por los alumnos, se observa que un 48.7 % de los 538 alumnos de Educación Secundaria encuestados propone métodos de resolución que se soportan en la elaboración de un modelo matemático.

En Albarracín y Gorgorió (2014) se detallan los modelos matemáticos propuestos, observando una gran riqueza y variedad de ellos. Aunque una parte importante (31 %) de los alumnos no desarrolla una propuesta de resolución que incluya una estrategia identificable y que un 19.9 % solo puedan desarrollar una estrategia basada en el recuento exhaustivo de elementos (matemáticamente pobre e ineficiente en el caso de estimar grandes cantidades) se identifican estrategias basadas en los siguientes modelos: medidas de concentración (como la densidad de población), reducción a un problema más pequeño (en línea con lo observado por Peter-Koop, 2004), uso de un punto de referencia y el uso de la regla del producto para la distribución en cuadrícula.

Los resultados de este estudio indican que el trabajo con problemas de Fermi permite la introducción de la modelización matemática en Educación Secundaria y que los alumnos pueden generar sus propias estrategias de resolución. Que el contexto de cada problema influya notablemente en la forma en que los alumnos lo resuelven permite introducir secuencias de problemas de Fermi similares en su formulación matemática pero con distintos contextos para ayudar a los alumnos a relacionar diferentes conceptos y procedimientos. Por otro lado, que casi la mitad de los alumnos pueda generar modelos matemáticos por ellos mismos para enfrentarse a la resolución da a entender que si la actividad de aula se estructura en torno al trabajo en grupo se puede potenciar que todos los alumnos participen del trabajo de elaboración de los modelos (Albarracín y Gorgorió (2013b).

4.3. Secuencias de problemas

Para organizar secuencias de problemas de Fermi para introducir la modelización en las aulas se ha tomado la perspectiva de *models and modelling* propuesta por Lesh y Doerr (2003) basada en las denominadas *modelling elyciting activities* o actividades que promueven la modelización. Estas actividades están definidas a partir de una serie de principios instruccionales (que pueden verse en detalle en Lesh et al., 2000) con las que se pretende que los alumnos desarrollen un modelo matemático de la situación propuesta que pueda aplicarse también a otras situaciones similares. Los alumnos, trabajando en pequeños grupos (como se sugiere en Zawojewski et al., 2003), y ante una situación problemática significativa y relevante para ellos, deben inventar, ampliar y perfeccionar sus propias construcciones matemáticas para responder a las demandas del problema propuesto. Los resultados se comunican al resto de alumnos del grupo clase para que se produzcan debates e intercambio de opiniones, que pueden desembocar en la revisión del proceso seguido y la construcción de nuevos modelos.

En Albarracín y Gorgorió (2015c) se proponen secuencias de problemas para trabajar la distribución de elementos en el plano, en el espacio, problemas de componente social o asociados a viajes, que permiten relacionar diversos aspectos de medida. En Ferrando et al. (2017) se analiza la producción de alumnos de Educación Secundaria al trabajar en una secuencia de distribución de elementos en el espacio. Los problemas utilizados son los siguientes:

- Problema A: *¿Cuánta gente cabe en el patio del instituto?*
- Problema B1: *¿Cuánta gente cabe en el Palau St. Jordi /Pabellón la Font de Sant Lluís en un concierto?* [6]
- Problema B2: *¿Cuánta gente cabe en la plaza del ayuntamiento de tu ciudad/Plaça de Sant Jaume en una manifestación?*
- Problema B3: *¿Cuántos árboles hay en Central Park?* [7]

En este caso, el problema A actúa como actividad para promover la modelización, ya que los alumnos pueden resolverlo sobre el terreno. Los problemas B1 y B2 sirven para explorar contextos distintos y que los alumnos introduzcan nuevos elementos a sus modelos. Finalmente el problema B3 es una actividad de aplicación de los modelos generados a una nueva situación. En el estudio se comparan los modelos producidos por alumnos con experiencia previa en modelización de los modelos producidos por alumnos que no la han trabajado anteriormente. Los resultados muestran que se pueden distinguir aspectos diferenciadores entre los modelos producidos por alumnos sin experiencia modelizadora de aquellos producidos por alumnos con experiencia previa, especialmente en los conceptos y lenguajes utilizados para dar forma a los modelos matemáticos construidos.

En ambos casos los modelos elaborados son ricos en detalles pero se puede observar como los alumnos, al compartir su trabajo, los hacen evolucionar añadiendo nuevos elementos y centrándose mayoritariamente en el modelo de la densidad de población, que se muestra como el más adaptable de todos los propuestos.

Las secuencias de problemas han sido poco exploradas desde el punto de vista de la investigación, pero los primeros resultados muestran que pueden diseñarse secuencias que dirijan el trabajo de los alumnos a desarrollar modelos complejos y adaptables a un gran número de situaciones. Al mismo tiempo, obtener un gran número de resoluciones permite elaborar esquemas de las estrategias que desarrollan los alumnos y construir lo que se denomina el árbol del problema (Ferrer et al., 2014) que se basa en una estructura en forma de árbol, cuyas ramas muestran diferentes estrategias (correctas o incorrectas) que los estudiantes podría seguir para resolver el problema. Esta estructura puede utilizarse como herramienta para dar soporte al profesorado en la guía de la actividad, tanto como herramienta para orientar a los alumnos como para realizar la evaluación de la actividad.

También sería necesario, desde el punto de vista del encaje del uso de problemas de Fermi en el contexto de la modelización matemática, estudiar la forma en la que los modelos que generan los alumnos evolucionan desde perspectivas propias de la modelización matemática como el *Dual modelling cycle* de Matsuzaki y Saeki (2013) o la propuesta de analizar como los alumnos conectan, coordinan e integran modelos de Ärlebäck y Doerr (2015).

[6] En cada caso se utilizaba un pabellón deportivo de grandes dimensiones cercano al entorno de los alumnos.
[7] En referencia al conocido parque de la ciudad de Nueva York

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

5. Formación del profesorado

Los estudios sobre la formación del profesorado respecto al uso y potencialidades de los problemas de Fermi son escasos. Fuglestad y Goodchild (2008), en un estudio de caso, tratan de identificar los elementos necesarios para que el profesorado desarrolle actitudes de investigación en el aula. Para ello se soportan en analizar las observaciones de profesor de Educación Secundaria después de una sesión de problemas de Fermi a los que se enfrentaba como profesor por primera vez. El estudio remarca el cambio de actitud del profesor hacia promover que los alumnos compartan su trabajo, en buena parte motivados por las características de los problemas de Fermi utilizados.

En Albarracin et al. (2015d) se estudia una actividad de formación de maestros de Educación Primaria con el objetivo de desarrollar las competencias necesarias para conducir una clase de resolución de problemas de Fermi. Algunas de las dificultades que se encuentran los futuros maestros de Educación Primaria están directamente relacionadas con su bagaje matemático previo, en el que la resolución de problemas no tiene un peso preponderante. Para cubrir estas carencias se diseña una sesión en la que los futuros maestros deben resolver en grupo diversos problemas de Fermi en el campus de la facultad para compartir posteriormente sus métodos y resultados. El primer propósito de la actividad es que experimenten directamente un proceso de resolución de problemas y modelización en grupo por ellos mismos. El segundo es poner de manifiesto algunos aspectos relevantes de la resolución: cada problema puede ser resuelto a partir de diversas estrategias, pero algunas de esas estrategias se pueden aplicar exitosamente a diversos problemas.

Un aspecto relevante de cara a la gestión del aula es la puesta en común de los resultados. Los futuros maestros manifiestan no tener herramientas o conocimientos para validar los resultados obtenidos, de forma que este aspecto podría suponer una barrera que les lleve a abandonar los problemas de Fermi como recurso. Para ello se propone una puesta en común que se utiliza para compartir los modelos desarrollados y los resultados obtenidos. La Figura 4 muestra la tabla construida en la pantalla del proyector con el nombre de cada grupo, el modelo propuesto y el resultado para un problema en el que se debe estimar el número de personas que caben en un espacio concreto.

Los futuros maestros observan que algunos resultados están fuera del rango mayoritario, con lo que proponen métodos para corregirlos (como disminuir la densidad de población aplicada para el grupo B5) y pueden establecer un intervalo de valores adecuado a partir de los datos mostrados. En este caso se recomienda a los futuros maestros que utilicen lo observado por Vul y Pashler (2008) en un estudio sobre estimación de cantidades de personas, y es que la media de valores observados por distintas personas es más fiable que cada una de ellas por separado.

Una de las dificultades para el estudio del conocimiento del profesor, en este y otros ámbitos, es la diversidad de perfiles de formación para cada etapa educativa. En España los maestros de Educación Primaria reciben una formación con un amplio contenido didáctico y pedagógico, pero poseen un conocimiento matemático y técnico menor que el profesorado de Educación Secundaria o Universidad, que por su parte ha construido su perfil docente sin una formación didáctica tan amplia.

Por ello sería necesario que futuros estudios sobre el conocimiento del profesor necesario para utilizar problemas de Fermi en las aulas distinguieran e incluyeran los aspectos puramente didácticos (como organizar el trabajo en grupo o el desarrollo de una puesta en común) de los aspectos específicos de resolución de problemas o modelización (como las formas en la que se puede matematizar un fenómeno o validar un resultado).

Muy posiblemente sea la introducción de los problemas de Fermi en la formación del profesorado la que permita que estos alcances las aulas, ya que son profesores y maestros los que

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Equip	Estratègia	Resultat
A4	Gent en files i columnes	276
??	Calculen àrea i apliquen diferents densitats	187-273
C5	Gent en files i columnes (més i menys apretades)	350-440
Alfredo	Calculen àrea i apliquen densitat	228
A6	Gent en files i columnes	190
B5	Calculen àrea i apliquen densitat	540
Montse	Gent en files i columnes	252
Gerard	Compten rajoles aplicant files i columnes i després miren quantes rajoles necessita una persona	187
A7	Calculen àrea i apliquen densitat	180
Lola	Gent en files i columnes	280
Íngrid	Gent al perímetre més gent a l'interior fent files i columnes	184

Figura 4: Tabla resumen de modelos y resultados para una puesta en común

deben decidir en última instancia llevarlos a la práctica de aula.

6. Reflexiones finales

En este artículo se muestra la práctica totalidad de las investigaciones relacionadas con el uso de problemas de Fermi en las aulas. Sorprende que un tipo de problemas que poseen un amplia tradición educativa en algunos ámbitos muy influyentes no hayan trascendido a otros niveles educativos pese a las múltiples recomendaciones realizadas por diversos autores.

Posiblemente, el hecho de que los problemas de Fermi no estén ligados directamente a contenidos matemáticos concretos y que la gestión de aula sea demandante para el profesor son dos de los motivos principales para que su presencia no sea mayor. Superar estas dificultades es un reto que se posiciona en la misma dirección que introducir el trabajo competencial en las aulas, tanto el basado en proyectos, la resolución de problemas, la modelización matemática y el trabajo colaborativo.

En el texto se han apuntado ya algunas ideas para seguir el trabajo de investigación necesario para dotarnos de un conocimiento sólido sobre los usos de los problemas de Fermi en las aulas: definirlos de forma precisa, disponer de amplias colecciones de ellos clasificadas por temática o nivel, conocer como evoluciona el proceder de los alumnos en secuencias de problemas para determinar como encaja con el aprendizaje de los procesos de modelización, elaborar secuencias de problemas que permitan trabajar modelos o contenidos concretos e incidir en la formación del profesorado.

Pero todavía existen otros usos que no han sido explorados desde el punto de vista de la investigación. Algunos autores han puesto de manifiesto la necesidad de que los estudiantes de carreras científicas adquieran el sentido numérico adecuado para tratar con las cantidades y

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

variables que aparecen en su área de conocimiento. White (2004) destaca las dificultades de los alumnos de Bioquímica para tratar cantidades como el número de moléculas de hemoglobina que produce el cuerpo en un segundo y afirma que sus estudiantes poseen un gran conocimiento de técnicas matemáticas pero no han trabajado suficientemente la resolución de problemas y no saben dar significado a ese tipo de valores. Por su parte Phillips y Milo (2009) proporciona algunos ejemplos concretos de problemas científicos de alto nivel que pueden ser resueltos como problemas de Fermi en asignaturas de Biotecnología.

Este desconocimiento de las cantidades que están fuera de nuestro alcance, ya sea por ser demasiado grandes o demasiado pequeñas, puede trabajarse a partir de utilizar problemas de Fermi en las aulas de carreras técnicas que son un territorio fértil para proponer estos problemas. Algunos ejemplos podrían ser estimar el peso de todos los libros de una biblioteca (Arquitectura), la superficie que ocupa un bit en un DVD (Óptica) o el precio de transportar un teléfono desde su fábrica en Asia hasta Europa (Economía).

De hecho, el mayor potencial de los problemas de Fermi es la posibilidad de conectar el trabajo en las aulas con conocimientos contextualizados en realidades que no debemos dejar de lado como ciudadanos. Dotar de significado a valores como el del presupuesto de Sanidad o el del Fondo de pensiones del estado para poder tomar decisiones de tipo político, o valorar la cantidad de energía que consumimos o de basura que generamos debería darnos herramientas para decidir sobre nuestros hábitos.

Una forma de empezar a tomar contacto con estas problemáticas desde la escuela, el instituto o la universidad puede ser el uso de los problemas de Fermi, una oportunidad que no deberíamos desaprovechar, ya que como afirman Sriraman y Knott (2009), al trabajar con problemas de Fermi *"students would learn so much more about their world, how to live in it, deal with it, understand it, influence it, make it a better world. What a concept for Education!"*

Referencias

Albarracín Lluís, Gorgorió Núria (2013a).
Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto.
Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, **16**,(3), 289–315.

Albarracín Lluís, Gorgorió Núria (2013b).
Problemas de estimación de magnitudes no alcanzables: una propuesta de aula a partir de los modelos generados por los alumnos.
Modelling in Science Education and Learning, **6**, 33–48.

Albarracín Lluís, Gorgorió Núria (2014).
Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers.
Educational Studies in Mathematics, **86**, (1), 79–96.

Albarracín Lluís, Gorgorió Núria (2015a).
On the role of inconceivable magnitude estimation problems to improve critical thinking.
Educational Paths to Mathematics. Springer, 263–277.

Albarracín Lluís, Lorente Cristina, Lopera, Antoni, Pérez Héctor, Gorgorió Núria (2015b).
Problemas de estimación de grandes cantidades en las aulas de Educación Primaria.
Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, **32** (89), 19–33.

Albarracín Lluís, Gorgorió Núria (2015c).
A brief guide to modelling in secondary school: estimating big numbers.
Teaching Mathematics and its Applications, **34** (4), 223–228.

Albarracín Lluís, Chico Judit, Guinjoan Marc (2015d).
Aprendiendo a enseñar matemáticas a partir de la propia experiencia.
Procedia-Social and Behavioral Sciences, **196**, 113–119.

Anderson P. and Sherman C. (2010).
A Simplified Method of Fermi Estimation for the Student Innovator.
Proceedings of the 14th Annual Conference of the National Collegiate Inventors and Innovators Alliance.

Ärlebäck Jonas Bergman (2009).
On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school.
The Mathematics Enthusiast **6** (3), 331–364.

Ärlebäck Jonas Bergman (2011).
Exploring the solving process of groups solving realistic Fermi problem from the perspective of the anthropological theory of didactics.
Proceedings of the seventh congress of the European society for research in mathematics education, 1010–1019.

Ärlebäck Jonas Bergman, Doerr Helen (2015).
At the core of modelling: Connecting, coordinating and integrating models.
CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 802–808.

Blum Werner, Leiss Dominik (2007).
How do students and teachers deal with modelling problems.
Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics, 222–231.

Civil Elisabeth (2013).
Estratègies en l'estimació de magnituds de volum inabastable.
Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Czocher Jennifer A. (2016).
Introducing Modeling Transition Diagrams as a Tool to Connect Mathematical Modeling to Mathematical Thinking.
Mathematical Thinking and Learning, **18** (2), 77–106.

Ferrando Irene, Albarracín Lluís, Gallart César, García-Raffi Lluís Miquel, Gorgorió, Núria (2017).
Análisis de los Modelos Matemáticos Producidos durante la Resolución de Problemas de Fermi.
Bolema, **31** (57), 220–242.

Ferrer Miquel, Fortuny Josep Maria, Morera Laura (2014).
Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático.
Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, **32** (3), 385–405.

Fuglestad Anne Berit, Goodchild, Simon (2008).
Affordances of inquiry: the case of one teacher.
Proceedings of PME32, **3**, 49–56.

Joram Elana, Gabriele Anthony J, Bertheau Myrna, Gelman Rochel, Subrahmanyam Kaveri (2005).
Children's use of the reference point strategy for measurement estimation.
Journal for Research in Mathematics Education, 4–23.

Lesh Richard, Doerr Helen (2003).
Foundations of a model and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving.
In Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching, 3–33. Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh Richard, Hoover Mark, Hole Bonnie Kelly, Anthony and Post Thomas (2000).
Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers.
In Handbook of research design in mathematics and science education, 591–645. Routledge Handbooks Online.

Matsuzaki Akio, Saeki Akihiko (2013).
Evidence of a dual modelling cycle: Through a teaching practice example for pre-service teachers.
In Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice, 195–205. Springer.

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

García Navarro Juan Manuel (2013).
Problemas de Fermi. Suposición, estimación y aproximación.
Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales **84** , 57–68.

Peter-Koop Andrea (2004).
Fermi problems in primary mathematics classrooms: Pupils" interactive modelling processes.
In Mathematics education for the third millenium: Towards 2010, 454–461.

Phillips Rob, Milo Ron (2009).
A feeling for the numbers in biology.
Proceedings of the National Academy of Sciences, **106** (51), 21465–21471.

Poundstone William (2013).
How Would You Move Mount Fuji?: Microsoft's Cult of the Puzzle. How the World's Smartest Companies Select the Most Creative Thinkers.
Hachette Book Group.

Reif F, John Mark St. (1979).
Teaching physicists" thinking skills in the laboratory.
American Journal of Physics,**47** (11), 950–957

Ridgway Jim, Swan Malcolm, Burkhardt Hugh (2001).
Assessing mathematical thinking via FLAG.
In The teaching and learning of mathematics at university level, 423–430. Springer.

Robinson A.W. (2008).
Don't just stand there–teach Fermi problems!
Physics Education, **43** (1), 83–87

Schoenfeld Alan H. (1985).
Mathematical problem solving.
Orlando: Academic Press.

Shakerin Said (2006).
The art of estimation.
International Journal of Engineering Education, **22** (2), 273–278.

Siegel Alexander W., Goldsmith Lynn T., Madson Camilla R. (1982).
Skill in estimation problems of extent and numerosity.
Journal for Research in Mathematics Education, 211–232

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Sriraman Bharath, Lesh Richard A. (2006).
Modeling conceptions revisited
ZDM, **38** (3), 247–254

Sriraman Bharath, Knott Libby (2009).
The mathematics of estimation: Possibilities for interdisciplinary pedagogy and social consciousness
Interchange, **40** (2), 205–223

Tangney Brendan, Bray Aibhín (2013).
Mobile Technology, Maths Education & 21C Learning.
12th World Conference on Mobile and Contextual Learning, Bloomsbury Qatar Foundation Journals.

Vul Edward, Pashler Harold (2008).
Measuring the crowd within probabilistic representations within individuals.
Psychological Science, **19** (7), 645–647.

Wagner David, Davis Brent (2010).
Feeling number: grounding number sense in a sense of quantity.
Educational Studies in Mathematics **74** (1), 39–51.

Weiss Laura (2013).
Les Questions de Fermi.
Math-École **219**, 41–47.

Weinstein Lawrence, Adam John A (2009).
Guesstimation: Solving the world's problems on the back of a cocktail napkin.
Princeton University Press.

Weinstein, Lawrence (2012).
Guesstimation 2.0: solving today's problems on the back of a napkin.
Princeton University Press.

White Harold B (2004).
Math literacy.
Biochemistry and Molecular Biology Education, **32** (6), 410–411.

Zawojewski Judith S., Lesh Richard A., English Lyn D (2003).
A models and modeling perspective on the role of small group learning activities.
In Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching, 337–358. Lawrence Erlbaum Associates.

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL