Economía Agraria y Recursos Naturales. ISSN: 1578-0732. e-ISSN: 2174-7350. Vol. 15,1. (2015). pp. 121-129

Uso práctico de la distribución TSP en el método de valoración de las dos betas

Rafael Herrerías Pleguezuelo[a] y José Manuel Herrerías Velasco[a]

RESUMEN: Este trabajo tiene dos partes claramente diferenciadas. La primera se dedica a realizar una somera revisión de algunos de los trabajos relacionados con el método de valoración de las dos betas, MDB, ideado por Ballestero al comienzo de los años setenta del siglo anterior. En la segunda se presenta la distribución TSP, introducida por van Dorp y Kotz al comienzo de este siglo, y su uso como modelo probabilístico en el MDB, tanto para la variable índice de calidad del bien a valorar como para la variable valor de mercado del mencionado bien. Finalmente, se ilustra el MDB, con un caso práctivo de la literatura especializada, Ballestero y Rodríguez (1999).

PALABRAS CLAVE: Distribución TSP, incertidumbre, método de valoración de las dos betas, método PERT.

JEL classification: C46.

DOI: 10.7201/earn.2015.01.08.

Practical use of the TSP distribution in the valuation method of the two betas

ABSTRACT: This paper has two different parts, the first one conducts a brief review of some of the papers related to the valuation method based on the use of two betas, MTB, devised by Ballestero at the beginning of the seventies of the past century. The second presents the TSP distribution, introduced by van Dorp and Kotz at the beginning of this century, and its use as probabilistic model in the MTB. Finally, the MTB is illustrated with a case study of the literature, Ballestero and Rodríguez (1999).

KEYWORDS: TSP distribution, uncertainty, valuation method based on the use of two betas, PERT method.

Clasificación JEL: C46.

DOI: 10.7201/earn.2015.01.08.

[a] Dpto. Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa. Universidad de Granada.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido desarrollado con la financiación y colaboración del Ministerio de Ciencia e Innovación y la Unión Europea. Proyecto I + D ECO2010-15885; y con ayuda financiera de la Junta de Andalucía, a través del Grupo de Investigación FQM-150: “Modelos Probabilísticos Aplicados a las Ciencias Sociales.

Dirigir correspondencia a: Rafael Herrerías Pleguezuelo. E-mail: rherreri@ugr.es.

Recibido en marzo de 2015. Aceptado en mayo de 2015.

1. Introducción

Es suficientemente conocido que el método de valoración, introducido y denominado por Ballestero (1971 y 1973) “método de las dos betas” (MDB), sin duda influenciado por la alta popularidad que en estos años alcanza la distribución beta, debida principalmente a su éxito como modelo probabilístico subyacente en el método PERT, ha tenido varias extensiones en direcciones diferentes. Por una parte, la de los investigadores que tuvieron una relación directa con el Prof. Ballestero, derivada de su pertenencia a las Escuelas Superiores de Ingenieros Agrónomos de las Universidades Politécnica de Madrid, Politécnica de Valencia y Córdoba. Así Romero (1977) extiende el MDB a las distribuciones rectangular y triangular, acorde con lo posteriormente realizado en la práctica metodológica del PERT (Suárez, 1980; Johnson 1997; Johnson, 2002). Ballestero y Caballer (1982) participan a la comunidad científica internacional los fundamentos del método, Alonso y Lozano (1985) amplían la denominación del MDB y lo llaman Método de las Dos Funciones de Distribución (MDFD), Domingo *et al.* (1994) lo denominan método de las funciones de distribución, Lozano (1996) utiliza el MDB para tasaciones masivas y Caballer (1998) implementa unas tablas para una distribución beta particular que, en vez de depender de los dos clásicos parámetros p y q de la beta, depende solamente de un parámetro h, con lo que su especificación puede realizarse sin ninguna ambigüedad en función de los tres típicos valores suministrados por el experto: pesimista, más probable y optimista. Por otra parte, también contribuyen otros autores de las Universidades del sureste de España, que aunque no han mantenido una relación tan estrecha con Ballestero, han seguido su línea de investigación marcada con el MDB, introduciendo nuevas distribuciones como modelos de las variables valor de mercado y variable explicativa (calidad del bien a valorar) de dicho valor de mercado. En este punto cabe reseñar los trabajos sobre la distribución trapezoidal de Herrerías *et al.* (2001), así como los de Herrerías (2002) y Herrerías (2005), en donde se introducen distribuciones de probabilidad bivariantes y multivariantes para poder enfocar mejor la variable explicativa bajo un prisma multidimensional y no unidimensional, mediante un indicador agregado, como hasta el momento se venía realizando. En esta línea de modelos bivariantes se encuentran los trabajos de Vivo (2005), el de Herrerías y Herrerías (2010) y más recientemente el de Franco *et al.* (2015). También debe reseñarse, por su originalidad, el de García *et al.* (2003), sobre contrastes estadísticos para los índices de calidad y las funciones de distribución.

Otras nuevas distribuciones introducidas en este campo son las diferentes generalizaciones de la distribución biparabólica de García (2007), y las generalizaciones de la distribución bicúbica de López (2010).

Un trabajo donde puede apreciarse el amplio espectro de aplicaciones del MDB es el texto de Guadalajara (1996); en el de Alonso e Iruretagoyena (1990) se utiliza la distribución normal como modelo en el MDB.

Por otra parte, una interesante visión histórica de la Teoría de la Valoración, puede encontrarse en Caballer (2009), y una panorámica resumida de algunos logros obtenidos en el MDFD, puede verse en el Monográfico *Técnicas Generales de Va-*

loración, editado por Estudios de Economía Aplicada y coordinado por Caballer y Herrerías (2007) y en Herrerías (2011).

Otra línea de trabajo muy fructífera, bien porque se incumpla el principio básico de Ballestero (1973) o porque se trabaje con índices de calidad multidimensionales, es considerar la función de supervivencia en el MDB, en vez de la función de distribución, como proponen Franco *et al.* (2006), Herrerías (2011) y Franco *et al.* (2015).

2. La distribución TSP

Se dice que una variable aleatoria X, se distribuye según una distribución de probabilidad Two Sided Power (TSP), si su función de densidad responde a la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{b-a}\left(\dfrac{x-a}{m-a}\right)^{n-1} & si \quad a < x < m \\ \dfrac{n}{b-a}\left(\dfrac{b-x}{b-m}\right)^{n-1} & si \quad m \le x < b \end{cases} \quad \text{y} \quad n > 0 \qquad [1]$$

según van Dorp y Kotz (2002a y 2002b).

Nótese que para n = 1 coincide con la distribución rectangular y para n = 2 coincide con la distribución triangular. Un enfoque funcional de esta distribución, mediante el sistema de Pearson, puede verse en Herrerías *et al.* (2005).

La esperanza y la varianza de la TSP responden a las siguientes expresiones:

$$E[X] = \frac{a+(n-1)m+b}{n+1} \quad \text{y} \quad V[X] = \frac{n(b-a)^2 - 2(n-1)(m-a)(b-m)}{(n+2)(n+1)^2} \qquad [2]$$

Además, en el caso de que n sea igual a cinco, se tiene que:

$$E[X] = \frac{a+4m+b}{6} \quad \text{y} \quad V[X] = \frac{5(b-a)^2 - 8(m-a)(b-m)}{7x36} \qquad [3]$$

Luego la TSP (n = 5) y la Beta PERT son dos distribuciones continuas cuyas medias coinciden y la varianza de la TSP (n = 5) es menor que la varianza de la Beta PERT:

$$V[BP] = \frac{(b-a)^2}{36} \qquad [4]$$

El parámetro n, puede interpretarse como el grado de confiabilidad en la estimación subjetiva del valor más probable m (van Dorp y Kotz, 2003).

La extraordinaria versatilidad de esta distribución, que contiene distribuciones en forma de U, J, L y campana puede verse en Kotz y van Dorp (2004).

La función de distribución de la TSP es:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{m-a}{b-a}\left(\dfrac{x-a}{m-a}\right)^{n} & si \quad a<x\leq m\\ 1-\dfrac{b-m}{b-a}\left(\dfrac{b-x}{b-m}\right)^{n} & si \quad m\leq x<b\end{cases} \quad \text{y} \quad n>0 \qquad [5]$$

Nótese en [5], que el valor de $F(m)=m^{*}=\dfrac{m-a}{b-a}$ (valor modal estandarizado) y que la inversa de la función de distribución puede obtenerse muy fácilmente mediante:

$$F_X^{-1}(y;a,m,b,n)=\begin{cases} a+\sqrt[n]{y(m-a)^{n-1}(b-a)} & si \quad 0\leq y\leq \dfrac{m-a}{b-a}\\ b-\sqrt[n]{(1-y)(b-m)^{n-1}(b-a)} & si \quad \dfrac{m-a}{b-a}\leq y\leq 1\end{cases} \quad \text{y} \quad n>0 \qquad [6]$$

Estas dos propiedades de la función de distribución TSP, son muy interesantes en la aplicación práctica del MDFD.

Como es fácilmente observable, la distribución TSP es tetraparamétrica, depende de cuatro parámetros (a, b, m, n), generalmente desconocidos, por lo que con las tres estimaciones subjetivas del experto, relativas a los valores pesimista, optimista y más probable, no pueden determinarse. Ocurre lo mismo con la distribución beta, β (a, b, p, q), cuando se utiliza como modelo probabilístico en el PERT. Es conocido que este caso se resuelve imponiendo hipótesis adicionales (Taha, 1981), o relaciones simplificadoras (Suárez, 1980).

Un procedimiento para lograr la completa especificación de la distribución TSP, es solicitar más información sobre ella al experto, tal como hacen Berny (1989), Herrerías y Pérez (1991), Pérez (1995), García *et al.* (2007) y van Dorp *et al.* (2007), con otras distribuciones de probabilidad. La implementación de este procedimiento se denomina proceso de elicitación y conlleva, generalmente, una o varias estimaciones subjetivas de cuantiles correspondientes a α, es decir:

$$F(X_{\alpha})=\alpha \qquad [7]$$

Las preguntas que se realicen al experto deben cumplir dos condiciones, la primera ser fácilmente interpretables en el contexto real del problema y la segunda ser fácilmente incorporables en el modelo probabilístico teórico. En efecto, a partir de [5] e imponiendo la condición [7], se puede determinar una estimación del parámetro n, en función de que el cuantil correspondiente a α, sea menor o mayor que la moda m:

$$\begin{aligned} n&=\lg\left(\frac{\alpha}{m^{*}}\right)\Big/\lg\left(\frac{x^{*}{}_{\alpha}}{m^{*}}\right) && si \quad x_{\alpha}<m\\ n&=\lg\left(\frac{1-\alpha}{1-m^{*}}\right)\Big/\lg\left(\frac{1-x^{*}{}_{\alpha}}{1-m^{*}}\right) && si \quad x_{\alpha}>m\end{aligned} \qquad [8]$$

donde se ha notado con * los valores correspondientes estandarizados del cuantil α y de la moda, con ello se está en condiciones de aplicar la Teoría General del MDFD, en su forma tradicional:

$$F_x(X_0) = F_v(v_0) \leftrightarrow v_0 = F_v^{-1}\,[F_x(X_0)] \qquad [9]$$

donde F_x y F_v son las respectivas funciones de distribución de la variable explicativa y del valor de mercado, notándose por x_0 y v_0, los valores correspondientes a la variable explicativa del bien a valorar y su valor de mercado, estimado por MDFD.

3. Caso práctico

Se va a considerar el informe nº 1 de tasación de un apartamento, recogido en el texto de Ballestero y Rodríguez (1999), para ilustrar el empleo de la distribución TSP, tanto para la variable explicativa, X, como para el valor de mercado, V, en el MDB.

Las puntuaciones asignadas a los extremos y a la moda de los signos externos se muestran en el Cuadro 1.

CUADRO 1

Puntuaciones de los signos externos

a_x	m_x	b_x
345 puntos	685 puntos	906 puntos

Fuente: Elaboración propia.

Los correspondientes valores de mercado, en unidades monetarias (u.m.) por metro cuadrado, para los extremos y la moda se presentan en el Cuadro 2.

CUADRO 2

Valores de mercado

a_y	m_v	b_y
75 u.m./m^2	130 u.m./m^2	225 u.m./m^2

Fuente: Elaboración propia.

La puntuación de los signos externos para el inmueble del problema es x_0 = 711 puntos. Se trata de obtener el valor de mercado, v_0, del mismo. El determinado por Ballestero y Rodriguez (1999), empleando distribuciones triangulares, es v_0 = 158,89 u.m./m^2.

Supuesto que se ha podido determinar o estimar subjetivamente, que uno de cada cinco inmuebles tiene una puntuación que no supera los 406 puntos, y que el 10 %

de los valores de mercado de dichos inmuebles superan las 200 u.m./m². Estas dos condiciones se traducen funcionalmente en que:

$$F_x(406) = 0{,}2 \text{ y } F_v(200) = 0{,}9 \qquad [10]$$

De [10] se obtienen los parámetros n de las distribuciones TSP, de la forma siguiente: como en nuestro caso $x_{0,2} = 406 < 685 = m_x$, hay que usar la primera rama de [5] para determinar el parámetro n_x de la función de distribución TSP de la variable explicativa, X, obteniéndose $n_x = 0{,}6453$ y como $v_{0,9} = 200 > 130 = m_v$, hay que utilizar la segunda rama de [5] para determinar el parámetro n_v de la función de distribución TSP de la variable valor de mercado, V, obteniéndose $n_v = 1{,}3826$. Ahora se está en condiciones de aplicar [9] y como: $F_x(711) > F_x(685) = F_x(m_x) = m_x^* = 0{,}6060$ y $F_v(130) = 0{,}3666$, hay que igualar las segundas ramas de las funciones de distribución $F_x(711)$ y $F_v(v_o)$:

$$\frac{906-685}{906-345}\left(\frac{906-711}{906-685}\right)^{0,6453} = \frac{225-130}{225-75}\left(\frac{225-v}{225-75}\right)^{1,3826} \qquad [11]$$

Resolviendo en v, se obtiene $v_0 = 170{,}49$ u.m./m²; puede apreciarse que el valor obtenido, con esta distribución, es ligeramente superior al determinado por Ballestero y Rodríguez (1999).

De lo expuesto anteriormente se deducen las siguientes conclusiones:

- La distribución TSP se comporta como un buen modelo probabilístico en el MDB, debido a la fácil invertibilidad de su función de distribución y por verificar que $F(m) = m^*$, lo que facilita la discriminación de la rama de la función de distribución en el problema que nos ocupa.
- La distribución TSP puede usarse, como modelo probabilístico alternativo, en todos aquellos problemas en los que se han utilizado las distribuciones uniforme, triangular y beta.
- El resultado obtenido en el caso práctico plantea un gran interés por la realización de un nuevo estudio sobre la sensibilidad de los exponentes de la distribución TSP.

Referencias

Alonso, R. y Lozano, J.J. (1985). "El método de las dos funciones de distribución: Una aplicación a la valoración de fincas agrícolas en las comarcas Centro y Tierra de Campos (Valladolid)". *Anales del INIA, Economía*, 9: 293-325.

Alonso, R. e Iruretagoyena, M.T. (1990). *Casos prácticos de valoración agraria*. MAPA, Madrid

Ballestero, E. (1971). "Sobre la valoración sintética de tierras y un nuevo método aplicable a la concentración parcelaria". *Revista de Economía Política,* 57: 225-238.

Ballestero, E. (1973). "Nota sobre un nuevo método rápido de valoración". *Revista de Estudios Agrosociales,* 85: 75-78.

Ballestero, E. y Caballer, V. (1982). "Il metodo delle due Beta. Un procedimento rapido nella stima dei beni fondari". *Genio Rurale*, 45(6): 33-36.

Ballestero, E. y Rodríguez, J.A. (1999). *El precio de los inmuebles urbanos*. CIE Inversiones Editoriales Dossat 2000, Madrid.

Berny, J. (1989). "A new distribution function for risk analysis". *Journal of the Operational Research Society*, 40(12): 1121-1127. http://doi.org/b9mnk8.

Caballer, V. (1998). *Valoración Agraria. Teoría y Práctica. 4ª Ed.* Mundi-Prensa, Madrid.

Caballer, V. y Herrerías, R. (2007). "Tasación y valoración. Situación actual y perspectiva de futuro". *Estudios de Economía Aplicada*, 25: 23-48.

Caballer, V. (2009). "Del Nilometro a la Bolsa. Historia de la Valoración". *Revista de la Historia de la Economía y de la Empresa*, 3: 107-128.

Domingo, J., Martínez, J.A. y Cañas, J.A. (1994). "Valoración de tierras en las campiñas y la subbética de la provincia de Córdoba por el método de las funciones de distribución". *Investigación Agraria. Serie Economía*, 3: 447-467.

Franco, M., Herrerías, R., Callejón, J. y Vivo, J.M. (2006). "Valuation Method of the Two Survival Functions". En Herrerías, R., Callejón, J. y Herrerías, J.M. (Eds.): *Distribution Models Theory*. World Scientific, Singapore: 55-66.

Franco, M., Vivo, J.M. y Herrerías, R. (2015). "A quick assessment from expert judgements to assist in farmland valuation". *Land Use Policy*, 46: 324-329. http://doi.org/4hd.

García, C. (2007). "Generalizaciones de la distribución biparabólica: aplicaciones en el ámbito financiero y el campo de la valoración". *Tesis Doctoral*. Universidad de Granada.

García, C., Herrerías, J.M. y García, J. (2003). "Valoración agraria: contrastes estadísticos para índices y distribuciones en el método de las dos funciones de distribución". *Revista Española de Estudios Agrosociales y Pesqueros*, 199: 93-118.

García, C., Herrerías, J.M. y García, J. (2007). "Los procesos de elicitación en el método de las dos funciones de distribución: un caso práctico". *Estudios de Economía Aplicada*, 25(1): 215-244.

Guadalajara, N. (1996). *Valoración agraria. Casos prácticos*. 2ª Ed. Mundi Prensa, Madrid.

Herrerías, R. y Pérez, E. (1991). "Estimación de una distribución beta como modelo para su utilización en el método PERT". *Actas de la V Reunión de ASEPELT-España*. Las Palmas de Gran Canaria: 1191-1199.

Herrerías, R., García, J., Cruz, S. y Herrerías, J.M. (2001). "Il modello probabilistico trapezoidale, nel metodo delle due distribuzioni della teoria generale di valutazione". *Genio Rurale*, Anno LXIV, Abril 2001, 4: 3-9.

Herrerías, J.M. (2002). "Avances en la Teoría general de valoración en ambiente de incertidumbre". *Tesis Doctoral*. Universidad de Granada.

Herrerías, J.M. (2005). *Modelos probabilísticos aplicados a la Teoría General de Valoración. El método de las dos betas*. Fundación Unicaja. Málaga.

Herrerías, J.M. y Herrerías, R. (2010). "Valuation method for land pricing based on two cumulative distribution functions". *Spanish Journal of Agricultural Research*, 8(3): 538-546. http://doi.org/5cf.

Herrerías, R., Palacios, F. y Herrerías, J.M. (2005). "La distribución TSP (a,m,b,n) de van Dorp y Kotz como distribución de tipo Pearson univariante continua. Algunas aplicaciones estadísticas y económicas". En Rodríguez, J., Conde, A., Sáez, A.J. y Olmo, M.J. (Eds.): *Aspectos teóricos y aplicados en la generación de distribuciones de Probabilidad*. Entre Libros, Linares: 115-128.

Herrerías, R. (2011). "Desarrollos actuales de la valoración". En Vidal, F. y de Miguel, M.D. (Eds): *Valoración Agraria*: *Antecedentes para un futuro próximo*. Alicante: 57-72.

Johnson, D. (1997). "The triangular distribution as a proxy for the beta distribution in risk analysis". *The Statistician*, 46(3): 387-398.

Johnson, D. (2002). "Triangular approximations for continuous random variables in risk analysis". *Journal of the Operational Research Society*, 53: 457-467. http://doi.org/d4kt3x.

Kotz, S. y van Dorp, J.R. (2004). *Beyond Beta. Other continuous families distributions with bounded support and applications*. World Scientific, Singapore. http://doi.org/dvnnfw.

López, M.M. (2010). "Generación de distribuciones aplicables en ambiente de incertidumbre y en el ámbito financiero". *Tesis Doctoral*. Universidad de Granada.

Lozano, J.J. (1996). "Tasación urbana: una metodología para informes de tasación masiva". *Tesis Doctoral*. Universidad Politécnica de Madrid.

Pérez, E. (1995). "Ajuste de un modelo beta con información adicional sobre su apuntamiento". *Actas de la IX Reunión de ASEPELT-España*. Santiago de Compostela: 445-451.

Romero, C. (1977). "Valoración por el método de las dos distribuciones beta: Una extensión". *Revista de Economía Política*, 75: 47-62.

Suárez, A.S. (1980). *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa*. Ediciones Pirámide, Madrid.

Taha, H.A. (1981). *Investigación de Operaciones. Una introducción*. Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A. México.

van Dorp, J.R. y Kotz, S. (2002a). "The standard two sided power distribution and its properties: With applications in financial engineering". *The American Statistician*, 56(2): 90-99.

van Dorp, J.R. y Kotz, S. (2002b). "A novel extension of the triangular distribution and its parameter estimation". *The Statistician*, 51(1): 63-79. http://doi.org/dsx2gz.

van Dorp, J.R. y Kotz, S. (2003). "Generalizations of Two-Sided Power distributions and their convolution". *Communications in Statistics - Theory and Methods,* 32(9): 1703-1723. http://doi.org/d9nzdz.

van Dorp, J.R., Cruz, S., García, J. y Herrerías, R. (2007). "An elicitation procedure for the generalized trapezoidal distribution with a uniform central stage". *Decision Analysis*, 4(3): 156-166. http://doi.org/bbzxw2.

Vivo, J.M. (2005). "Propiedades de extremos en algunos modelos probabilísticos bivariantes para la Economía". *Tesis Doctoral*. Universidad de Granada.